УДК 512

О собственных значениях $(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{H})$-циркулянтов и косых $(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{H})$-циркулянтов

А.К. Абдикалыков[1,2], Х.Д. Икрамов[2], В.Н. Чугунов[3]

[1]Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, ул. Мунайтпасова, 7, Астана, Республика Казахстан, 010010

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991

[3]Институт вычислительной математики РАН, ул. Губкина, 8, Москва, 119991
E-mails: adiko2008@gmail.com (Абдикалыков А.К.), ikramov@cs.msu.su (Икрамов Х.Д.), chugunov.vadim@gmail.com (Чугунов В.Н.)

Абдикалыков А.К., Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н. О собственных значениях $(T+H)$-циркулянтов и косых $(T+H)$-циркулянтов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 2. — С. 111–124.

Получены явные формулы для вычисления собственных значений ганкелевых циркулянтов, ганкелевых косых циркулянтов, $(T+H)$-циркулянтов и косых $(T+H)$-циркулянтов. Показано, что множество матриц, представимых в виде суммы теплицева и ганкелева ϕ-циркулянтов, не образует алгебры, если $\phi \neq \pm 1$.

Ключевые слова: *теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, косой циркулянт, собственные значения.*

Abdikalykov A.K., Ikramov Kh.D., Chugunov V.N. On eigenvalues of $(T+H)$-circulants and $(T+H)$-skew-circulants // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 111–124.

Explicit formulas for calculating eigenvalues of the Hankel circulants, Hankel skew-circulants, $(T+H)$-circulants, and $(T+H)$-skew-circulants are obtained. It is shown that if $\phi \neq \pm 1$, then the set of matrices that can be represented as sums of a Toeplitz ϕ-circulant and a Hankel ϕ-circulant is not an algebra.

Key words: *Toeplitz matrix, Hankel matrix, circulant, skew-circulant, eigenvalues.*

1. Введение

Теплицевой называется $n \times n$-матрица T вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

а *ганкелевой* — $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_{-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \cdots & h_{-(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n, \tag{2}$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и ϕ-*циркулянтом* в случае, когда

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ганкелевым ϕ-циркулянтом A называется матрица, для которой $A\mathcal{P}_n$ есть ϕ-циркулянт. При $\phi = 1$ получаем ганкелев циркулянт, а для $\phi = -1$ — косой ганкелев циркулянт.

$(T + H)$-*циркулянтом* назовем матрицу, представимую в виде суммы теплицева и ганкелева циркулянтов.

Косым $(T + H)$-*циркулянтом* будем называть матрицу, представимую в виде суммы косых теплицева и ганкелева циркулянтов.

Вычисление всех собственных значений матрицы порядка n требует в общем случае $O(n^3)$ арифметических операций. В сравнении с этой работой вычисление собственных значений циркулянта представляется тривиальной задачей. Действительно, если с помощью элементов верхней строки циркулянта C составить многочлен $f(z)$ степени $n-1$, то спектр C составят значения $f(z)$ на корнях n-й степени из единицы. Найти эти значения можно за $O(n \log n)$ операций, используя технику быстрого преобразования Фурье. Похожим образом решается задача вычисления собственных значений косого циркулянта.

Оказывается, что почти столь же просто можно вычислять собственные значения ганкелевых циркулянтов и косых циркулянтов. Более того, лишь чуть сложнее вычисляются собственные значения матриц, представимых в виде суммы теплицева и ганкелева циркулянтов или косых циркулянтов. Доказательства этих утверждений составляют основное содержание данной статьи. Они приведены соответственно в пунктах 2–5.

Обозначим через $\mathcal{L}_\phi$ множество матриц, являющихся суммами теплицевых и ганкелевых ϕ-циркулянтов. Известно (см. [1]), что множества $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_{-1}$ являются алгебрами относительно обычных матричных операций. В п. 6 мы показываем, что аналогичное утверждение для множества $\mathcal{L}_\phi$ неверно, если $\phi \neq \pm 1$. В заключительном п. 7 время работы метода Ланцоша, как способа вычисления спектра вещественного ганкелева циркулянта, сравнивается со временем вычисления собственных значений по формулам, указанным в данной работе. Результаты этого сравнения говорят сами за себя.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень n-й степени из единицы, μ — корень n-й степени из -1 вида $\mu = e^{\frac{i\pi}{n}}$, I_n — единичная матрица порядка n. Введем еще вспомогательные $n\times n$-матрицы $Q_j = \mathcal{P}_j \oplus \mathcal{P}_{n-j}$ $(j = 1, 2)$,

$$W = \mathrm{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1})$$

и

$$G = \mathrm{diag}(1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1}).$$

Согласно [2], для циркулянта C справедливо спектральное разложение

$$C = F_n^* D F_n, \tag{3}$$

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица, а F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Из (2) и (3) следует, что всякий ганкелев циркулянт A представим в виде

$$A = F_n^* D F_n \mathcal{P}_n. \tag{4}$$

Если S — косой циркулянт, то вместо (3) справедливо разложение

$$S = G F_n^* D F_n G^* = G \hat{C} G^*, \tag{5}$$

где $\hat{C}$ — циркулянт. Отсюда следует, что для любого косого ганкелева циркулянта B выполняется соотношение (см. (2) и (5)):

$$B = G F_n^* D F_n G^* \mathcal{P}_n. \tag{6}$$

Легко проверяются следующие матричные соотношения:

$$F_n^2 = Q_1, \qquad F_n^4 = Q_1^2 = I_n. \tag{7}$$

2. Спектр ганкелева циркулянта

В данном пункте установим формулы для вычисления спектра произвольного ганкелева циркулянта.

Теорема 1. *Пусть A — ганкелев циркулянт, представленный в виде* (4). *Тогда собственными значениями матрицы A будут числа*:

$$d_1, \quad \pm\sqrt{d_2 d_n}, \quad \pm\sqrt{d_3 d_{n-1}}, \quad \ldots, \quad \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+2}},$$

если $n = 2m + 1$, и числа:

$$d_1, \quad \pm\sqrt{d_2 d_n}, \quad \pm\sqrt{d_3 d_{n-1}}, \quad \ldots, \quad \pm\sqrt{d_m d_{m+2}}, \quad -d_{m+1}$$

при $n = 2m$.

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ax = \lambda x$$

или, с учетом (4),

$$F_n^* D F_n \mathcal{P}_n x = \lambda x. \tag{8}$$

Будем искать собственный вектор x в виде

$$x = F_n Q_1 y. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), имеем

$$F_n^* D F_n \mathcal{P}_n F_n Q_1 y = \lambda F_n Q_1 y.$$

Умножая это равенство слева на F_n и учитывая соотношения (7), получаем

$$D F_n \mathcal{P}_n F_n Q_1 y = \lambda y.$$

В [3] было установлено, что $\mathcal{P}_n F_n = F_n^* W^*$. Поэтому

$$D W^* Q_1 y = \lambda y.$$

Матрица в левой части этого равенства выглядит так:

$$D W^* Q_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & & & & d_2\bar{\epsilon} \\ & & & d_3\bar{\epsilon}^2 & \\ & & \iddots & & \\ & d_n\bar{\epsilon}^{n-1} & & & \end{pmatrix}.$$

Переставим ее строки и столбцы в следующем порядке: 1, 2, n, 3, $n-1$, 4, $n-2$, $\ldots$. В результате этого простого подобия приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей несколько различный вид для четных и нечетных n, а именно:

$$d_1 \oplus \begin{pmatrix} & d_2\bar{\epsilon} \\ d_n\bar{\epsilon}^{n-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3\bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}\bar{\epsilon}^{n-2} & \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} & d_{m+1}\bar{\epsilon}^m \\ d_{m+2}\bar{\epsilon}^{m+1} & \end{pmatrix},$$

если $n = 2m + 1$, и

$$d_1 \oplus \begin{pmatrix} & d_2\bar{\epsilon} \\ d_n\bar{\epsilon}^{n-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3\bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}\bar{\epsilon}^{n-2} & \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} & d_m\bar{\epsilon}^{m-1} \\ d_{m+2}\bar{\epsilon}^{m+1} & \end{pmatrix} \oplus d_{m+1}\bar{\epsilon}^m,$$

если $n = 2m$.

Отсюда видно, что d_1 — собственное значение. Остальные собственные значения образуют пары, каждая из которых решает задачу на собственные значения для матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & d_j\bar{\epsilon}^{j-1} \\ d_{n+2-j}\bar{\epsilon}^{n+1-j} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Их характеристические многочлены имеет вид:

$$\lambda^2 - d_j\bar{\epsilon}^{j-1} d_{n+2-j}\bar{\epsilon}^{n+1-j} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1,$$

или, поскольку $\bar{\epsilon}^{n+1-j} = \bar{\epsilon}^{1-j}$,

$$\lambda^2 - d_j d_{n+2-j} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая нечетного n. Если же $n = 2m$, то в спектр добавляется еще одно собственное значение $d_{m+1}\bar{\epsilon}^m = -d_{m+1}$, так как $(\epsilon^m)^2 = \epsilon^n = 1$. □

3. Спектр косого ганкелева циркулянта

Пусть теперь B — произвольный косой ганкелев циркулянт. Следующая теорема дает способ вычисления его собственных значений.

Теорема 2. *Пусть B — косой ганкелев циркулянт вида* (6). *Тогда собственными значениями матрицы B являются числа:*

$$\pm\sqrt{d_1 d_2}, \quad \pm\sqrt{d_3 d_n}, \quad \pm\sqrt{d_4 d_{n-1}}, \quad \ldots, \quad \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+3}}, \quad d_{m+2},$$

если $n = 2m + 1$, и числа:

$$\pm\sqrt{d_1 d_2}, \quad \pm\sqrt{d_3 d_n}, \quad \pm\sqrt{d_4 d_{n-1}}, \quad \ldots, \quad \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+2}},$$

если $n = 2m$.

Прежде чем доказывать теорему 2, установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Справедливо матричное соотношение*

$$F_n G^* \mathcal{P}_n G F_n^* = -\frac{1}{\mu} Q_2 W.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\left\{F_n G^* \mathcal{P}_n G F_n^*\right\}_{kj} &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-(m-1)} \mu^{n-m} \epsilon^{-(n-m)(j-1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-(m-1)} \mu^{n-1} \mu^{-m+1} \epsilon^{-(n-m)(j-1)} \\
&= -\frac{1}{\mu}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-2(m-1)} \epsilon^{m(j-1)} = \{\mu^2 = \epsilon\} \\
&= -\frac{\epsilon^{j-1}}{\mu}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \epsilon^{(k-1)(m-1)} \epsilon^{-(m-1)} \epsilon^{(m-1)(j-1)} \\
&= -\frac{\epsilon^{j-1}}{\mu}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \left(\epsilon^{(k+j-3)}\right)^{m-1}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \left(\epsilon^{(k+j-3)}\right)^{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ k+j-3=0 \text{ или } \ k+j-3=n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому выражение в правой части равенств (10) для всех k и j совпадает с

$$-\frac{1}{\mu}\{Q_2\}_{kj}\{W\}_{jj} = -\frac{1}{\mu}\{Q_2 W\}_{kj}. \qquad \square$$

Теперь можно установить справедливость теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Bx = \lambda x$$

или, с учетом (6),

$$G F_n^* D F_n G^* \mathcal{P}_n x = \lambda x. \qquad (11)$$

Будем искать вектор x в виде

$$x = G F_n^* y. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11), имеем

$$G F_n^* D F_n G^* \mathcal{P}_n G F_n^* y = \lambda G F_n^* y.$$

Умножая это равенство слева на $F_n G^*$, получаем

$$D F_n G^* \mathcal{P}_n G F_n^* y = \lambda y.$$

Используя лемму, можем записать

$$-\frac{1}{\mu} D Q_2 W y = \lambda y.$$

Положим $\lambda = -\frac{1}{\mu}\nu$. Числа ν суть собственные значения матрицы

$$DQ_2W = \begin{pmatrix} & d_1\epsilon & & & & \\ d_2 & & & & & \\ & & & & & d_3\epsilon^{n-1} \\ & & & & d_4\epsilon^{n-2} & \\ & & & \iddots & & \\ & & d_n\epsilon^2 & & & \end{pmatrix}.$$

Переставим строки и столбцы данной матрицы в следующем порядке: 1, 2, 3, n, 4, $n-1$, 5, $n-2$, $\dots$. В результате этого подобия приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей различный вид для четных и нечетных n, а именно:

$$\begin{pmatrix} & d_1\epsilon \\ d_2 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3\epsilon^{n-1} \\ d_n\epsilon^2 & \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} & d_{m+1}\epsilon^{m+2} \\ d_{m+3}\epsilon^m & \end{pmatrix} \oplus d_{m+2}\epsilon^{m+1},$$

если $n = 2m+1$, и

$$\begin{pmatrix} & d_1\epsilon \\ d_2 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3\epsilon^{n-1} \\ d_n\epsilon^2 & \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} & d_{m+1}\epsilon^{m+1} \\ d_{m+2}\epsilon^m & \end{pmatrix},$$

если $n = 2m$.

Отсюда видно, что собственные значения составляют пары, первая из которых решает задачу на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & d_1\epsilon \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$\nu^2 - d_1d_2\epsilon = 0.$$

Это дает собственные значения $\nu = \pm\sqrt{d_1d_2\epsilon}$, откуда $\lambda = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{d_1d_2\epsilon} = \pm\sqrt{d_1d_2}$, поскольку $\mu^2 = \epsilon$.

Остальные пары решают задачу на собственные значения для матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & d_j\epsilon^{n+2-j} \\ d_{n+3-j}\epsilon^{j-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 3, 4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

с характеристическими многочленами:

$$\nu^2 - d_j\epsilon^{n+2-j}d_{n+3-j}\epsilon^{j-1} = 0, \qquad j = 3, 4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

или

$$\nu^2 - d_jd_{n+3-j}\epsilon = 0, \qquad j = 3, 4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Отсюда получаем $\nu = \pm\sqrt{d_jd_{n+3-j}\epsilon}$, поэтому $\lambda = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{d_jd_{n+3-j}\epsilon} = \pm\sqrt{d_jd_{n+3-j}}$.

В случае нечетного $n = 2m + 1$ добавляется еще одно собственное значение

$$-\frac{1}{\mu} d_{m+2} \epsilon^{m+1} = -d_{m+2} \mu \epsilon^m = d_{m+2}. \qquad \square$$

4. Спектр $(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{H})$-циркулянта

Теперь изучим спектр матрицы, представляющей из себя сумму теплицева и ганкелева циркулянтов.

Теорема 3. *Пусть R — матрица, являющаяся суммой теплицева и ганкелева циркулянтов. Представим R в виде*:

$$R = F_n^* D_1 F_n + F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n, \tag{13}$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы:

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right), \qquad D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right).$$

Тогда собственными значениями матрицы R будут числа:

$$d_1^{(1)} + d_1^{(2)},$$

$$\frac{d_2^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_2^{(1)} + d_n^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_2^{(1)} d_n^{(1)} - d_2^{(2)} d_n^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_3^{(1)} d_{n-1}^{(1)} - d_3^{(2)} d_{n-1}^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\cdots,$$

$$\frac{d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_{m+1}^{(1)} d_{m+2}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)} d_{m+2}^{(2)}\right)}}{2},$$

если $n = 2m + 1$, и числа:

$$d_1^{(1)} + d_1^{(2)},$$

$$\frac{d_2^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_2^{(1)} + d_n^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_2^{(1)} d_n^{(1)} - d_2^{(2)} d_n^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_3^{(1)} d_{n-1}^{(1)} - d_3^{(2)} d_{n-1}^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\cdots,$$

$$\frac{d_m^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_m^{(1)} + d_{m+2}^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_m^{(1)} d_{m+2}^{(1)} - d_m^{(2)} d_{m+2}^{(2)}\right)}}{2},$$

$$d_{m+1}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)},$$

если $n = 2m$.

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Rx = \lambda x$$

или, с учетом (13),

$$(F_n^* D_1 F_n + F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n)x = \lambda x. \tag{14}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, будем искать вектор x в виде

$$x = F_n Q_1 y.$$

Подставляя (9) в (14), имеем

$$F_n^* D_1 F_n F_n Q_1 y + F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n F_n Q_1 y = \lambda F_n Q_1 y.$$

Умножая это равенство слева на F_n и учитывая соотношения (7), получаем

$$D_1 y + D_2 F_n \mathcal{P}_n F_n Q_1 y = \lambda y.$$

Снова используя равенство $\mathcal{P}_n F_n = F_n^* W^*$ (см. [3]), находим

$$(D_1 + D_2 W^* Q_1)y = \lambda y.$$

Матрица в левой части этого равенства выглядит так:

$$D_1 + D_2 W^* Q_1 = \begin{pmatrix} d_1^{(1)} + d_1^{(2)} & & & & & \\ & d_2^{(1)} & & & & d_2^{(2)}\bar{\epsilon} \\ & & d_3^{(1)} & & d_3^{(2)}\bar{\epsilon}^2 & \\ & & & \ddots \kern-1em \iddots & & \\ & & d_{n-1}^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-2} & & d_{n-1}^{(1)} & \\ & d_n^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-1} & & & & d_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Переставим ее строки и столбцы в следующем порядке: 1, 2, n, 3, $n-1$, 4, $n-2$, $\ldots$. В результате этого подобия приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей различный вид для четных и нечетных n, а именно:

$$\left(d_1^{(1)} + d_1^{(2)}\right) \oplus \begin{pmatrix} d_2^{(1)} & d_2^{(2)}\bar{\epsilon} \\ d_n^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-1} & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & d_3^{(2)}\bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-2} & d_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & d_{m+1}^{(2)}\bar{\epsilon}^m \\ d_{m+2}^{(2)}\bar{\epsilon}^{m+1} & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix},$$

если $n = 2m + 1$, и

$$\left(d_1^{(1)} + d_1^{(2)}\right) \oplus \begin{pmatrix} d_2^{(1)} & d_2^{(2)}\bar{\epsilon} \\ d_n^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-1} & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & d_3^{(2)}\bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}^{(2)}\bar{\epsilon}^{n-2} & d_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus$$
$$\begin{pmatrix} d_m^{(1)} & d_m^{(2)}\bar{\epsilon}^{m-1} \\ d_{m+2}^{(2)}\bar{\epsilon}^{m+1} & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \left(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+1}^{(2)}\bar{\epsilon}^m\right),$$

если $n = 2m$.

Отсюда видно, что число $d_1^{(1)} + d_1^{(2)}$ есть собственное значение. Остальные собственные значения составляют пары, каждая из которых решает задачу на собственные значения для матриц:

$$\begin{pmatrix} d_j^{(1)} & d_j^{(2)}\overline{\epsilon}^{j-1} \\ d_{n+2-j}^{(2)}\overline{\epsilon}^{n+1-j} & d_{n+2-j}^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1,$$

с характеристическими многочленами:

$$\lambda^2 - \big(d_j^{(1)} + d_{n+2-j}^{(1)}\big)\lambda + d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(1)} - d_j^{(2)}\overline{\epsilon}^{j-1} d_{n+2-j}^{(2)}\overline{\epsilon}^{n+1-j} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Поскольку $\overline{\epsilon}^{n+1-j} = \overline{\epsilon}^{1-j}$, имеем

$$\lambda^2 - \big(d_j^{(1)} + d_{n+2-j}^{(1)}\big)\lambda + d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(1)} - d_j^{(2)} d_{n+2-j}^{(2)} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая нечетного n. Если же $n = 2m$, то в спектр добавляется еще одно собственное значение $d_{m+1}^{(1)} + d_{m+1}^{(2)}\overline{\epsilon}^m = d_{m+1}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)}$, так как $(\epsilon^m)^2 = \epsilon^n = 1$. □

Если $D_1 = 0$, то условия данной теоремы совпадают с условиями теоремы 1. Полагая $D_2 = D$, получаем формулы из п. 2.

5. Спектр косого $(T + H)$-циркулянта

Исследуем теперь спектр матрицы, представляющей из себя сумму косых теплицева и ганкелева циркулянтов.

Теорема 4. *Пусть Z — матрица, являющаяся суммой косых теплицева и ганкелева циркулянтов. Представим Z в виде:*

$$Z = GF_n^* D_1 F_n G^* + GF_n^* D_2 F_n G^* \mathcal{P}_n, \tag{15}$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы:

$$D_1 = \mathrm{diag}\Big(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\Big), \qquad D_2 = \mathrm{diag}\Big(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\Big).$$

Тогда собственными числами матрицы Z будут числа:

$$\frac{d_1^{(1)} + d_2^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_1^{(1)} + d_2^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_1^{(1)} d_2^{(1)} - d_1^{(2)} d_2^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_3^{(1)} + d_n^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_3^{(1)} d_n^{(1)} - d_3^{(2)} d_n^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\ldots,$$

$$\frac{d_{m+1}^{(1)} + d_{m+3}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+3}^{(1)}\right)^2 - 4\left(d_{m+1}^{(1)} d_{m+3}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)} d_{m+3}^{(2)}\right)}}{2},$$

$$d_{m+2}^{(1)} + d_{m+2}^{(2)},$$

если $n = 2m + 1$, и числа:

$$\frac{d_1^{(1)}+d_2^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_1^{(1)}+d_2^{(1)}\right)^2-4\left(d_1^{(1)}d_2^{(1)}-d_1^{(2)}d_2^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)}+d_n^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_3^{(1)}+d_n^{(1)}\right)^2-4\left(d_3^{(1)}d_n^{(1)}-d_3^{(2)}d_n^{(2)}\right)}}{2},$$

$$\ldots,$$

$$\frac{d_{m+1}^{(1)}+d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{\left(d_{m+1}^{(1)}+d_{m+2}^{(1)}\right)^2-4\left(d_{m+1}^{(1)}d_{m+2}^{(1)}-d_{m+1}^{(2)}d_{m+2}^{(2)}\right)}}{2},$$

если $n = 2m$.

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Zx = \lambda x$$

или, с учетом (15),

$$(GF_n^* D_1 F_n G^* + GF_n^* D_2 F_n G^* \mathcal{P}_n)x = \lambda x. \tag{16}$$

Как в доказательстве теоремы 2, будем искать вектор x в виде

$$x = GF_n^* y.$$

Подставляя (12) в (16), имеем

$$GF_n^* D_1 F_n G^* GF_n^* y + GF_n^* D_2 F_n G^* \mathcal{P}_n GF_n^* y = \lambda GF_n^* y.$$

Умножая это равенство слева на $F_n G^*$, получаем

$$(D_1 + D_2 F_n G^* \mathcal{P}_n GF_n^*)y = \lambda y.$$

Используя лемму, можем записать

$$\left(D_1 - \frac{1}{\mu} D_2 Q_2 W\right) y = \lambda y.$$

Матрица в левой части этого равенства выглядит так:

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon & & & & & \\
-\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} & & & & & \\
 & & d_3^{(1)} & & & & -\frac{1}{\mu}d_3^{(2)}\epsilon^{n-1} \\
 & & & d_4^{(1)} & & -\frac{1}{\mu}d_4^{(2)}\epsilon^{n-2} & \\
 & & & & \ddots\;\;⋰ & & \\
 & & & -\frac{1}{\mu}d_{n-1}^{(2)}\epsilon^3 & & d_{n-1}^{(1)} & \\
 & & -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 & & & & d_n^{(1)}
\end{array}\right).$$

Переставим ее строки и столбцы в следующем порядке: $1, 2, 3, n, 4, n-1, 5, n-2, \ldots$. В результате приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей различный вид для четных и нечетных n, а именно:

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_3^{(2)}\epsilon^{n-1} \\ -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus$$

$$\begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_{m+1}^{(2)}\epsilon^{m+2} \\ -\frac{1}{\mu}d_{m+3}^{(2)}\epsilon^m & d_{m+3}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \left(d_{m+2}^{(1)} - \frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^{m+1}\right),$$

если $n = 2m + 1$, и

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_3^{(2)}\epsilon^{n-1} \\ -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_{m+1}^{(2)}\epsilon^{m+1} \\ -\frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^m & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix},$$

если $n = 2m$.

Отсюда видно, что собственные значения составляют пары, первая из которых решает задачу на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$\lambda^2 - \left(d_1^{(1)} + d_2^{(1)}\right)\lambda + \left(d_1^{(1)}d_2^{(1)} - \frac{1}{\mu^2}d_1^{(2)}d_2^{(2)}\epsilon\right) = 0.$$

Отсюда получаем первые два собственных значения.

Остальные пары решают задачу на собственные значения для матриц:

$$\begin{pmatrix} d_j^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_j^{(2)}\epsilon^{n+2-j} \\ -\frac{1}{\mu}d_{n+3-j}^{(2)}\epsilon^{j-1} & d_{n+3-j}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

с характеристическими многочленами:

$$\lambda^2 - \left(d_j^{(1)} + d_{n+3-j}^{(1)}\right)\lambda + \left(d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(1)} - \frac{1}{\mu^2}d_j^{(2)}\epsilon^{n+2-j}d_{n+3-j}^{(2)}\epsilon^{j-1}\right) = 0, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

или

$$\lambda^2 - \left(d_j^{(1)} + d_{n+3-j}^{(1)}\right)\lambda + \left(d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(1)} - d_j^{(2)}d_{n+3-j}^{(2)}\right) = 0, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая четного n.

Если же $n = 2m + 1$, то добавляется еще одно собственное значение $\lambda = d_{m+2}^{(1)} - \frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^{m+1} = d_{m+2}^{(1)} - d_{m+2}^{(2)}\mu\epsilon^m = d_{m+2}^{(1)} + d_{m+2}^{(2)}$. □

Если $D_1 = 0$, то условия данной теоремы совпадают с условиями теоремы 2. Полагая $D_2 = D$, получаем формулы из п. 3.

6. Множество $\mathcal{L}_\phi$ при $\phi \neq \pm 1$

Покажем, что множество матриц $\mathcal{L}_\phi$, представимых в виде суммы теплицева и ганкелева ϕ-циркулянтов ($\phi \neq \pm 1$), не является алгеброй. Для этого приведем пример матрицы этого класса, квадрат которой не содержится в $\mathcal{L}_\phi$. Пусть H — ганкелев ϕ-циркулянт третьего порядка следующего вида:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Его квадрат является диагональной матрицей

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^2 \end{pmatrix},$$

которую представим как

$$H^2 = I_3 + K = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица I_3 является теплицевым ϕ-циркулянтом, т. е. содержится в $\mathcal{L}_\phi$. Предположим, что и матрица K принадлежит $\mathcal{L}_\phi$. Это означает, что верно соотношение

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \phi c & a & b \\ \phi b & \phi c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e & f \\ e & f & \phi d \\ f & \phi d & \phi e \end{pmatrix} \tag{17}$$

для некоторых чисел a, b, c, d, e и f. Приравнивая элементы во внедиагональных позициях первой строки и первого столбца, получим

$$\begin{cases} e = -b, \\ f = -c, \\ e = -\phi c, \\ f = -\phi b. \end{cases}$$

Из этих равенств следует, что

$$b = -e = \phi c = -\phi f = \phi^2 b$$

или $(1 - \phi^2)b = 0$. Так как $\phi \neq \pm 1$, то $b = 0$. Но тогда $b = e = c = f = 0$. Итак, если верно (17), то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi d \\ 0 & \phi d & 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы сначала в позиции (3,2), а затем в позиции (1,1), получаем $d = a = 0$. Следовательно, каждая из матриц в этом равенстве нулевая, что противоречит условию $\phi \neq \pm 1$.

7. Численные результаты

В заключение продемонстрируем выигрыш от применения выведенных формул на примере задачи вычисления собственных значений вещественного ганкелева циркулянта.

Используя систему Matlab, данную задачу можно решать следующими способами:

а) с помощью процедуры, реализующей метод Ланцоша с встроенной подпрограммой умножения матрицы на вектор. Особенности матрицы в этой подпрограмме не учитываются. (Данная процедура, составленная аспирантом Мичиганского университета Брайаном Муром (Brian Moore), взята с официального сайта системы Matlab: http://www.mathworks.com/matlabcentral/);

б) посредством той же процедуры, но с написанной авторами подпрограммой умножения ганкелева циркулянта на вектор (такое умножение очевидным образом сводится к задаче умножения теплицева циркулянта на вектор, решаемой с использованием быстрого преобразования Фурье);

в) используя Matlab-функцию *eig*, предназначенную для решения спектральных задач;

г) по описанным в статье формулам.

В таблице приведено время (в секундах), затрачиваемое при вычислении всех собственных значений каждым из перечисленных выше способов. Эффект применения найденных в данной статье формул очевиден.

Таблица. Численные результаты

n	Ланцош с встроенным умножением	Ланцош с быстрым умножением	Использование функции *eig*	Явные формулы
500	1.4775	1.4234	0.0330	0.0004
1000	13.9715	13.0954	0.2131	0.0012
2000	114.0137	106.2249	1.5650	0.0024
3000	387.0167	369.0992	4.4174	0.0050
4000	895.1097	840.9918	8.5287	0.0079
5000	1746.7000	1607.3000	18.2738	0.0146

Литература

1. **Bozzo E.** Algebras of higher dimension for displacement decompositions and computations with Toeplitz plus Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 1995. — Vol. 230. — P. 127–150.
2. **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — М: Наука, 1987.
3. **Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н.** Несколько замечаний о теплицевых и ганкелевых циркулянтах // Записки научных семинаров СПб отделения академии наук. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 334. — С. 121–127.

Поступила в редакцию 25 марта 2013 г.