

УДК 519.245, 519.676, 539.2

Решение стохастического уравнения Дарси на основе полиномиального разложения хаоса*

И.А. Шалимова, К.К. Сабельфельд

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: ias@osmf.sccc.ru (Шалимова И.А.), karl@osmf.sccc.ru (Сабельфельд К.К.)

Шалимова И.А., Сабельфельд К.К. Решение стохастического уравнения Дарси на основе полиномиального разложения хаоса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 313–327.

Настоящая работа посвящена решению смешанной краевой задачи для уравнения Дарси со случайным коэффициентом гидравлической проницаемости. В работе представлен подход, основанный на разложении полиномиального хаоса в вероятностном пространстве входных данных. Коэффициенты разложения полиномиального хаоса находятся методом стохастических коллокаций. Трудоемкость алгоритма определяется порядком приближения полиномиального хаоса и числом гармоник в разложении Кархунена–Лоэва. Для решения стационарного уравнения Дарси рассчитаны различные эйлеровы и лагранжевы статистические характеристики течения методом Монте-Карло и предложенным методом стохастических коллокаций. Сравнительные расчеты показывают существенный выигрыш в эффективности по сравнению с традиционным методом Монте-Карло.

DOI: 10.15372/SJNM20170307

Ключевые слова: *полиномиальный хаос, метод стохастических коллокаций, стационарное уравнение Дарси, метод Монте-Карло, разложение Кархунена–Лоэва.*

Shalimova I.A., Sabelfeld K.K. Solution to a stochastic Darcy equation by the polynomial chaos expansion // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 313–327.

This paper deals with the solution of a boundary value problem for the Darcy equation with a random hydraulic conductivity field. We use an approach based on the polynomial chaos expansion in the probability space of input data. We use the probabilistic collocation method to calculate the coefficients of the polynomial chaos expansion. A computational complexity of this algorithm is defined by the order of a polynomial chaos expansion and the number of terms in the Karhunen–Loève expansion. We calculate different Eulerian and Lagrangian statistical characteristics of the flow by the Monte Carlo and probabilistic collocation methods. Our calculations show a significant advantage of the probabilistic collocation method in comparison with the conventional direct Monte Carlo algorithm.

Keywords: *polynomial chaos, probabilistic collocation method, Darcy equation, Monte Carlo method, Karhunen–Loève expansion.*

1. Введение

Современные задачи физики, химии, биологии уже давно вышли за рамки классических постановок, если модель и описывается краевой задачей, то, как правило, включает случайные входные данные. Например, в полупроводниках используются модели, включающие диффузию дырок и электронов, их аннигиляцию, эффект туннелирования,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00083).

которые описываются нелинейным уравнением Смолуховского со случайными начальными распределениями электронов и дырок и стохастическим характером потенциалов попарного взаимодействия [8]. При решении задач о транспорте жидкости в пористых средах решается уравнение Дарси со случайным коэффициентом гидравлической проницаемости [4, 11].

Традиционный подход метода Монте-Карло основывается на конечно-разностных и конечно-элементных аппроксимациях исходной дифференциальной задачи с последующим численным ее решением на большом ансамбле реализаций входящего случайного поля. Это означает, что для нахождения требуемых характеристик потребуется многократно (десятки тысяч и более раз) решать краевую задачу, чтобы получить корректное усреднение. Поэтому трудоемкость этого подхода высока. В данной работе мы развиваем подход, основанный на использовании метода полиномиального хаоса, который позволяет существенно уменьшить трудоемкость алгоритма за счет уменьшения числа реализаций входящего поля.

Впервые броуновский процесс был связан с полиномами Эрмита в работе Винера [13]. Дальнейшие исследования в этом направлении установили связь между различными ортогональными полиномами и стохастическими процессами [5, 10, 12]. Тем самым ортогональные полиномы позволяют получать полиномиальное разложение случайного процесса в соответствующем вероятностном пространстве. Например, равномерному распределению соответствует разложение по полиномам Лежандра, для гамма распределений удобно использовать полиномы Лагерра. Именно это соответствие используется при решении краевых задач со случайными входными данными: полиномиальное разложение решения строится в вероятностном пространстве, задаваемом случайными входными данными [7, 14, 15]. В настоящей работе строится решение краевой задачи для уравнения Дарси со смешанными граничными условиями. Распределение коэффициента гидравлической проницаемости в уравнении Дарси задается логнормальным случайным полем. Для моделирования случайного входного поля используется разложение Кархунена-Лоэва (КЛ), определяемое в пространстве нормальных случайных величин, поэтому в полиномиальном разложении решения используются полиномы Эрмита, определенные как функции от нормальных случайных векторов.

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [11]. В [11] мы имели дело с уравнением Дарси, где коэффициент гидравлической проницаемости задается случайным логнормальным распределением с заданной корреляционной функцией экспоненциального вида, для которой задача на собственные значения имеет полуаналитические представления [3, 6]. Следует отметить, что в литературе наиболее часто рассматривается именно такой случай, когда имеются точные представления для разложения КЛ. В данной работе предложено использовать численное построение решения задачи на собственные значения и находить m первых собственных чисел и собственных функций без решения полной задачи на собственные значения. Такой подход позволяет существенно расширить область применения метода полиномиального хаоса. Однако и такой подход нельзя считать универсальным, поскольку здесь мы сталкиваемся с проблемой размерности. Действительно, даже в двумерном случае, для больших областей и малого шага сетки традиционными методами решить задачу на собственные значения затруднительно из-за размерности матрицы, аппроксимирующей корреляционную функцию. В этом случае в [9] предложено использовать рандомизированные методы. В данной работе частичная проблема на собственные значения решается численно для случая, когда гидравлическая проницаемость задается случайным логнормальным распределением с корреляционной функцией гауссовского вида.

Кроме того, в данной работе, на основе полиномиального разложения, вычисляется не только поле потенциала, но и поле скоростей Дарси, для которого построено свое разложение в полиномиальный хаос и найден вид коэффициентов разложения. Такой подход позволил построить экономичные методы для моделирования лагранжевых траекторий и вычисления статистических характеристик движения. Действительно, найденные один раз коэффициенты разложения полиномиального хаоса для решения гидравлического потенциала или эйлера поля скоростей Дарси, позволяют затем строить реализации полей, используя моделирующие формулы, вычислять функционалы от решения, различные характеристики распределения, в том числе моделировать движение жидких частиц, т.е. находить эйлеровы и лагранжевы статистические характеристики, не решая исходную дифференциальную задачу. В работе рассчитаны средние продольные смещения лагранжевых частиц, продольный и поперечный коэффициенты корреляций лагранжевых скоростей, а также коэффициенты диффузии.

2. Постановка задачи

В прямоугольнике $L_x \times L_y = D$ рассматривается краевая задача для уравнения Дарси:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial y} v(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in D, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u} = (u, v)^\top$, u — продольная и v — поперечная скорости Дарси. По определению

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{x}, \omega) \nabla \phi(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.2)$$

где $K(\mathbf{x}, \omega)$ — коэффициент гидравлической проницаемости — заданное случайное поле, ϕ — гидравлический потенциал.

На верхней и нижней границах заданы краевые условия Неймана для гидравлического потенциала ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, L_y) = 0, \quad x \in (0, L_x), \quad (2.3)$$

а на левой и правой границах — условия Дирихле:

$$\phi(0, y) = g_l(y), \quad \phi(L_x, y) = g_r(y), \quad y \in (0, L_y). \quad (2.4)$$

Для численного решения задачи (2.1)–(2.4) была применена консервативная конечно-разностная схема с равномерным шагом (см., например, [1]). А именно, в области D на равномерной сетке $x_i = (i-1)h_x$, $i = 1, \dots, N_x$, $h_x = L_x/n_x$; $y_j = (j-1)h_y$, $j = 1, \dots, N_y$, $h_y = L_y/n_y$, и соответственно $x_{i+1/2} = x_i + h_x/2$, $i = 1, \dots, n_x$; $y_{j+1/2} = y_j + h_y/2$, $j = 1, \dots, n_y$, где $n_x = N_x - 1$, $n_y = N_y - 1$, имеем:

$$\frac{u_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j}}{h_x} + \frac{v_{i, j+1/2} - v_{i, j-1/2}}{h_y} = 0, \quad i = 2, \dots, n_x, \quad j = 2, \dots, n_y; \quad (2.5)$$

$$\frac{u_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j}}{h_x} + \frac{2v_{i, j+1/2}}{h_y} = 0, \quad i = 2, \dots, n_x, \quad j = 1; \quad (2.6)$$

$$\frac{u_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j}}{h_x} - \frac{2v_{i, j-1/2}}{h_y} = 0, \quad i = 2, \dots, n_x, \quad j = N_y; \quad (2.7)$$

$$\phi_{1, j} = g_{l, j}, \quad \phi_{N_x, j} = g_{r, j}, \quad j = 1, \dots, N_y. \quad (2.8)$$

Компоненты скорости в точках $(x_{i+1/2}, y_j)$ и $(x_i, y_{j+1/2})$ аппроксимировались по формулам:

$$u_{i+1/2,j} = K_{i+1/2,j} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h_x}, \quad i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, N_y; \quad (2.9)$$

$$v_{i,j+1/2} = K_{i,j+1/2} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h_y}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, n_y, \quad (2.10)$$

здесь ϕ_{ij} , u_{ij} , v_{ij} , $K_{i+1/2,j}$ обозначают значения соответствующих функций в узлах сетки (x_i, y_j) и $(x_{i+1/2}, y_j)$.

Подставляя представления для продольных и поперечных скоростей (2.9), (2.10) в уравнения (2.5)–(2.8), несложно получить систему линейных алгебраических уравнений размерности $N_x N_y \times N_x N_y$ относительно неизвестного вектора решений $\vec{\phi}$, определенного во всех узлах области D и имеющего размерность $N_x N_y$. В силу громоздкости полученная разреженная матрица не приводится, обозначим ее L_h и будем использовать операторную форму записи

$$L_h \vec{\phi} = \vec{b}, \quad \vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_{N_x N_y})^\top. \quad (2.11)$$

Данная схема имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным. Для ее эффективного решения, как и в работе [11], мы применили прямой метод решения систем с разреженными матрицами на основе пакета PARDISO (Intel® Math Kernel Library).

В рассматриваемой задаче (2.1)–(2.4) коэффициент гидравлической проницаемости $K(\mathbf{x}, \omega)$ — случайное поле с логнормальным распределением, т. е.

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = \ln(K(\mathbf{x}, \omega)). \quad (2.12)$$

Гауссовское случайное поле $Y(\mathbf{x}, \omega)$ имеет нулевое среднее и заданную корреляционную функцию. В данной работе выбраны два варианта корреляционных функций: экспоненциального типа

$$C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_Y^2 \exp(-|x_1 - y_1|/\eta_1 - |x_2 - y_2|/\eta_2) \quad (2.13)$$

и гауссовского типа

$$C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_Y^2 \exp(-|x_1 - y_1|^2/\lambda_x^2 - |x_2 - y_2|^2/\lambda_y^2). \quad (2.14)$$

Здесь σ_Y^2 — дисперсия, а η_1 , η_2 , λ_x , λ_y — соответствующие корреляционные длины случайного поля $Y(\mathbf{x}, \omega)$.

Для моделирования коэффициента гидравлической проницаемости $K(\mathbf{x}, \omega)$ мы использовали разложение Кархунена–Лоэва. Для этого необходимо решить задачу отыскания собственных значений λ_n и функций $f_n(\mathbf{x})$ для корреляционной функции $C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\int_D C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_n f_n(\mathbf{y}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

с учетом условия ортонормированности

$$\int_D f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}, \quad n, m \geq 1. \quad (2.16)$$

Тогда корреляционную функцию $C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно разложить в ряд по собственным функциям:

$$C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(\mathbf{x}) f_n(\mathbf{y}), \quad (2.17)$$

а для случайного поля Y имеет место разложение Кархунена–Лоэва:

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

где $\xi_n(\omega)$ — семейство независимых стандартных нормальных величин.

Для корреляционной функций (2.14) собственные функции и числа находились численно. Для случая же корреляционной функции экспоненциального типа (2.13) известны [3] полуявные представления собственных значений

$$\lambda_n = \frac{2\eta_1\sigma_Y^2}{(\eta_1^2 w_i^2 + 1)} \frac{2\eta_2\sigma_Y^2}{(\eta_2^2 w_j^2 + 1)} \quad (2.19)$$

и собственных функций

$$f_n(\mathbf{x}) = b_{ij}(\eta_1 w_i \cos(w_i x) + \sin(w_i x))(\eta_2 w_j \cos(w_j y) + \sin(w_j y)), \quad (2.20)$$

где $\mathbf{x} = (x, y)$, а элементы последовательностей w_i, w_j являются корнями характеристических уравнений:

$$(\eta_1^2 w_i^2 - 1) \sin(w_i L_x) = 2\eta_1 w_i \cos(w_i L_x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

и

$$(\eta_2^2 w_j^2 - 1) \sin(w_j L_y) = 2\eta_2 w_j \cos(w_j L_y), \quad j = 1, 2, \dots$$

Последовательность собственных чисел λ_n должна быть невозрастающей, в соответствии с этим критерием для каждого n из (2.19) находятся индексы i, j . Последовательность собственных функций $f_n(\mathbf{x})$ формируется в соответствии с уже полученным порядком сочетаний индексов i и j .

Коэффициент b_{ij} определяется из условия ортонормированности собственных функций (2.16) и равен

$$b_{ij} = ((\eta_1^2 w_i^2 + 1)L_x/2 + \eta_1)^{-1/2} ((\eta_2^2 w_j^2 + 1)L_y/2 + \eta_2)^{-1/2}.$$

Хорошо известно [3, 5], что разложение по собственным функциям является наилучшим приближением в среднеквадратическом смысле. В алгоритме используется конечное число мод разложения Кархунена–Лоэва. Оценим погрешность, возникающую при замене ряда конечной суммой длины N .

Обозначим

$$Y_N(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{k=1}^N \xi_k \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{x}), \quad (2.21)$$

тогда, в силу независимости ξ_k и условия ортонормированности (2.16), среднеквадратическая погрешность остаточного члена имеет вид

$$\varepsilon = E\|Y(\mathbf{x}, \xi) - Y_N(\mathbf{x}, \xi)\|^2 = \sum_{m,k=N+1}^{\infty} E[\xi_k \xi_m] \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_m} \int_D f_k(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k.$$

Последнее равенство, в частности, показывает, что чем быстрее убывают собственные числа, тем меньшее количество мод N в разложении Кархунена–Лоэва потребуется для описания Y_N . Перепишем равенство (2.17) для дисперсии σ_Y^2 (т. е. положим $\mathbf{x} = \mathbf{y}$) и проинтегрируем обе части равенства по области D . Тогда, с учетом ортонормированности собственных функций, получим

$$L_x L_y \sigma_Y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \quad (2.22)$$

Следовательно, число слагаемых разложения N можно выбрать так, например, чтобы выполнялось условие

$$0.9 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \approx \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (2.23)$$

Формула (2.22) позволяет вычислить сумму всех собственных значений. Согласно критерию (2.23), можно определить количество собственных значений, достаточное для достижения относительной среднеквадратической погрешности порядка 10%. Именно этим соотношением определяется количество гармоник. Большее число гармоник N в разложении Кархунена–Лоэва увеличивает число слагаемых P в полиномиальном разложении и тем самым повышает трудоемкость алгоритма. Поэтому в алгоритме выбирается число гармоник, минимально достаточное для обеспечения заданной среднеквадратической погрешности.

2.1. Полиномиальное разложение хаоса

В данном пункте рассматривается разложение гидравлического потенциала ϕ по полиномам Эрмита в вероятностном пространстве, задаваемом коэффициентом гидравлической проницаемости $K(\mathbf{x}, \xi)$. В этом случае приближение $\hat{\phi}$ имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = & a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}(\mathbf{x}) H_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) H_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{x}) H_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) + \dots, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где коэффициенты a_i — неизвестные детерминированные функции, зависящие от пространственной координаты \mathbf{x} , $H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))$ — полиномы Эрмита порядка d , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))$ — вектор независимых стандартных нормальных величин размерности d ,

$$H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega)) = (-1)^d \exp\left(\frac{\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\xi}}{2}\right) \frac{\partial^d}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_d}} \left[\exp\left(\frac{\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\xi}}{2}\right) \right].$$

Мы будем использовать конечное число слагаемых разложения (2.24) и представление

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{j=1}^P c_j(\mathbf{x}) \Psi_j(\xi), \quad (2.25)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ — вектор независимых стандартных нормальных величин размерности N . Для функций $\Psi_j(\xi)$ в (2.25) существует однозначное соответствие с функциями $H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))$ из (2.24). Общее число слагаемых P определяется размерностью N — числа слагаемых в разложении Кархунена–Лоэва и порядком разложения полиномиального хаоса d :

$$P = \frac{(N+d)!}{N!d!}. \quad (2.26)$$

Например, для второго порядка разложения полиномиального хаоса $d = 2$ приближение (2.24) имеет вид

$$\widehat{\phi}(\mathbf{x}, \xi) = a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{x})\xi_i + \sum_{i=1}^N a_{ii}(\mathbf{x})(\xi_i^2 - 1) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j, \quad (2.27)$$

и функции $\Psi_j(\xi)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 1, & \Psi_{i+1} &= \xi_i, & i &= 1, \dots, N, \\ \Psi_{i+1+N} &= \xi_i^2 - 1, & i &= 1, \dots, N, \\ \Psi_{2N+i+j} &= \xi_i\xi_j, & i &= 1, \dots, N-1, & i < j &\leq N. \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов разложения полиномиального хаоса $c_j(\mathbf{x})$ в (2.25) традиционно используются либо проекционные методы типа Галеркина, либо метод коллокаций [5]. В данной работе реализован стохастический метод коллокаций.

2.2. Стохастический метод коллокаций

Воспользуемся разложением Кархунена–Лозва для случайного поля коэффициента проницаемости K , выберем его N первых слагаемых, подставим в уравнение Дарси и запишем уравнение в общем виде с учетом стоков или источников $g(\mathbf{x})$:

$$\nabla \left\{ \exp \left[\sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \xi_n \right] \nabla \phi(\mathbf{x}, \omega) \right\} = g(\mathbf{x}).$$

Определим невязку R для $\widehat{\phi}$ следующим образом:

$$R(c_1, \dots, c_P; \xi) = \nabla \left\{ \exp \left[\sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \xi_n \right] \nabla \widehat{\phi}(\mathbf{x}, \xi) \right\} - g(\mathbf{x}).$$

Тогда неизвестные коэффициенты $c_i(\mathbf{x})$ полиномиального разложения (2.25) находятся из требования равенства нулю усредненного с некоторым весом W_j значения невязки, т. е. из условия

$$\int_{R^N} R(c_1, \dots, c_P; \mathbf{z}_\xi) W_j(\mathbf{z}_\xi) p(\mathbf{z}_\xi) d\mathbf{z}_\xi = 0, \quad (2.28)$$

где $p(\mathbf{z}_\xi)$ — плотность совместного распределения вектора стандартных нормальных величин ξ . Веса в методе коллокаций определяются выражением

$$W_j(\xi) = \delta(\xi - \xi_j^{\text{col}}), \quad j = 1, \dots, P,$$

где ξ_j^{col} — множество частных значений вектора ξ , так называемые точки коллокаций. Подставляя веса в (2.28) и решая полученное уравнение с использованием (2.11), находим P реализаций поля решений $\widehat{\phi}$. Осталось составить систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов c_1, \dots, c_P :

$$\mathbf{Z}C(\mathbf{x}) = \widehat{\Phi}(\mathbf{x}, \xi^{\text{col}}), \quad (2.29)$$

здесь $C = (c_1, \dots, c_P)$ — вектор искомых коэффициентов, $Z_{ij} = \Psi_j(\xi_i^{\text{col}})$ — элементы не зависящей от пространственных переменных матрицы \mathbf{Z} размерности $P \times P$, состоящей из полиномов Эрмита, и $\widehat{\Phi}$ — вектор решений размерности P , вычисленный в точках коллокаций.

Кроме самого гидравлического потенциала ϕ , в задачах часто требуются значения скоростей Дарси, поэтому выпишем формулы для вычисления скоростей. По определению продольная и поперечная составляющие (2.2) имеют вид

$$\mathbf{u} = (u, v)^\top = K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \nabla \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

На основе полученного приближения для $\hat{\phi}$ несложно получить аналогичные приближения для компонент скорости Дарси [11]:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^P \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) a_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \\ &= \sum_{k=1}^P \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \sum_{i=1}^P Z_{ki}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \sum_{j=1}^P Z_{ij}(\boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \frac{\partial c_j}{\partial x}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^P \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) b_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \\ &= \sum_{k=1}^P \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \sum_{i=1}^P Z_{ki}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \sum_{j=1}^P Z_{ij}(\boldsymbol{\xi}^{\text{col}}) \frac{\partial c_j}{\partial y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Очевидно, что все коэффициенты разложения a_j , b_j , c_j существенно зависят от выбора точек коллокаций. В данной работе они находятся по аналогии с квадратурами Гаусса, а именно: для приближения полиномами Эрмита порядка d используются корни полинома порядка $d+1$ (см. [2, 16]), причем корни выстраиваются в порядке уменьшения вероятности их выбора. При таком упорядочивании точка коллокации $\boldsymbol{\xi}_i^{\text{col}} = (0, \dots, 0)$ содержит “наиболее вероятные корни”. Кроме того, точки коллокаций необходимо выбрать так, чтобы векторы $\Psi_j(\boldsymbol{\xi}_i^{\text{col}})$ были линейно независимы. Последнее обеспечивает обратимость матрицы \mathbf{Z} в (2.29) при нахождении коэффициентов $c_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}})$, $a_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}})$ и $b_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{\text{col}})$.

3. Численные результаты

В этом пункте представлены результаты численной реализации метода стохастических коллокаций для нахождения различных статистических параметров решения¹. Для сравнительного анализа все полученные параметры вычислялись также на основе метода Монте-Карло.

Численные расчеты выполнялись в квадрате $L_x \times L_y$ размера $L_x = L_y = 10$ с равномерным шагом $h_x = h_y = 0.125$ либо $h_x = h_y = 0.25$. На верхней и нижней границах поставлено условие непротекания, а на левой и правой границах для потенциала взяты значения $\phi = 10.0$ и $\phi = 15.0$ соответственно. Предполагалось отсутствие источников и стоков, $g(x) = 0$.

В качестве проверки консервативности схемы убедимся, что уравнение неразрывности для выбранной конечно-разностной схемы удовлетворяется с высокой точностью. Определим усредненную на отрезке $[0, L_y]$ продольную скорость как

$$U_x(x) = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} u(x, y) dy.$$

Нетрудно проверить, что для задачи (2.1)–(2.4) функция U_x является константой. Для численной проверки этого факта мы воспользовались квадратурной формулой трапеций и подсчитали конечно-разностное приближение функции U_x по формуле

¹Расчеты выполнялись с использованием Сибирского суперкомпьютерного центра СО РАН

$$U_{h,i} = \frac{1}{L_y} \left(\frac{h_y}{2} u_{i+1/2,1} + \sum_{j=2}^{N_y-1} h_y u_{i+1/2,j} + \frac{h_y}{2} u_{i+1/2,N_y} \right), \quad i = 1, \dots, N_x - 1.$$

Оказалось, что это свойство для $U_{h,i}$, где $i = 1, \dots, N_x - 1$, выполняется с высокой точностью, значения $U_{h,i}$ варьируются в пределах 10^{-5} при шаге $h = 0.25$.

Число слагаемых N в разложении Кархунена–Лоэва, необходимое для построения полиномиального разложения, определяется скоростью убывания собственных чисел λ_i задачи (2.15) и в соответствии с (2.22), (2.23). В случае, когда коэффициент гидравлической проницаемости $K(\mathbf{x}, \omega)$ — логнормальное случайное поле с заданными средним $\langle Y \rangle = 0$ и корреляционной функцией экспоненциального вида

$$C_Y = \sigma_y^2 \exp(-|x_1 - y_1|/\eta_1 - |x_2 - y_2|/\eta_2)$$

с параметрами $\eta_1 = \eta_2 = 4.0$, $\sigma_y = 1.0$, собственные значения λ_n и функции f_n были найдены численно из уравнений (2.19), (2.20). На рисунке 3.1 приведены графики корреляционной функции $C_Y(x)$, где $x = x_1 - x_2$, $x \in [0, L_x]$, $y_1 = y_2 = 5.0$, откуда можно сравнить аналитическое представление с разложением (2.17) КЛ для разного числа гармоник: $N = 13$ и $N = 100$.

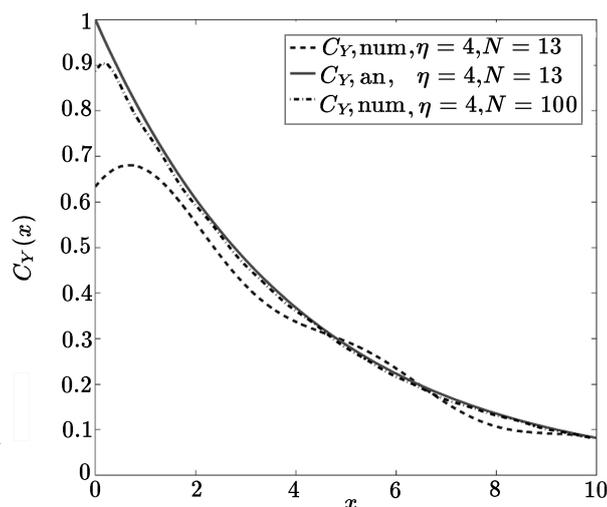


Рис. 3.1. Корреляционная функция C_Y для разного числа гармоник N

Для указанного распределения коэффициента $K(\mathbf{x}, \xi)$ достаточно $N = 6$ гармоник в разложении Кархунена–Лоэва и приближения второго порядка $d = 2$ для нахождения гидравлического потенциала ϕ . В этом случае для вычисления коэффициентов разложения c_j система линейных уравнений, аппроксимирующих уравнение Дарси, решалась $P = 28$ раз. Далее поле потенциала $\hat{\phi}$ моделировалось по формуле

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^P c_j(\mathbf{x}, \xi^{\text{col}}) \Psi_j(\xi),$$

и вычислялись требуемые средние по ансамблю реализаций. Средние и дисперсия гидравлического потенциала, полученные методом Монте-Карло и с помощью полиномиального разложения, находятся в хорошем соответствии [11], однако для определения пространственных производных или скоростей Дарси данного уровня разложения полиномиального хаоса недостаточно. Поэтому в разложение были добавлены члены более

высокого порядка, а именно: $d = 4$ и $N = 13$. В этом случае $P = 2380$, что приближается к числу реализаций в методе Монте-Карло, и алгоритм становится трудоемким. Однако численные результаты показывают [11], что достаточно выбрать $P = 521$ и не учитывать слагаемые полиномиального разложения, содержащие смешанные произведения величин ξ_j^{col} высоких порядков. Действительно, из алгоритма выбора точек коллокаций видно, что вероятность равенства нулю указанных слагаемых близка к единице. Последнее обстоятельство и позволяет уменьшить число P , не ухудшая качества приближения.

Ниже приведены результаты моделирования скоростей Дарси для логнормального случайного поля $K(\mathbf{x}, \omega)$ с распределением (2.12):

$$C_Y = \sigma_y^2 \exp(-(x_1 - y_1)^2/\lambda_x^2 - (x_2 - y_2)^2/\lambda_y^2)$$

с нулевым средним $\langle Y \rangle = 0$ и коэффициентами $\lambda_x = \lambda_y = 6.59$, что соответствует длине корреляций порядка $L \approx 10.0$; дисперсия выбиралась $\sigma_Y = 1.0$. В этом случае собственные числа λ_i и собственные функции находились численно на основе проекционных методов [9].

На следующих двух графиках, рис. 3.2, показана $\langle u(\mathbf{x}, \omega) \rangle = \langle K(\mathbf{x}, \omega) \partial \phi / \partial x \rangle$ — средняя продольная скорость как функция координат x, y в области D , полученная методом коллокаций (слева), и (справа) график относительной разности средних продольных скоростей, полученных методом коллокаций (u_{ch}) и методом Монте-Карло (u_{mc}), т.е. $\epsilon = |\langle u_{\text{ch}}(\mathbf{x}, \omega) \rangle - \langle u_{\text{mc}}(\mathbf{x}, \omega) \rangle| / \langle u_{\text{mc}}(\mathbf{x}, \omega) \rangle$. Из последнего графика видно, что относительная разность не превосходит 1%. Заметим, что в методе Монте-Карло число гармоник было выбрано $N = 100$ и статистика $N_{\text{st}} = 10^5$, в то время как в полиномиальном разложении $N = 13$ и система уравнений (2.11) решалась $P = 521$ раз. Среднее поле $\langle u(\mathbf{x}, \omega) \rangle$, вычисленное на основе полиномиального разложения, лежит в доверительном интервале для средней продольной скорости, полученной методом Монте-Карло, и равным $2.3 \cdot 10^{-2}$.

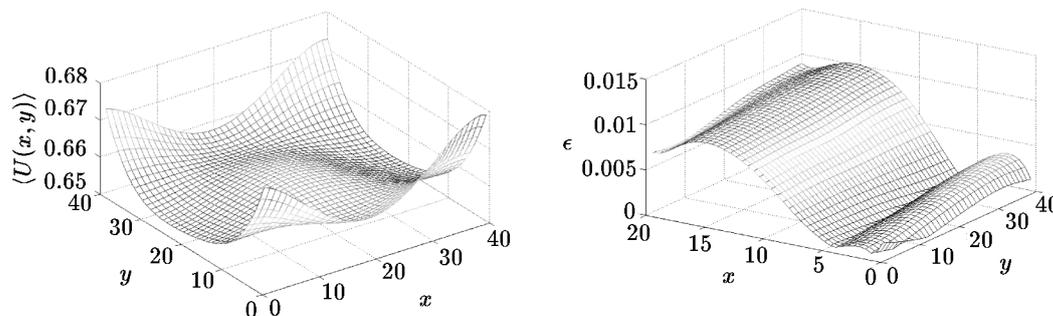


Рис. 3.2. Среднее значение продольной скорости $u_{\text{ch}}(\mathbf{x}, \omega)$, полученное методом коллокаций (слева), и относительная разность средних полей скоростей $u_{\text{ch}}(\mathbf{x}, \omega)$ и $u_{\text{mc}}(\mathbf{x}, \omega)$ (справа)

На следующих графиках получены различные лагранжевы характеристики движения в предположении, что частицы выходят из точки \mathbf{x}_0 с координатами $(4.0h_x, 0.5L_y)$ и движутся вдоль траектории $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$ с лагранжевой скоростью

$$\mathbf{U}(t; \mathbf{x}_0) = (U(t; \mathbf{x}_0), V(t; \mathbf{x}_0)) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)).$$

По определению

$$\frac{d\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)), \quad t > 0; \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.1)$$

Для численной реализации была использована схема Эйлера:

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \Delta t$$

с шагом интегрирования $\Delta t = h^2$. Для вычисления значений вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0))$ во внутренних точках ячеек $h \times h$ мы использовали билинейную аппроксимацию.

Обозначим продольную лагранжеву координату $X_L(t; \mathbf{x}_0)$ и поперечную $Y_L(t; \mathbf{x}_0)$, где $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Тогда среднее продольное смещение есть $\langle \Delta X_L(t; \mathbf{x}_0) \rangle$, а дисперсия — $\langle X_L'^2(t; \mathbf{x}_0) \rangle$, где $X_L' = X_L - \langle X_L \rangle$. На рис. 3.3 показаны средние продольные смещения лагранжевых частиц. Хорошо видно, что они подчиняются линейному закону, что подтверждает тот факт, что средние лагранжевы продольные скорости становятся независимыми от времени.

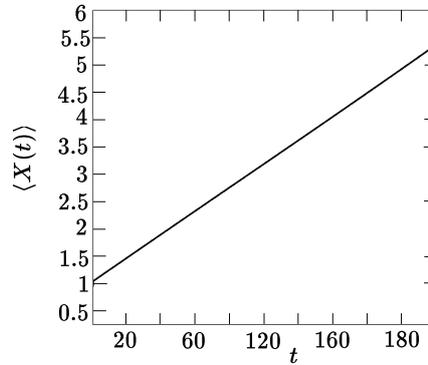


Рис. 3.3. Средние продольные смещения лагранжевых частиц

Определим коэффициенты корреляций лагранжевых скоростей для продольной составляющей

$$R_1(t; x_0, y_0) = \frac{\langle U'(t; x_0, y_0)U'(0; x_0, y_0) \rangle}{(\langle U'^2(t; x_0, y_0) \rangle \langle U'^2(0; x_0, y_0) \rangle)^{1/2}}, \quad U' = U - \langle U \rangle, \quad (3.2)$$

и поперечной составляющей

$$R_2(t; x_0, y_0) = \frac{\langle V'(t; x_0, y_0)V'(0; x_0, y_0) \rangle}{(\langle V'^2(t; x_0, y_0) \rangle \langle V'^2(0; x_0, y_0) \rangle)^{1/2}}, \quad V' = V - \langle V \rangle. \quad (3.3)$$

На рис. 3.4 изображены функции R_1 и R_2 , полученные на основе полиномиального разложения (ch) и методом Монте-Карло (mc). На графиках видна небольшая разница, связанная с недостаточным количеством реализаций в методе Монте-Карло, $N_{st} = 10^5$.

Наконец, на рис. 3.5 показаны средние продольный и поперечный коэффициенты диффузии как функции от времени. По определению средний продольный коэффициент диффузии $k(t; x_0, y_0)$ имеет вид:

$$k_1(t; x_0, y_0) = \frac{1}{2} \frac{d \langle X_L'^2(t; x_0, y_0) \rangle}{dt} = \langle X_L'(t; x_0, y_0)U'(t; x_0, y_0) \rangle,$$

а поперечный —

$$k_2(t; x_0, y_0) = \langle Y_L'(t; x_0, y_0)V'(t; x_0, y_0) \rangle, \quad Y_L' = Y_L - \langle Y_L \rangle.$$

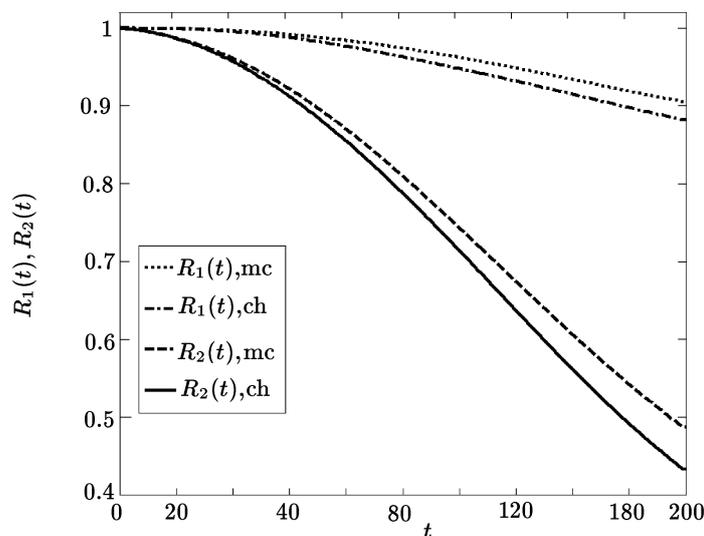


Рис. 3.4. Коэффициенты корреляций лагранжевых скоростей: продольный R_1 и поперечный R_2

Численные результаты соответствуют $d = 4$ и $N = 13$ гармоникам в разложении Кархунена–Лоэва. Общее число слагаемых в разложении хаоса $P = 521$. Для метода Монте-Карло $N = 100$ и $N_{st} = 10^5$ соответственно.

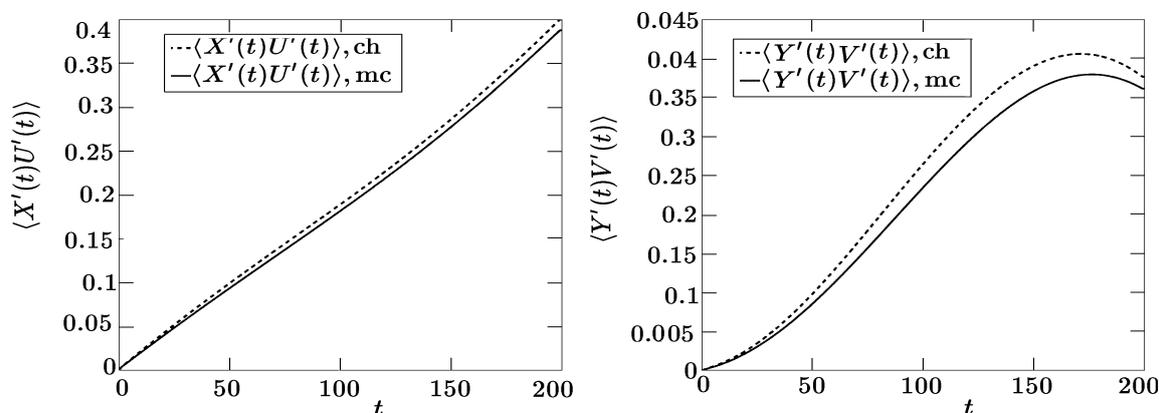


Рис. 3.5. Средние продольный и поперечный коэффициенты диффузии, найденные методом Монте-Карло (mc) и стохастическим методом коллокаций (ch)

Заметим еще раз, что при получении всех численных статистических характеристик на основе полиномиального разложения, мы использовали единожды подсчитанные коэффициенты разложения a_j , b_j , c_j . После чего, основываясь на моделирующих формулах (2.25), (2.30), (2.31), строились реализации соответствующих случайных полей и вычислялись требуемые статистические характеристики движения жидких частиц. При необходимости можно менять начальные распределения частиц, концентрации, шаги по времени, вычислять новые функционалы, используя те же самые коэффициенты разложения a_j , b_j , c_j . Что касается метода Монте-Карло, то для всех перечисленных изменений потребуется заново решать уравнение Дарси с соответствующими изменениями параметров и находить требуемые характеристики движения на каждой реализации поля.

4. Заключение и обсуждение

В работе исследуется метод разложения полиномиального хаоса для решения уравнения Дарси, когда коэффициент гидравлической проницаемости K задается в виде случайного логнормального распределения. Следует отметить, что в литературе хорошо изучен случай, когда поле K задается аналитически в виде разложения Кархунена–Лоэва. Обычно корреляционная функция при этом имеет экспоненциально спадающий вид. На практике, однако, корреляционная функция определяется из измерений и может иметь достаточно произвольный вид. Поэтому в данной работе мы используем иной подход, когда разложения Кархунена–Лоэва строятся численно. Мы подробно исследуем случай корреляционной функции гауссовского типа. В этом случае аналитического разложения нет, разложение Кархунена–Лоэва строится численно на основе рандомизированного проекционного метода. Это существенно расширяет область приложения метода. Построенное разложение в полиномиальный хаос эйлера поля скоростей позволило найти лагранжевы статистические характеристики: средние продольные смещения лагранжевых частиц, продольный и поперечный коэффициенты корреляций лагранжевых скоростей, а также средние продольный и поперечный коэффициенты диффузии.

Следует отметить, что общий метод полиномиального хаоса имеет ограничения независимо от того, используется аналитическое или численное построение разложения Кархунена–Лоэва: он эффективен в задачах, в которых корреляции случайных входных данных спадают не очень быстро. Например, в рассматриваемом случае пространственных корреляций это означает, что длина корреляций не должна быть заметно меньше диаметра области. В противном случае для корректного описания входных данных требуется большое количество гармоник в разложении Кархунена–Лоэва, что в свою очередь увеличивает количество слагаемых в полиномиальном разложении, и задача определения коэффициентов разложения становится сравнимой по трудоемкости с прямым методом статистического моделирования. В частном экстремальном случае, для моделирования белого шума, нам потребовалось более 200 гармоник в разложении КЛ. В этом случае, даже для второго порядка разложения в полиномиальный хаос, потребуется определить 20301 коэффициент, т.е. решить исходную задачу 20301 раз. Такая задача по трудоемкости становится сравнимой с прямым моделированием на основе метода Монте-Карло.

Литература

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Dian-Qing Lirx, Shui-Hua Jianga, Yong-Gang Chengb, and Chuang-Bing Zhouc A comparative study of three collocation point methods for odd order stochastic response surface method // Structural Engineering and Mechanics. — 2013. — Vol. 45, № 5. — P. 595–611. — DOI: 10.12989/sem.2013.45.5.595.
3. Ghanem, R.G., Spanos P. Stochastic Finite Element: A Spectral Approach. — New York: Springer, 1991.
4. Kurbanmuradov O.A., Sabelfeld K.K. Stochastic flow simulation and particle transport in a 2D layer of random porous medium // Transport in Porous Medium. — 2010. — Vol. 85. — P. 347–373. — DOI: 10.1007/s11242-010-9567-y.
5. Le Maitre O.P., Knio O.M. Spectral Methods for Uncertainty Quantification: with Applications to Computational Fluid Dynamics. — Houten, Netherlands: Springer, 2010.

6. **Li H., Zhang D.** Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods // *Water Resources Research*. — 2007. — Vol. 43, W09409. — DOI: 10.1029/2006WR005673.
7. **Muller F., Jenny P., and Meyer D.W.** Probabilistic collocation and lagrangian sampling for advective tracer transport in randomly heterogeneous porous media // *Advances in Water Resources*. — 2011. — Vol. 34, № 12. — P. 1527–1538. — DOI: 10.1016/j.advwatres.2011.09.005.
8. **Sabelfeld K.K., Brandt O., and Kaganer V.M.** Stochastic model for the fluctuation-limited reaction-diffusion kinetics in inhomogeneous media based on the nonlinear Smoluchowski equations // *J. Math. Chemistry*. — 2015. — Vol. 53, iss. 2. — P. 651–669. — DOI: 10.1007/s10910-014-0446-6.
9. **Sabelfeld K.K., Mozartova N.S.** Sparsified Randomization algorithms for low rank approximations and applications to integral equations and inhomogeneous random field simulation // *Math. Comput. Simul.* — 2011. — Vol. 82. — P. 295–317. — DOI: 10.1016/j.matcom.2011.08.002.
10. **Schoutens W.** *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. — Springer, 2000.
11. **Shalimova I., Sabelfeld K.** Stochastic polynomial chaos based algorithm for solving PDS with random coefficients // *Monte Carlo Methods and Applications*. — 2014. — Vol. 20, iss. 4. — P. 279–289. — DOI: 10.1515/mcma-2014-0006.
12. **Thomas Y., Hou W.L., Rozovskii B., and Zhou H.-M.** Wiener Chaos expansions and numerical solutions of randomly forced equations of fluid mechanics // *J. of Computational Physics*. — 2006. — Vol. 216. — P. 687–706. — DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.008.
13. **Wiener N.** The homogenous chaos // *Amer. J. Math.* — 1938. — Vol. 60, № 4. — P. 897–936. — DOI: 10.2307/2371268.
14. **Xiu D., Lucor D., Su C.-H., and Karniadakis G.E.** Stochastic modeling of flow-structure interactions using generalized polynomial chaos // *J. Fluids Eng.* — 2001. — Vol. 124, № 1. — P. 51–59. — DOI: 10.1115/1.1436089.
15. **Xiu D.** Fast numerical methods for stochastic computations // *Commun. Comput. Phys.* — 2009. — Vol. 5, № 2–4. — P. 242–272. — (A Review). — DOI: 10.1137/040615201.
16. **Xiu D., Hesthaven J.S.** High-order collocation methods for differential equations with random inputs // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2006. — Vol. 27, № 3. — P. 1118–1139. — DOI: 10.1137/040615201.

*Поступила в редакцию 15 июля 2016 г.,
в окончательном варианте 23 ноября 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.** *Metody resheniya setochnykh uravneniy*. — M.: Nauka, 1978.
2. **Dian-Qing Lirx, Shui-Hua Jianga, Yong-Gang Chengb, and Chuang-Bing Zhouc** A comparative study of three collocation point methods for odd order stochastic response surface method // *Structural Engineering and Mechanics*. — 2013. — Vol. 45, № 5. — P. 595–611. — DOI: 10.12989/sem.2013.45.5.595.
3. **Ghanem, R.G., Spanos P.** *Stochastic Finite Element: A Spectral Approach*. — New York: Springer, 1991.
4. **Kurbanmuradov O.A., Sabelfeld K.K.** Stochastic flow simulation and particle transport in a 2D layer of random porous medium // *Transport in Porous Medium*. — 2010. — Vol. 85. — P. 347–373. — DOI: 10.1007/s11242-010-9567-y.

5. **Le Maitre O.P., Knio O.M.** Spectral Methods for Uncertainty Quantification: with Applications to Computational Fluid Dynamics. — Houten, Netherlands: Springer, 2010.
6. **Li H., Zhang D.** Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods // Water Resources Research. — 2007. — Vol. 43, W09409. — DOI: 10.1029/2006WR005673.
7. **Muller F., Jenny P., and Meyer D.W.** Probabilistic collocation and lagrangian sampling for advective tracer transport in randomly heterogeneous porous media // Advances in Water Resources. — 2011. — Vol. 34, № 12. — P. 1527–1538. — DOI: 10.1016/j.advwatres.2011.09.005.
8. **Sabelfeld K.K., Brandt O., and Kaganer V.M.** Stochastic model for the fluctuation-limited reaction-diffusion kinetics in inhomogeneous media based on the nonlinear Smoluchowski equations // J. Math. Chemistry. — 2015. — Vol. 53, iss. 2. — P. 651–669. — DOI: 10.1007/s10910-014-0446-6.
9. **Sabelfeld K.K., Mozartova N.S.** Sparsified Randomization algorithms for low rank approximations and applications to integral equations and inhomogeneous random field simulation // Math. Comput. Simul. — 2011. — Vol. 82. — P. 295–317. — DOI: 10.1016/j.matcom.2011.08.002.
10. **Schoutens W.** Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. — Springer, 2000.
11. **Shalimova I., Sabelfeld K.** Stochastic polynomial chaos based algorithm for solving PDS with random coefficients // Monte Carlo Methods and Applications. — 2014. — Vol. 20, iss. 4. — P. 279–289. — DOI: 10.1515/mcma-2014-0006.
12. **Thomas Y., Hou W.L., Rozovskii B., and Zhou H.-M.** Wiener Chaos expansions and numerical solutions of randomly forced equations of fluid mechanics // J. of Computational Physics. — 2006. — Vol. 216. — P. 687–706. — DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.008.
13. **Wiener N.** The homogenous chaos // Amer. J. Math. — 1938. — Vol. 60, № 4. — P. 897–936. — DOI: 10.2307/2371268.
14. **Xiu D., Lucor D., Su C.-H., and Karniadakis G.E.** Stochastic modeling of flow-structure interactions using generalized polynomial chaos // J. Fluids Eng. — 2001. — Vol. 124, № 1. — P. 51–59. — DOI: 10.1115/1.1436089.
15. **Xiu D.** Fast numerical methods for stochastic computations // Commun. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 5, № 2–4. — P. 242–272. — (A Review). — DOI: 10.1137/040615201.
16. **Xiu D., Hesthaven J.S.** High-order collocation methods for differential equations with random inputs // SIAM J. Sci. Comput. — 2006. — Vol. 27, № 3. — P. 1118–1139. — DOI: 10.1137/040615201.

