

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

В. Г. Баженов, Е. Г. Гоник, А. И. Кибец, Д. В. Шошин

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород
E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

С использованием метода конечных элементов и явной схемы интегрирования по времени типа “крест” решается задача об упругопластическом деформировании, потере устойчивости и закритическом поведении сферических оболочек. Рассматриваются задачи устойчивости полусферических оболочек при внешнем давлении и сжатии между жесткими плитами. Исследуется влияние отверстий и граничных условий на формоизменение оболочки. Показано, что полученные результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: сферическая оболочка, пластические деформации, критическая нагрузка, закритическое поведение, метод конечных элементов, эксперимент.

Введение. Проблема устойчивости и предельных состояний упругопластических сферических оболочек является одной из наиболее сложных и как следствие малоисследованных. Обзор работ, посвященных этой проблеме, приведен в [1–3]. Первые результаты математического моделирования теоретических и экспериментальных исследований устойчивости сферических оболочек опубликованы в начале XX в. Сопоставление экспериментально и теоретически полученных значений критических нагрузок для сферических куполов, находящихся под действием равномерного давления, показало их значительные различия, что обусловлено как несовершенными условиями экспериментов, так и неадекватностью математических моделей оболочки (несовершенство формы оболочки, наличие в ней начальных напряжений, неидеальность условий нагружения и закрепления, неоднородность свойств материала, неосесимметричность деформирования и т. д.). Учесть в расчетах эти особенности реального сферического купола, способов его нагружения и закрепления пока не удалось. Для инженерных расчетов применяются теоретически полученные значения критической нагрузки, скорректированные путем введения коэффициентов, определяемых экспериментально и с учетом начальных прогибов оболочки, вида граничных условий, обуславливающих возможность работы материала оболочки в упругопластической зоне [4].

В работах [5, 6] проведено сравнение экспериментальных данных и результатов, полученных на основе численных методов. Использование методов численного моделирования

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг., а также при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2843.2012.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-08-00557-а, 11-08-00565-а, 12-08-33106-мол_а_вед, 12-08-12044-офи_м, 13-08-90819-мол_рф_нр).

позволяет изучать процессы деформирования и устойчивости оболочек при достаточно сложной геометрии тел с учетом геометрической и физической нелинейности, сложного нагружения, неоднородности напряженно-деформированного состояния без упрощающих предположений и априорных гипотез силового и кинематического характера.

В настоящей работе с использованием метода конечных элементов и явной конечно-разностной схемы интегрирования по времени типа “крест” [7] численно исследуется выпучивание упругопластических полусферических оболочек при различных условиях нагружения, изучается влияние отверстий и граничных условий на форму оболочки; результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

1. Определяющая система уравнений и метод решения. Для описания движения деформируемой среды применяется текущая лагранжева формулировка [8, 9]. Уравнение движения выводится из уравнения баланса возможных значений мощностей работ

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где \dot{U}_i — компоненты вектора скорости перемещения в общей декартовой системе координат X ; σ_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений Коши и скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ — плотность; P_i^q — контактное давление; P_i — распределенная нагрузка; Ω — исследуемая область; Γ_q — поверхность контакта; Γ_p — зона действия внешнего давления; $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}$, $\delta \dot{U}_i$ — вариации $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{U}_i (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta \dot{U}_i = 0$); точка над буквой означает частную производную по времени t ; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Компоненты тензора скорости деформаций определяются в метрике текущего состояния:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}}{2} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad \dot{U}_{i,j} = \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial X_j}, \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt. \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений находятся из соотношений теории течения с изотропным упрочнением:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma^v \delta_{ij}, & \dot{\sigma}^v &= -3K\dot{\varepsilon}^v, & \dot{\varepsilon}^v &= \dot{\varepsilon}_{ij}/3, \\ \dot{\varepsilon}'_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^v \delta_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p, & \dot{\varepsilon}_{ii}^p &= 0, & D_J \sigma'_{ij} &= 2G\dot{\varepsilon}'_{ij}, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \sigma'_{ij}, & \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= \frac{2}{3} \sigma_T^2(\chi), & \chi &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь σ'_{ij} , $\dot{\varepsilon}'_{ij}$, σ^v , $\dot{\varepsilon}^v$ — девиаторные и шаровые компоненты тензоров напряжения и скоростей деформаций; $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ — скорости пластических деформаций; G , K — модули сдвига и объемного сжатия; δ_{ij} — символы Кронекера; D_J — производная Яуманна [8–10]: $D_J \sigma'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ik} W_{kj} - \sigma'_{jk} W_{ik}$; $W_{ij} = (\dot{U}_{i,j} - \dot{U}_{j,i})/2$; σ_T — динамический предел текучести; $\dot{\lambda}$ — параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. На контактной поверхности формулируются условия непроникания по нормали и свободного скольжения вдоль касательной к поверхности контакта:

$$\dot{u}_n^1 = \dot{u}_n^2, \quad q_n^1 = -q_n^2, \quad q_i^1 = q_i^2 = 0, \quad i = \tau_1, \tau_2. \quad (4)$$

Здесь n, τ_1, τ_2 — единичные векторы локального ортогонального базиса (n — вектор нормали к поверхности контакта; τ_1, τ_2 ортогональны n); нижний индекс i означает проекцию вектора на оси подвижной системы координат, верхними индексами 1, 2 обозначены номера соответствующих подобластей, поверхности которых контактируют. Определяющая система уравнений (1)–(4) дополняется кинематическими граничными и начальными условиями.

Критическая нагрузка определяется с помощью метода продолжения по параметру, в качестве которого используется время. Критическими считаются значения нагрузки, при превышении которых резко увеличиваются перемещения оболочки, ее кинетическая энергия или другие характеристики формоизменения оболочки в целом.

Определяющая система уравнений (1)–(4) решается с использованием метода конечных элементов и явной конечно-разностной схемы интегрирования по времени типа “крест” [7, 8]. Деформируемая конструкция заменяется лагранжевой сеткой, состоящей из 8-узловых конечных элементов (КЭ). В узлах сетки определяются ускорения $\{\ddot{U}\}$, скорости $\{\dot{U}\}$ и перемещения $\{U\}$ в системе координат $\{X\} = \{X_1 X_2 X_3\}^T$. В КЭ сдвиговые и изгибные деформации полагаются малыми, а смещения и углы поворота их как жесткого целого — произвольными. В каждом КЭ вводится локальный базис $\{x\} = \{x_1 x_2 x_3\}^T$, что позволяет отслеживать его вращение как жесткого целого. С помощью полилинейного изопараметрического преобразования КЭ отображается на куб $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = \overline{1, 3}$):

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad N_k = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^k}\right) \left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_2^k}\right) \left(1 + \frac{\xi_3}{\xi_3^k}\right). \quad (5)$$

Здесь x_i^k, ξ_i^k — координаты узлов в базисах x, ξ ; N_k — функции формы. В КЭ компоненты скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ аппроксимируются линейными функциями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \dot{\varepsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (6)$$

Как и в теории оболочек, значения компонент скорости деформаций в центре КЭ $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ далее будем называть безмоментными составляющими, а их градиент $\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\varepsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$ — моментными составляющими. Для того чтобы не завывать сдвиговую жесткость элемента, в (6) учитываются только компоненты $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$, соответствующие изгибающим и крутящим моментам в шестимодальной теории оболочек типа оболочек Тимошенко [7]. С использованием (6) разработано семейство конечных элементов для моделирования сложных составных конструкций, включающих массивные тела и оболочки.

1.1. *Конечный элемент упругопластической среды.* Отображение (5) позволяет перейти в КЭ от интеграла по объему к тройному интегралу. Компоненты скорости деформаций и напряжений вычисляются в квадратурных точках Гаусса. В общем случае для численного интегрирования в уравнении баланса виртуальных мощностей (1) применяются квадратурные формулы [8]. При малых деформациях можно использовать более простой вариант КЭ с аналитическим интегрированием по пространственным переменным ξ_i .

Тестовые расчеты [7] показали, что введение в численную схему моментных составляющих $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ позволяет подавить моды с нулевой энергией [8]. КЭ сплошной среды можно применять для исследования динамики массивных тел и тонкостенных конструкций. Однако в пластинах и оболочках для достижения приемлемой точности решения сетка в расчетной области должна иметь не менее четырех элементов по толщине, что значительно увеличивает вычислительные затраты и оправданно только при интенсивных локальных воздействиях, скачкообразном изменении геометрии и т. д.

1.2. *Конечный элемент оболочки.* Введем локальный базис $\{x\} = \{x_1 x_2 x_3\}^T$ таким образом, чтобы ось x_3 была направлена по нормали к срединной поверхности оболочки.

Поскольку деформации сдвига и изгиба полагаются малыми, можно считать, что ось ξ_3 совпадает с осью x_3 . Конечный элемент разбивается на ряд подслоев вдоль ξ_3 . Напряжения в подслоях определяются в точках интегрирования из уравнений состояния в предположении линейного распределения скорости деформаций по толщине оболочки: $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^3 \xi_3$. Для лучшей сходимости численного решения при дискретизации тонкостенных конструкций трехмерными конечными элементами введем гипотезу [7]: компонента тензора напряжений, направленная по нормали к срединной поверхности, не меняется по толщине оболочки. В этом случае принятая аппроксимация деформаций и напряжений аналогична аппроксимации, принятой в шестимодальной теории оболочек типа оболочек Тимошенко [7], учитывающей обжатие и колебания по толщине, что позволяет решать задачу на сетке с одним слоем КЭ.

Мощность возможной работы в каждом КЭ в уравнении (1) выражается через матрицу масс, узловые ускорения и статически эквивалентные узловые силы. После замены интегрирования по области Ω суммированием по элементам получаем дискретный аналог уравнений движения

$$[M]\{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (7)$$

где $[M]$ — диагональная матрица масс; $\{\ddot{U}\}$, $\{F\}$ — векторы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (7) интегрируется по явной конечно-разностной схеме “крест”.

При численном определении контактного давления в зонах взаимодействия деформируемых тел и статически эквивалентных ему сил в узлах КЭ-сетки используются условия непроникания и законы сохранения массы и количества движения [11].

Данная методика реализована в вычислительной системе “Динамика-3”.

2. Потеря устойчивости и закритическое поведение жестко заземленной по контуру полусферической оболочки при равномерном сжатии внешним давлением. Пусть оболочка ($R = 1,443$ см, $h = 0,1$ см) выполнена из сплава АД1 ($\rho = 2,71$ г/см³, модуль упругости $E = 71$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, предел текучести $\sigma_T = 50$ МПа, модуль упрочнения $g = 40$ МПа). При равномерном сжатии сферической оболочки ее поведение после достижения критического значения давления зависит от его изменения на закритическом этапе. Будем полагать, что

$$P = \begin{cases} at, & t \leq t_c, \\ P_c f(t), & t > t_c, \end{cases} \quad (8)$$

где $a = \text{const}$ — скорость нарастания внешнего давления во времени; $P_c = P(t_c)$ — критическая нагрузка; t_c — время, за которое внешняя нагрузка достигает критического значения; $f(t)$ — монотонно убывающая функция, задаваемая в соответствии с экспериментальными данными.

В (8) скорость увеличения внешнего давления a до момента потери устойчивости t_c выбиралась исходя из условия малости динамических эффектов. Устойчивость оболочки оценивалась по временной зависимости прогиба на полюсе оболочки и изменениям ее формы. Для решения задачи в трехмерной постановке применялась сетка из 440 оболочечных КЭ. На рис. 1,а показана конечноэлементная сетка, соответствующая остаточной форме оболочки. Согласно расчетным данным в рассматриваемой задаче потеря устойчивости происходит при достижении интенсивностью напряжений предела текучести и составляет 7,6 МПа. Проводилось исследование сходимости численного решения при последовательном измельчении КЭ-сетки, а также сравнение полученных результатов с результатами расчетов с применением КЭ сплошной среды. В последнем случае оболочка разбивалась по

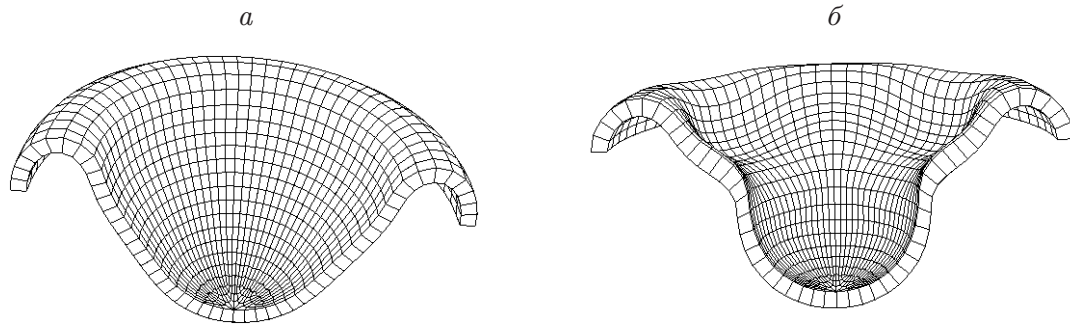


Рис. 1. Формы выпучивания полусферической оболочки с учетом (а) и без учета (б) уменьшения внешнего давления на закритической стадии деформирования

толщине на четыре конечных элемента. Проведенные исследования подтвердили достоверность численного решения задачи с использованием данной конечноэлементной методики. Остаточная форма оболочки (см. рис. 1,а) и значения критической нагрузки с точностью до 5 % совпадают с результатами решения задачи в осесимметричной постановке [5]. В случае если в (8) уменьшение внешнего давления на закритической стадии не учитывается, формоизменение оболочки будет иным: добавляются более высокие формы потери устойчивости (см. рис. 1,б). На закритической стадии напряженно-деформированное состояние оболочки существенно неоднородно. Наибольшее искривление траекторий деформаций в пространстве Ильюшина достигается в зоне перегиба оболочки.

3. Выпучивание сегментов сферической оболочки при сжатии между плитами. Рассматривались квазистатический и ударный режимы нагружения, в расчетах варьировались радиус R , высота подъема H и толщина оболочки h (рис. 2,а), плиты моделировались КЭ сплошной среды. Для дискретизации оболочки применялись КЭ оболочечного типа. Сетка расчетной области состояла из 1275 КЭ. Проведено численное исследование выпучивания полусферической алюминиевой оболочки ($R = 7,8$ см, $R/h = 33,4$, $\rho = 2,7$ г/см³, $E = 70$ ГПа, $\mu = 0,3$, $\sigma_T = 160$ МПа, $g = 180$ МПа) при падении на нее плиты массой 34,75 кг с начальной скоростью, значение которой варьировалось в диапазоне $V_0 = 0,8 \div 7,1$ м/с. Нижний край оболочки свободно опирается на неподвижную недеформируемую плиту. Согласно экспериментальным данным [6] при таких размерах и условиях нагружения потеря устойчивости оболочки происходит по осесимметричной фор-

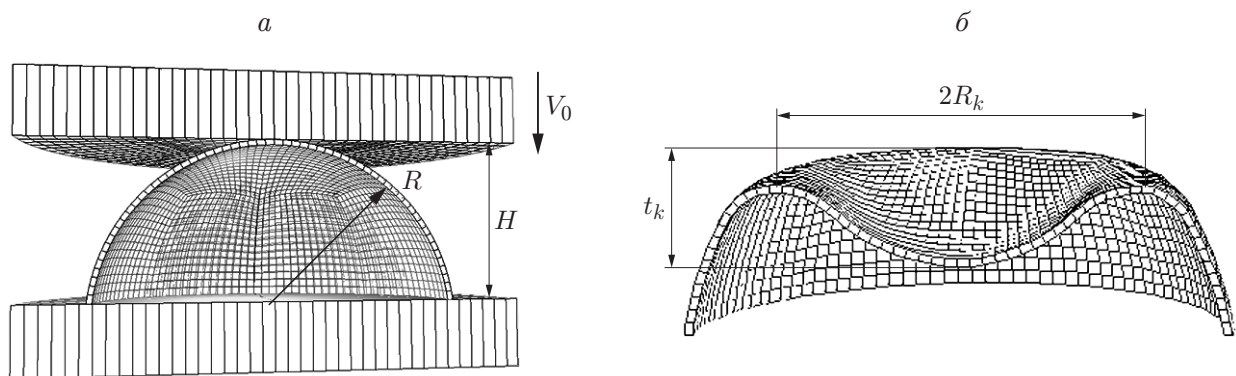


Рис. 2. Исходная форма полусферической оболочки (а) и ее остаточная форма (б) при падении плиты со скоростью $V_0 = 6,6$ м/с

Таблица 1

Расчетные и экспериментальные [6] значения радиуса контактной зоны R_k и глубины вмятины t_k для оболочки при $R = 7,8$ см, $R/h = 33,4$

V_0 , м/с	R_k , см		$\Delta R_k/R_k$, %	t_k , см		$\Delta t_k/t_k$, %
	Расчет	Эксперимент		Расчет	Эксперимент	
6,6	5,40	5,55	2,7	2,18	2,22	1,8
7,1	5,90	6,02	2,0	2,30	2,30	0

Таблица 2

Расчетные и экспериментальные [6] значения радиуса контактной зоны R_k и глубины вмятины t_k для оболочек с различными радиусом, толщиной, высотой и начальной скоростью удара

h , см	R , см	R/h	H , см	V_0 , м/с	t_k , см		$\Delta t_k/t_k$, %	R_k , см		$\Delta R_k/R_k$, %
					Расчет	Эксперимент		Расчет	Эксперимент	
0,24	3,94	16,5	3,85	4,45	0,89	0,87	2,0	3,25	3,25	0
0,25	6,39	25,7	6,05	4,85	1,53	1,62	5,4	4,10	4,15	1,2
0,24	7,81	32,0	7,25	7,21	3,26	3,23	0,9	6,30	6,40	1,6
0,20	7,88	39,6	7,30	4,80	1,85	1,89	2,0	5,10	5,30	3,8
0,24	10,12	41,5	9,35	7,67	3,68	3,76	2,0	7,40	7,50	1,3
0,25	8,94	36,3	4,45	4,20	1,62	1,58	2,7	4,90	4,81	1,9

ме. При падении плиты с высоты 3 см начальная скорость удара составляет $V_0 = 0,8$ м/с. При этом деформирование оболочки происходит в основном упруго, и лишь в области контакта возникают пластические деформации, не превышающие 5 %, оболочка не теряет устойчивости, вмятина в зоне контакта не образуется.

При увеличении высоты подъема плиты до $H \geq 78,4$ см ($V_0 = 3,92$ м/с) на оболочке образуется вмятина. На рис. 2,б показана остаточная форма оболочки для начальной скорости падающей плиты $V_0 = 6,6$ м/с. В табл. 1 приведены расчетные и экспериментальные [6] значения радиуса контактной зоны R_k и глубины вмятины t_k в остаточном положении (см. рис. 2,б). В табл. 2 приведены результаты расчетов и экспериментов для тех же параметров для сегментов алюминиевой сферической оболочки при различных исходных значениях радиуса R , толщины h и высоты H (см. рис. 2,а). Видно, что максимальное различие расчетных и экспериментальных данных не превышает 6 %. Учитывая сложность рассматриваемой задачи, точность расчетов можно считать удовлетворительной.

Проводилось исследование сходимости численного решения при измельчении сетки расчетной области. Расчеты показали, что необходимая точность решения достигается при использовании КЭ оболочки, учитывающего обжатие по толщине при шаге сетки вдоль образующей, равном $0,5h$. При большем шаге сетки погрешность в описании контактного взаимодействия с падающей плитой в области перегиба оболочки (в области вмятины) приводит к немонотонности силы контактного взаимодействия.

4. Устойчивость сферического сегмента, усиленного опорным кольцом. Рассмотрим сферический сегмент 1 (рис. 3) с постоянной толщиной $R/h = 400$, усиленный опорным кольцом 2 и в нижней части опирающийся на круговой ложемент 3. В расчетах угол обхвата ложемента менялся в диапазоне $3^\circ \leq \gamma \leq 120^\circ$. В верхней части к подкрепляющему кольцу приложена сжимающая нагрузка, линейно возрастающая во времени до момента потери устойчивости оболочки. Оболочка и опорное кольцо выполнены из алюминиевого сплава ($\rho = 2,74$ г/см³, $E = 70$ ГПа, $\mu = 0,3$, $\sigma_T = 30$ МПа, $g = 51$ МПа). Для решения задачи применялась сетка из 5000 КЭ: 160 КЭ сплошной среды для моделирования опорного кольца и 4840 КЭ оболочечного типа для сферического сегмента

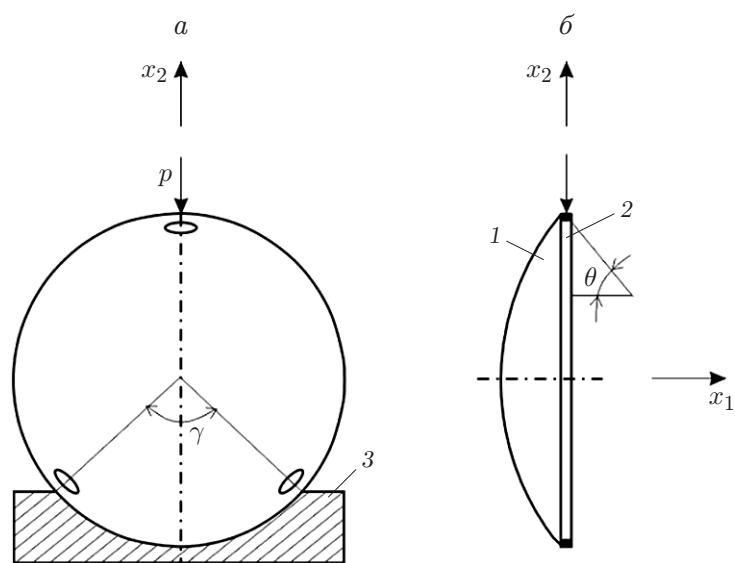


Рис. 3. Пологая сферическая оболочка (1), усиленная по периметру кольцом (2) и опирающаяся на ложемент 3, в двух проекциях:
a — (x_2, x_3) ; *б* — (x_1, x_2)

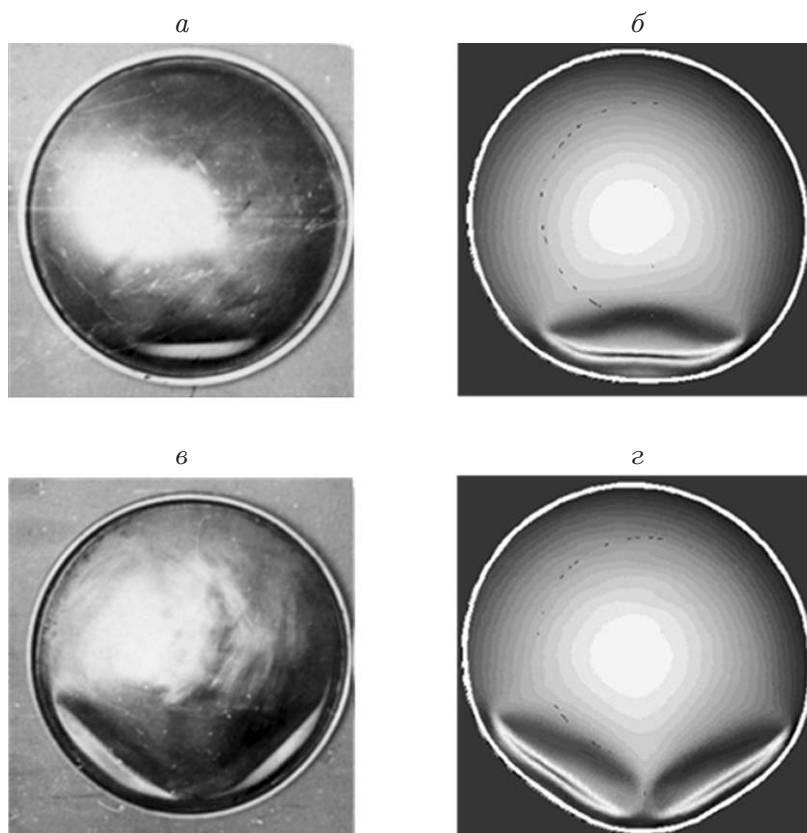


Рис. 4. Формы выпучивания оболочки при различных значениях γ :
a, б — $\gamma = 3^\circ$, *в, г* — $\gamma = 60^\circ$; *a, в* — эксперимент, *б, г* — расчет

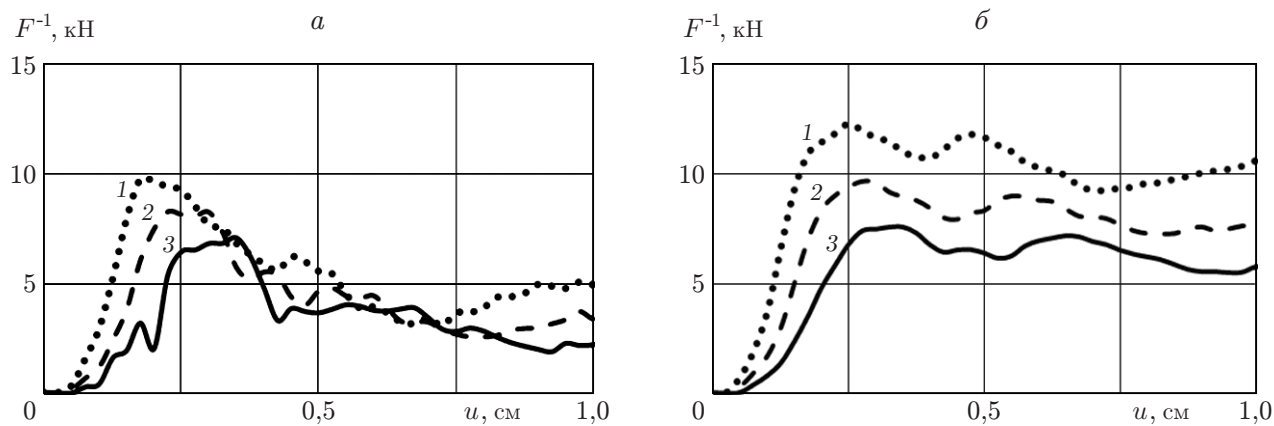


Рис. 5. Зависимость контактной силы на опоре от смещения оболочки в зоне нагружения при $\gamma = 3^\circ$ (а), $\gamma = 60^\circ$ (б) и различных значениях θ :
 1 — $\theta = 40^\circ$, 2 — $\theta = 50^\circ$, 3 — $\theta = 60^\circ$

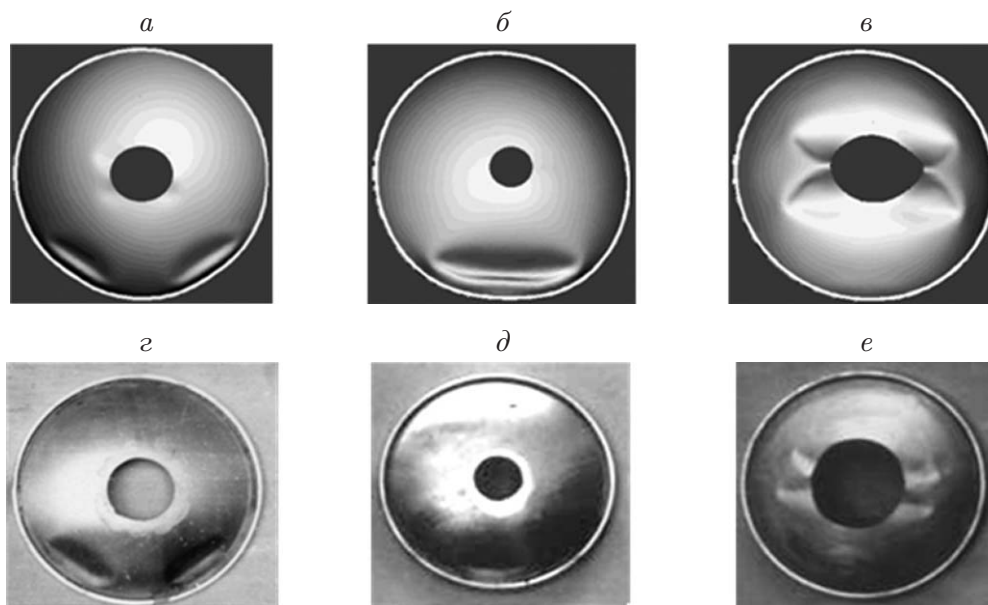


Рис. 6. Формы выпучивания оболочки с центральным отверстием различного радиуса при различных значениях γ , полученные в расчетах (а-в) и экспериментально (г-е):

а, г — $\gamma = 60^\circ$ (а — $R_o/R_k = 0,25$, г — $R_o/R_k = 0,27$); б, в, д, е — $\gamma = 3^\circ$ (б — $R_o/R_k = 0,21$, в — $R_o/R_k = 0,22$, д — $R_o/R_k = 0,36$, е — $R_o/R_k = 0,38$)

(рис. 4, 5.) На рис. 4 показаны остаточные формы оболочек, полученные в расчетах и экспериментах [12]. На рис. 5 приведена зависимость контактной силы на опоре от смещения оболочки в зоне нагружения. Согласно результатам расчетов с увеличением угла θ критическая нагрузка уменьшается. По мере нагружения распределение давления на опоре становится неравномерным: контактные усилия возрастают вблизи краев ложементов, поэтому угол обхвата ложементов γ оказывает существенное влияние на волнообразование (см. рис. 4): при малых углах γ образуется одна вмятина, при больших — две вмятины вблизи границ области контакта. Достоверность результатов расчетов остаточной формы оболочки подтверждают экспериментальные данные [12].

Поскольку отверстия являются концентраторами напряжений, вызывают существенную неоднородность напряженно-деформированного состояния и локальную потерю устойчивости оболочки в зоне их расположения, были проведены численные исследования устойчивости пологих сферических оболочек с круглыми отверстиями. В расчетах менялись длина ложементов (угол γ на рис. 3) и радиус отверстия. На рис. 6 показаны формы потери устойчивости оболочки, полученные в расчете и эксперименте [12] при различных радиусах отверстия (R_o , R_k — радиусы отверстия и опорного кольца соответственно). Видно, что форма потери устойчивости оболочки меняется при радиусе отверстия, превышающем 35 % радиуса опорного кольца. В этом случае вмятины образуются не вблизи опорного кольца, а вблизи отверстия.

Заключение. Использование дифференциальной теории пластичности при исследовании устойчивости идеальных оболочек приводит к завышенным значениям бифуркационной нагрузки [2]. При численном моделировании процессов деформирования, предельных состояний и закритического поведения реальных оболочек с начальными несовершенствами (при этом траектории деформирования относятся к классу средних кривизн) применение теории течения является обоснованным [13, 14]. Учет динамических эффектов позволяет физически достоверно описать закритическое поведение упругопластических конструкций, что необходимо для оценки их надежности. Это подтверждается хорошим соответствием полученных в настоящей работе и опубликованных ранее [7, 14] результатов численных расчетов и экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абросимов Н. А.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций // Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002.
2. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972.
3. **Григолюк Э. И.** Механика деформирования сферических оболочек / Э. И. Григолюк, В. И. Мамай. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983.
4. **Дегтярь В. Г., Чеканин В. В.** Повышение точности методов расчета подкрепленных сферических сегментов на устойчивость с использованием результатов экспериментальных исследований // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010. Вып. 72. С. 86–92.
5. **Якушев В. Л.** Потеря устойчивости полусферических оболочек при пластических деформациях // Тр. 18-й Междунар. конф. по теории оболочек и пластин, Саратов, 29 сент. — 4 окт. 1997 г. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1997. Т. 2. С. 136–141.
6. **Gupta N. K., Venkatesh K. S.** Experimental and numerical studies of dynamic axial compression of thin walled spherical shells // Intern. J. Impact Engng. 2004. V. 30. P. 1225–1240.

7. **Артемьева А. А., Баженов В. Г., Кибец А. И. и др.** Верификация конечноэлементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек // Вычисл. механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 2. С. 5–14.
8. **Belytschko Т.** Nonlinear finite elements for continua and structures / Т. Belytschko, W. K. Liu, V. Moran. N. Y.: John Wiley and Sons, 2000.
9. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
10. **Аннин Б. Д., Коробейников С. Н.** Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 21–34.
11. **Баженов В. Г., Кибец А. И., Цветкова И. Н.** Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20–26.
12. **Гудрамович В. С.** Устойчивость упругопластических оболочек. Киев: Наук. думка, 1987.
13. **Волков И. А.** Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И. А. Волков, Ю. Г. Коротких. М.: Физматлит, 2008.
14. **Баженов В. Г., Баранова М. С., Кибец А. И. и др.** Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.

Поступила в редакцию 31/V 2013 г.
