

3. Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. К теории сжимаемых идеально пластических сред.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.
5. Дегтярев И. С. Об экстремальных теоремах и разрывных решениях для аддитивно-сжимаемого пластического тела.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Вып. 1. Куйбышев, изд. Куйбышевск. ун-та, 1975.

УДК 539.38.384.2 + 539.38.386

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТОВ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Ю. В. Немировский, А. Р. Сковорода

(Новосибирск, Барнаул)

При воздействии кратковременных динамических нагрузок высокой интенсивности большая часть подводимой к конструкции внешней энергии может рассеяться в работу пластических деформаций прежде, чем конструкция разрушится или получит заведомо недопустимые остаточные деформации. Для решения соответствующих задач по оценке степени повреждения конструкций при воздействии «взрывных» нагрузок широкое применение нашли подходы, основанные на модели жестко-пластического тела. Подробный обзор советских и зарубежных работ, выполненных в этом направлении в последние годы, изложен в [1].

Выполненные в ряде работ [2—4] экспериментальные исследования обнаружили, что замеренные в экспериментах величины остаточных прогибов и углов поворота оказываются существенно меньше теоретических, составляя от них примерно 20—80%. Такое расхождение объясняется влиянием ряда факторов, не учитываемых в вышеуказанной теории. В частности, во всех известных на сегодня исследованиях не учитывается влияние инерции вращения и ограниченности сопротивления поперечным сдвигам.

В данной работе развивается теория динамического изгиба круглых пластин из жестко-пластического материала, учитывающая инерцию вращения и ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Показано, что характер динамического поведения и механизм рассеяния энергии при пластических деформациях в этом случае существенно иной, чем в вышеуказанных теориях.

1. Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой пластинки из идеально жестко-пластического материала. Примем следующие кинематические гипотезы деформирования пластинки (в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной поверхностью):

$$u_r = zu(r, t), \quad u_\varphi \equiv 0, \quad u_z = W(r, t),$$

где u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора перемещения; t — время. Пользуясь вариационным принципом Лагранжа в сочетании с принципом Даламбера, получим соответственно уравнения движения пластинки

$$(1.1) \quad (1/3)\ddot{u} = m_1' + x^{-1}(m_1 - m_2) - ql + \varphi, \quad \ddot{w} = q' + x^{-1}q + p$$

и граничные условия на краю $x = x_j$

$$\left[\delta u \left(m_1 n_j - t^{-1} \int_{-1}^1 \varphi_j \zeta d\zeta \right) \right] \Big|_{x=x_j} = 0, \quad \left[\delta w \left(q n_j - t^{-1} \int_{-1}^1 p_j d\zeta \right) \right] \Big|_{x=x_j} = 0,$$

где

$$m_i = \int_{-1}^1 \sigma_i \xi d\xi \quad (i = 1, 2); \quad q = \int_{-1}^1 \tau_{13} d\xi;$$

$$p = (P_z^+ + P_z^-) R (\sigma_0 H)^{-1}; \quad \varphi = (P_r^+ - P_r^-) R (\sigma_0 H)^{-1};$$

$$\zeta = zH^{-1}; \quad x = rR^{-1}; \quad l = RH^{-1}; \quad w = WH^{-1};$$

$$\sigma_1 = \sigma_r \sigma_0^{-1}; \quad \sigma_2 = \sigma_\varphi \sigma_0^{-1}; \quad \tau_{13} = \sigma_{rz} \sigma_0^{-1};$$

$$\varphi_j = RP_r(r_j) (\sigma_0 H)^{-1}; \quad p_j = RP_z(r_j) (\sigma_0 H)^{-1};$$

$$\tau^2 = \sigma_0 l^2 (2\rho HR)^{-1}.$$

Здесь m_1, m_2 — безразмерные радиальный и окружной изгибающие моменты; q — безразмерная перерезывающая сила; $2H$ — толщина пластинки; R — ее радиус; P_z^\pm, P_r^\pm — компоненты поверхностной нагрузки на поверхностях $z = \pm H$ пластинки; $P_r(r_j), P_z(r_j)$ — компоненты нагрузки на кромке $r = r_j$; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_{rz}$ — компоненты напряжения; σ_0 — предел текучести материала пластинки; ρ — удельная плотность; n_j — направляющий косинус площадки на контуре x_j . Штрихом обозначена производная по безразмерной координате x , точкой — производная по безразмерному времени τ , δ обозначает знак вариации.

Считаем, что материал пластинки является идеальным жестко-пластическим, подчиняющимся в пространстве m_1, m_2, q условию пластичности в виде призмы Треска — Сен-Венана (фиг. 1) и ассоциированному с ним закону пластического течения

$$(1.2) \quad \dot{\kappa}_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial m_i}, \quad \dot{\varepsilon}_{13} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q} \quad (i = 1, 2, n = 1-8),$$

где

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_i = \zeta \dot{\kappa}_i; & \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{u}(x, \tau) + l^{-i} \dot{w}'(x, \tau); \\ \dot{\kappa}_1 = l^{-i} \dot{u}', & \dot{\kappa}_2 = \dot{u}(lx)^{-i}; \end{cases}$$

$$\lambda_k > 0, \text{ если } f_k = 1, df_k = 0;$$

$$\lambda_k = 0, \text{ если } f_k < 1, \text{ или } f_k = 1, \text{ но } df_k < 0,$$

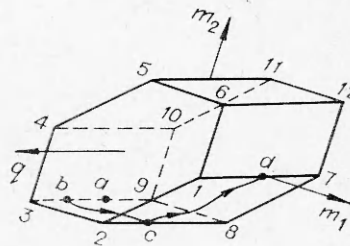
причем равенства

$$f_k = a_k m_1 + b_k m_2 + c_k q = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

определяют уравнения граней поверхности текучести. Используемая призма может служить достаточно удовлетворительной аппроксимацией в пространстве m_1, m_2, q условий пластичности, известных из [5—8]. Параметры a_k, b_k, c_k выбираются из условия, что длина призмы равна удвоенной нагрузке сопротивления пластинки срезу, а в основании призмы лежит шестиугольник Треска в пространстве m_1, m_2 [4, 9].

В момент $\tau = \tau_0$ имеем начальные условия

$$(1.4) \quad \dot{u}(x, \tau_0) = \dot{u}^0(x), \quad u(x, \tau_0) = u^0(x),$$



Фиг. 1

$$\dot{w}(x, \tau_0) = \dot{w}^0(x), \quad w(x, \tau_0) = w^0(x).$$

На границах пластинки, разделяющих пластические режимы и соответствующих различным граням или ребрам используемой поверхности текучести, должны быть выполнены следующие условия непрерывности:

$$(1.5) \quad [\dot{u}] = [\dot{w}] = [m_1] = [q] = 0.$$

2. При движении заземленной пластинки под действием равномерно распределенного по ее поверхности импульса граничные условия имеют вид [9]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} q(0, \tau) &= 0, \quad m_1(0, \tau) = -1, \\ m_1(1, \tau) &= 1, \quad \dot{w}(1, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Так как вследствие симметрии имеем также $m_2(0, \tau) = -1$ и при рассматриваемом типе нагружения $q(x, \tau)$ — возрастающая функция x (по крайней мере в окрестности центра), то траектория пластических состояний на поверхности текучести имеет вид кривой $abcd$ на фиг. 1. В соответствии с этим в общем случае в пластинке реализуются пластические режимы, соответствующие ребру 3, 9 (в области $0 \leq x \leq a(\tau)$), плоскости 2, 3, 9, 8 (в области $a(\tau) \leq x \leq b(\tau)$) и плоскости 1, 2, 8, 7 (в области $b(\tau) \leq x \leq 1$). Тогда в области $0 \leq x \leq a(\tau)$ в соответствии с (1.1)–(1.3) имеем

$$(2.2) \quad \begin{cases} f_1 \equiv -m_1(x, \tau) = 1, & f_2 \equiv -m_2(x, \tau) = 1, \\ \ddot{u}(x, \tau) = -3lq(x, \tau), & \ddot{w} = p(\tau) + x^{-1}q(x, \tau) + q'(x, \tau); \end{cases}$$

$$(2.3) \quad q'' + x^{-1}q' - q(x^{-2} + \varepsilon^2) = 0, \quad \varepsilon^2 = 3l^2.$$

И, следовательно, учитывая (1.4), (2.1), получим

$$(2.4) \quad q(x, \tau) = C_{11}(\tau)I_1(\varepsilon x);$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} \dot{u}(x, \tau) = -3lC_{11}I_1(\varepsilon x) + \dot{u}^0(x), \\ \dot{w}(x, \tau) = I + \varepsilon C_{11}I_0(\varepsilon x) + \dot{w}^0(x); \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} u(x, \tau) = -3lC_{12}I_1(\varepsilon x) + (\tau - \tau_0)\dot{u}^0(x) + u^0(x), \\ w(x, \tau) = J + \varepsilon C_{12}I_0(\varepsilon x) + (\tau - \tau_0)\dot{w}^0(x) + w^0(x), \end{cases}$$

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau) d\tau, \quad J = \int_{\tau_0}^{\tau} I(\tau) d\tau, \quad C_{11} = \int_{\tau_0}^{\tau} C_1(\tau) d\tau,$$

$$C_{12} = \int_{\tau_0}^{\tau} C_{11}(\tau) d\tau, \quad I_0(y) = \frac{dI_1(y)}{dy} + y^{-1}I_1(y),$$

где $I_1(y)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. В соответствии с условием пластичности и законом пластического течения (1.2) для режима 9, 3 на фиг. 1 рассматриваемое решение реализуется при выполнении неравенств

$$(2.7) \quad -\alpha \leq q(x, \tau) \leq \alpha, \quad \dot{u}'(x, \tau) \leq 0, \quad \dot{u}(x, \tau) \leq 0 \\ (0 \leq x \leq a(\tau), \quad \tau \geq \tau_0).$$

В области $a(\tau) \leq x \leq b(\tau)$ из уравнений движения, условия пластичности и закона пластического течения (для грани 3, 2, 8, 9 на фиг. 1) имеем

$$(2.8) \quad m_2 = -1, \quad \dot{\varepsilon}_{13} = 0, \quad \dot{\kappa}_1 = 0, \quad \dot{\kappa}_2 = 0;$$

$$(2.9) \quad \dot{u}(x, \tau) = f(a, \tau), \quad \dot{w}(x, \tau) = -lf(a, \tau)(x - a) + g(a, \tau);$$

$$(2.10) \quad \begin{cases} q(x, \tau) = (6x)^{-1} \{6a(\tau) C_1(\tau) I_1(\varepsilon x) + \\ + (x - a) [3(x + a)(\dot{g} + l\dot{a}f - p) - l(x - a)(2x + a)\dot{f}]\}, \\ m_1(x, \tau) = (12x)^{-1} \{2[(x^2 - a^2)\dot{f} + 6(x - a)alC_1I_1(a\varepsilon) - 6x] + \\ + l(x - a)^2 [2(x + 2a)(\dot{g} + l\dot{a}f - p) - l(x^2 - a^2)\dot{f}]\}, \end{cases}$$

где $f(a, \tau) = \dot{u}^0(a) - 3lC_{11}I_1(a\varepsilon)$;

$$\begin{aligned} \dot{f}(a, \tau) = \dot{a}\dot{u}^0(a)/\dot{a} - 3lC_1I_1(a\varepsilon) - 3l\varepsilon\dot{a}C_{11}[I_0(a\varepsilon) - \\ - (a\varepsilon)^{-1}I_1(a\varepsilon)]; \end{aligned}$$

$$g(a, \tau) = I + \dot{w}^0(a) + \varepsilon C_{11}I_0(a\varepsilon);$$

$$\dot{g}(a, \tau) = p + \dot{a}\dot{w}^0(a)/\dot{a} + \varepsilon C_1I_0(a\varepsilon) + \varepsilon^2 C_{11}aI_1(a\varepsilon).$$

При интегрировании в силу условий непрерывности (1.5) на границе $x = a$ было учтено равенство $m_1(a, \tau) = -1$. Пластический режим (3, 2, 8, 9 на фиг. 1) справедлив при выполнении неравенств

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \dot{u}(x, \tau) \leq 0, \quad 0 \geq m_1(x, \tau) \geq -1 \\ (a \leq x \leq b, \quad \tau \geq \tau_0). \end{aligned}$$

В области $b(\tau) \leq x \leq 1$ реализуется пластическое состояние, соответствующее плоскости 1, 2, 8, 7 на фиг. 1. Для этого состояния имеем

$$(2.12) \quad m_1 - m_2 = 1, \quad \dot{\varepsilon}_{13} = 0, \quad \dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2 = 0;$$

$$(2.13) \quad \dot{\kappa}_1 \geq 0, \quad \dot{\kappa}_2 \leq 0, \quad 0 \leq m_1(x, \tau) \leq 1;$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \dot{u}(x, \tau) = b(\tau) f(a, \tau) x^{-1}, \\ \dot{w}(x, \tau) = -lb(\tau) f(a, \tau) \ln(xb^{-1}) + g(a, \tau) - l(b - a) f(a, \tau); \end{cases}$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} q(x, \tau) = (4x)^{-1} \{4bq(b, \tau) + 2(x^2 - b^2)(\dot{F} - p) - \\ - l(\dot{b}f + b\dot{f}) [2(x^2 \ln x - b^2 \ln b) - x^2 + b^2]\}, \\ 12m_1(x, \tau) = (\dot{b}f + f\dot{b}) \{[(2 \ln b - 1) b^2 \varepsilon^2 + 4] \ln(xb^{-1}) + \\ + \varepsilon^2(x^2 - b^2) - \varepsilon^2(x^2 \ln x - b^2 \ln b)\} + 12[blq(b, \tau) - 1] \times \\ \times \ln(xb^{-1}) + 3l(\dot{F} - p) [2b^2 \ln(bx^{-1}) + x^2 - b^2], \end{cases}$$

где (2.16) $\dot{F}(\tau) = \dot{g}(a, \tau) + l\dot{a}f - l(b - a)\dot{f}(a, \tau) + l(\dot{b}f + b\dot{f}) \ln b$. При этом в силу условий непрерывности при интегрировании учтено, что

$$(2.17) \quad m_1(b, \tau) = 0.$$

Так как в силу последнего из граничных условий (2.1) имеем $\dot{w}(1, \tau) = 0$ для $\tau \geq \tau_0$, то $\ddot{w}(1, \tau) = 0$ при $\tau \geq \tau_0$, т. е. $\dot{F}(\tau) = 0$. Пользуясь этим равенством, равенством (2.17), граничным условием $m_1(1, \tau) = 1$ и выражениями (2.10), (2.14), (2.15), (2.16), для определения функций $a(\tau)$, $b(\tau)$, C_{11} получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$(2.18) \quad \varphi_1 \dot{a} + \psi_1 \dot{b} + \omega_1 \dot{C}_{11} = d_1, \\ \varphi_2 \dot{a} + \omega_2 \dot{C}_{11} = d_2, \quad \varphi_3 \dot{a} + \psi_3 \dot{b} + \omega_3 \dot{C}_{11} = d_3,$$

где

$$\varphi_1 = -l(b - a - b \ln b) \left[\frac{\partial \dot{u}^0(a)}{\partial a} - 3lC_{11} \frac{\partial I_1(a\varepsilon)}{\partial a} \right]; \\ \psi_1 = fl \ln b, \quad \omega_1 = \varepsilon [I_0(a\varepsilon) + \varepsilon(b - a - b \ln b) I_1(a\varepsilon)]; \\ \varphi_2 = l^{-1}(b + a) [2 - l^2(b - a)^2] \left[\frac{\partial \dot{u}^0(a)}{\partial a} - 3lC_{11} \frac{\partial I_1(a\varepsilon)}{\partial a} \right]; \\ \omega_2 = (b - a) \{2\varepsilon(b + 2a) I_0(a\varepsilon) + [\varepsilon^2(b^2 - a^2) - 6] I_1(a\varepsilon)\}; \\ (2.19) \quad 36\varphi_3 = \{\varepsilon^2 b(1 - b^2) - 2 \ln b [3b \{2 + \varepsilon^2 b^2 (\ln b - 1)\} - \\ - \varepsilon^2(b - a)^2(2b + a)]\} \left[\frac{\partial \dot{u}^0(a)}{\partial a} - 3lC_{11} \frac{\partial I_1(a\varepsilon)}{\partial a} \right]; \\ 12\psi_3 = f \{\varepsilon^2(1 - b^2) - 2[2 + \varepsilon^2 b^2 (\ln b - 1)] \ln b\}; \\ 12\omega_3 = l \{ [12(b - a) + 2\varepsilon^2 \{3b^3 \ln b - (b - a)^2(2b + a) - 3b^3\}] \ln b - \\ - 3\varepsilon^2 b(1 - b^2) \} I_1(a\varepsilon) - 6\varepsilon(b^2 - a^2) I_0(a\varepsilon) \ln b; \\ d_1 = -p(\tau); \quad d_2 = 12b[l(b - a)]^{-1}; \\ 4d_3 = l(2b^2 \ln b + 1 - b^2)p(\tau) - 4(\ln b - 1).$$

Пусть в некоторый момент времени $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = 0$ и ускорения \ddot{u} , \ddot{w} в области $0 \leq x \leq a$ отсутствуют. Из равенств (2.2), (2.5), (2.9), (2.18) можно убедиться, что это возможно лишь тогда, когда $a = 0$ и

$$(2.20) \quad p = p_* = -6(lb_*^2)^{-1},$$

где b_* определяется из уравнения

$$(2.21) \quad 2b_*^2(1 - \ln b_*) = 3(1 - b_*^2) \quad (b_* \approx 0,73).$$

Равенство (2.20) определяет амплитуду предельной нагрузки для заземленной пластинки [9]. Можно проверить, пользуясь формулами (2.2), (2.5), (2.9), (2.14), (2.20), (2.21), что в момент времени, когда $a = 0$, $b = b_*$, $\dot{a} = 0$, $d = 0$, имеем также $\dot{u} = \dot{u} = \dot{w} = \dot{w} = 0$ для всех $0 \leq x \leq 1$.

Таким образом, рассматриваемое движение может возникнуть лишь при нагрузках, превышающих предельное значение p_* . Учет инерции вращения приводит к существенно иному механизму рассеяния энергии, чем в классическом решении [9]: здесь пластическая зона в окрестности центра, для которой $m_1(x, \tau) = m_2(x, \tau) = -1$, существует от начала движения и до остановки. Это приводит к существенно более интенсивному рассеянию энергии на пластических деформациях и должно приводить к значительному снижению уровня остаточных прогибов. Последние определяются при интегрировании формул (2.5), (2.9) (2.14) по времени.

Максимальный остаточный прогиб в центре пластинки равен

$$(2.22) \quad w_f(0, \tau_f) = w^0(0) + \dot{w}^0(0)(\tau_f - \tau_0) + J(\tau_f) + \varepsilon \int_{\tau_0}^{\tau_f} C_{11}(\tau) d\tau,$$

где τ_f — время остановки пластинки, определяемое из уравнения $a(\tau_f) = 0$. Необходимые для интегрирования системы (2.18) начальные условия $a_0 = a(\tau_0)$, $b_0 = b(\tau_0)$ получим из (2.18) при $\tau = \tau_0$.

Полученное в данном пункте решение имеет место при выполнении на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и в течение времени $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_f$ неравенств (2.7), (2.11), (2.13). Можно проверить, что все эти неравенства, кроме $q(x, \tau) \leq \alpha$, выполняются. Функция $q(x, \tau)$ в соответствии с полученным решением является монотонно возрастающей по x . Тогда равенство $q(1, \tau_1) = \alpha$ определяет время возможного среза пластинки на опоре в случае неубывающей нагрузки. При этом рассмотренное выше решение будет справедливо в интервале времени $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_2$, где $\tau_2 = \min(\tau_f, \tau_1)$ и $|p(\tau)| \geq |p_*|$. Если же нагрузка от начального момента времени $\tau = \tau_0$ является убывающей, то из системы уравнений (2.18) при $\tau = \tau_0$ в совокупности с равенством $q(1, \tau_0) = \alpha$ или соотношением

(2.23)

$$2[2b_0 q(b_0, \tau_0) - (1 - b_0^2)p(\tau_0)] + l(\dot{b}f + \dot{f}b)|_{\tau=\tau_0} [2b_0^2 \ln b_0 + 1 - b_0^2] = 4\alpha$$

определим значения $a_0, b_0, \dot{C}_{11}^0 = \dot{C}_{11}(\tau_0)$ и зависимость пика срезающей нагрузки от l , т. е. $p_*(l)$. Тогда рассмотренное решение будет справедливо при выполнении неравенств

$$|p_*| \leq |p(\tau)| \leq |p_*(l)| \quad (\tau_0 \leq \tau \leq \tau_f).$$

В случае $|p_*| = |p(\tau_0)| = |p_*(l)|$ имеем, очевидно, $\dot{a}(\tau_0) = \dot{b}(\tau_0) = a(\tau_0) = 0$, $b(\tau_0) = b_*$. Тогда из (2.23) получим

$$|p_*| = 2\alpha \text{ и } l = l_* = 3(\alpha b_*^2)^{-1}.$$

Можно проверить, что $|p_*(l)| \geq |p_*|$, если $l \geq l_*$, причем $\lim_{l \rightarrow \infty} |p_*(l)| = \infty$.

3. Если пик нагрузки (невозрастающей) превышает значение $|p_*|$, то движение пластинки осуществляется с теми же пластическими режимами, что и в п. 2 и со срезом на краю. Последнее приводит к тому, что вместо граничного условия $\dot{w}(1, \tau) = 0$ в этом случае следует использовать граничное условие $q(1, \tau) = \alpha$. Тогда решение задачи снова определяется выражениями (2.2)–(2.6), (2.8)–(2.10), (2.12)–(2.14), (2.18), (2.22) с той лишь разницей, что коэффициенты φ_2, ω_2, d_2 системы (2.18) сохраняют свое значение из (2.19), а коэффициенты $\varphi_1, \psi_1, \omega_1, d_1, \varphi_3, \psi_3, \omega_3, d_3$ в данном случае следует заменить соответственно коэффициентами $\varphi_{11}, \psi_{11}, \omega_{11}, d_{11}, \varphi_{31}, \psi_{31}, \omega_{31}, d_{31}$, где

$$(3.1) \quad 12\varphi_{11} = l\{3b(2 \ln b + 1 - b^2) - 2(b - a)(3 - a^2 - ab - b^2)\} \times \\ \times \left[\frac{\partial \dot{u}^0(a)}{\partial a} - 3lC_{11} \frac{\partial I_1(a\varepsilon)}{\partial a} \right],$$

$$4\psi_{11} = fl(2 \ln b + 1 - b^2), \quad 12\omega_{11} = 6\varepsilon(1 - a^2)I_0(a\varepsilon) + I_1(a\varepsilon)\{12a +$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 [2(b-a)(3-a^2-ab-b^2) - 3b(2\ln b + 1 - b^2)]; \quad d_{11} = \alpha; \\
12\varphi_{31} & = 12\varphi_3 + \varepsilon^2(1-b^2+2b^2\ln b)(b\ln b - b + a) \times \\
& \quad \times \left[\frac{\partial \dot{u}^0(a)}{\partial a} - 3IC_{11} \frac{\partial I_1(a\varepsilon)}{\partial a} \right]; \\
12\psi_{31} & = 12\psi_3 + \varepsilon^2 f \ln b(1-b^2+2b^2\ln b); \\
4\omega_{31} & = 4\omega_3 + l(1-b^2+2b^2\ln b)[\varepsilon^2(b-a - \\
& \quad - b\ln b)I_1(a\varepsilon) + \varepsilon I_0(a\varepsilon)]; \quad d_{31} = 1 - \ln b.
\end{aligned}$$

Как видно из этих выражений, коэффициенты и правые части уравнения (2.18) в этом случае не зависят от вида нагрузки $p(\tau)$, т. е. изменение нагрузки при движении пластинки со срезом на опоре не сказывается на характере изменений пластических состояний внутри пластинки, а сказывается лишь на изменении ее смещений и скоростей.

Из законов пластического течения на участке $0 \leq x \leq 1$ имеем $\dot{\varepsilon}_{13} = \dot{w}' + l\dot{u} = 0$ и $\dot{\kappa}_2 = (lx)^{-1}\dot{u} \leq 0$. Таким образом, во всей пластинке $\dot{w}' \geq 0$; так как в то же время $\dot{w} \leq 0$, то, очевидно, наименьшее по модулю значение скорости прогиба достигается на опоре. Так что время τ_3 прекращения рассматриваемого движения со срезом определяется из уравнения $\dot{w}(1, \tau_3) = 0$ или $[g(a, \tau) - lf(a, \tau)(b-a-b\ln b)]_{\tau=\tau_3} = 0$. Дальнейшее ($\tau > \tau_3$) движение пластинки полностью определяется соотношениями, приведенными в п. 2, если всюду τ_0 заменить на τ_3 и $\dot{u}^0(x)$, $\dot{w}^0(x)$, $u^0(x)$, $w^0(x)$ соответственно на величины $\dot{u}(x, \tau_3)$, $\dot{w}(x, \tau_3)$, $u(x, \tau_3)$, $w(x, \tau_3)$. При этом время τ_4 окончания этой фазы движения, очевидно, определяется из равенства $\dot{a}(\tau_4) = 0$. Процедура решения задачи полностью идентична описанной в п. 2.

4. Возможен случай движения жесткой пластинки со срезом на опоре. При этом $\dot{\kappa}_1(x, \tau) = \dot{\kappa}_2(x, \tau) = \dot{\varepsilon}_{13}(x, \tau) = 0$. Таким образом, $\dot{u}(x, \tau) = 0$, $\dot{w}'(x, \tau) = 0$, т. е. $\dot{w}(x, \tau) = c(\tau)$. Тогда из второго уравнения движения (1.1) с учетом граничного условия $q(0, \tau) = 0$ получим

$$2q(x, \tau) = x(\ddot{c} - p).$$

Учитывая равенство $q(1, \tau) = \alpha$, при нулевых начальных условиях получим

$$(4.1) \quad \dot{w} = I + 2\alpha(\tau - \tau_0), \quad w = J + \alpha(\tau - \tau_0)^2.$$

Время остановки τ_5 определяется из уравнения

$$I(\tau_5) + 2\alpha(\tau_5 - \tau_0) = 0,$$

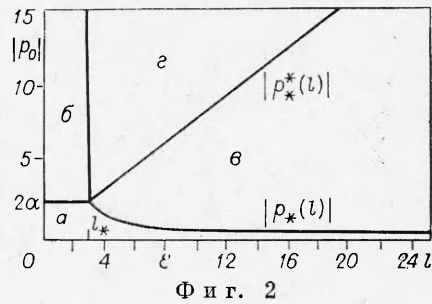
максимальный остаточный прогиб равен

$$w_{\max}(\tau_5) = J(\tau_5) + \alpha(\tau_5 - \tau_0)^2.$$

Рассматриваемое движение имеет место при $|p| > |p_{**}|$, где p_{**} определяется из уравнения $\ddot{w} \equiv 0$, так что

$$p_{**} = -2\alpha.$$

Условие, что пластинка на участке $0 \leq x \leq 1$ остается жесткой, соответствует требованию $|p_{**}| < |p_*|$ или $l \leq l_*$. Отметим, что если в системе уравнений (2.18) с учетом указанных в п. 3 замен коэффициентов величинами из (3.1) положить $\dot{a} = \dot{b} = a = 0$, то получим из нее $l = l_*$, $b = b_*$ и $\varepsilon \dot{C}_{11} = 2\alpha$. Подставляя эти значения в формулы (2.5), (2.9), (2.14) при нулевых начальных условиях $\dot{u}^0(x) = 0$,



Ф и г. 2

$\dot{w}^0(x) = 0$, $u^0(x) = 0$, $w^0(x) = 0$, получим формулы (4.1). Таким образом, при $l = l_*$ решения этого и предыдущего пункта полностью стыкуются.

Итак, в общем случае для защемленной пластинки, нагруженной равномерно распределенным импульсом, возможны четыре состояния, которые в зависимости от параметра гибкости пластинки l и величины пика нагрузки указаны схематически на фиг. 2 (a — неподвижная жесткая пластинка, b — движение жесткой пластинки со срезом на опоре, v — движение изгибаемой пластинки без среза на опоре, z — движение изгибаемой пластинки со срезом на опоре).

5. Решение, изложенное выше для защемленной пластинки, будет иметь место и для шарнирно-опертой пластинки с граничным условием $m_1(1, \tau) = 0$, если все формулы на отрезке $b \leq x \leq 1$ отбросить, а для формул на отрезке $a \leq x \leq b$ принять $b = 1$ и положить $\dot{w}(b, \tau) = \dot{w}(1, \tau) = 0$ при отсутствии среза и $q(b, \tau) = q(1, \tau) = \alpha$ при движении со срезом. В системе (2.18) необходимо отбросить третье уравнение. Кроме того, в выражении для l_* следует положить также $\dot{b}_* = 1$. Для этого случая изображенные на фиг. 2 кривые являются точными для значения параметра $\alpha = 2/\sqrt{3}$. Учитывая сказанное, приведем здесь лишь формулы, определяющие остаточный прогиб пластинки в случае движения без среза при нулевых начальных данных:

$$(5.1) \quad \begin{cases} w(x, \tau_f) = J(\tau_f) + \varepsilon \int_0^{\tau_f} A(x, \tau) A_1 I(\tau) d\tau & \text{при } x \geq a_0 \text{ и} \\ w(x, \tau_f) = J(\tau_f) + \varepsilon_0 I_0(x\varepsilon) \int_0^{\tau_0} C_1^0(\tau) d\tau + \\ + \varepsilon \int_{\tau_0}^{\tau_f} A(x, \tau) A_1 I(\tau) d\tau & \text{при } x \leq a_0. \end{cases}$$

Здесь

$$A(x, \tau) = I_0(a\varepsilon) + \varepsilon(x - a)I_1(a\varepsilon); \quad A_1 = A^{-1}(1, \tau);$$

τ_f — время остановки, определяемое из уравнения $a(\tau_f) = 0$; τ_0 определяется из уравнения $a(\tau_0) = x$, а $a(\tau)$ — из уравнения

$$(5.2) \quad I\varphi \dot{a} = d,$$

где $\varphi = \{I_0(a\varepsilon)[\varepsilon^2(1 - a)^2 (3a + 1) + 6(1 + a)] + 12a\varepsilon(1 - a)I_1(a\varepsilon)\} [I_0(a\varepsilon) - (a\varepsilon)^{-1} I_1(a\varepsilon)]$;

$$d = A_1 [12l^{-1}(1-a)^{-1}A_1 + p\varepsilon^{-1}(1-a) \{2\varepsilon(1+2a)I_0(a\varepsilon) + [\varepsilon^2(1-a^2) - 6]I_1(a\varepsilon)\}].$$

Начальное значение $a_0 = a(0)$ определяется из уравнения

$$(5.3) \quad 12A_1(a_0)\varepsilon l^{-1} + p_0(1-a_0)^2 \{2\varepsilon(1+2a_0)I_0(a_0\varepsilon) + [\varepsilon^2(1-a_0^2) - 6]I_1(a_0\varepsilon)\} = 0$$

$$(p_0 = p(0)),$$

откуда видно, что $a_0 \rightarrow 1$ при $p_0 \rightarrow -\infty$ или $l \rightarrow \infty$ и $a_0 \rightarrow 0$ при $p_0 \rightarrow p_*^* = -6l^{-1}$.

Для невозрастающей нагрузки формулы (5.1)–(5.3) имеют место, если амплитуда нагрузки удовлетворяет неравенству

$$P_* > p_0 > P_*^*,$$

где p_*^* определяется из уравнения

$$(5.4) \quad p_*^* [6a_0 I_1(a_0\varepsilon) + 3(1-a_0^2)\varepsilon I_0(a_0\varepsilon) + \varepsilon^2(1-a_0)^2(2+a_0)I_1(a_0\varepsilon)] + 6\varepsilon A_1(a_0) = 0.$$

Можно видеть, что $p_*^* \rightarrow -\infty$ при $l \rightarrow \infty$ и $p_*^* \rightarrow p_*$ при $l \rightarrow l_* = 3\alpha^{-1}$.

В работе [4] приведены экспериментальные данные по зависимости остаточных прогибов от величины импульса взрывной нагрузки для шарнирно-опертой пластинки. Эксперименты были выполнены на пластинках из алюминиевого сплава Al 6061-T6 с параметрами $\sigma_0 = 28958 \cdot 10^4$ Н/м², $\rho = 2704$ кг/м³, $R = 10,16$ см, $H = 0,348$ см и из стали CRSteel 1018 с параметрами $\sigma_0 = 27234 \cdot 10^5$ Н/м², $\rho = 7829$ кг/м³, $R = 10,16$ см, $H = 0,315$ см. Отмечается, что импульс имел практически прямоугольную форму. В связи с этим при расчетах по формулам (5.1)–(5.4) примем для $p(\tau)$ аппроксимацию

$$(5.5) \quad p(\tau) = \begin{cases} p_0, & \tau < T, \\ p_0 + k(\tau - T), & T \leq \tau \leq T - p_0 k^{-1}, \\ 0, & \tau > T - p_0 k^{-1}. \end{cases}$$

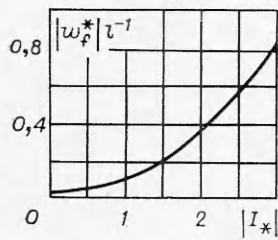
Полный импульс нагрузки при этом равен

$$I_* = p_0 T - p_0^2 (2k)^{-1}.$$

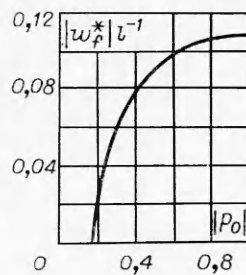
Уравнение (5.2) с начальным условием $a(0) = a_0$, определяемым из (5.3), решается численно по методу Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Необходимое при счете значение $\dot{a}(0)$, как можно убедиться из (5.2), воспользовавшись правилом Лопиталья, определяется по формуле

$$\dot{a}(0) = \dot{p}(0) A_1(a_0)(1-a_0) \{ \varepsilon(1+2a_0) I_0(a_0\varepsilon) + \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2(1-a_0^2) - 3 \right] I_1(a_0\varepsilon) \} \left[p_0 \frac{\partial I_1(a_0\varepsilon)}{\partial (a_0\varepsilon)} \varepsilon \varphi(a_0) \right]^{-1}.$$

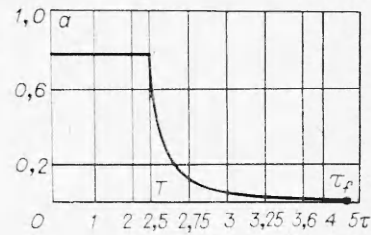
Для нагрузки рассматриваемого вида имеем $\dot{a}(0) = 0$. Некоторые результаты расчетов для пластинки из сплава Al6061-T6 при указанных выше значениях параметров и при $k = 300$ приведены на фиг. 3–5. аН фиг. 3



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

изображена зависимость максимального безразмерного остаточного прогиба в центре пластинки w_f^* от величины импульса I_* при фиксированном значении амплитуды нагрузки $p_0 = -0,5$. На фиг. 4 изображена зависимость w_f^* от амплитуды нагрузки p_0 при фиксированном значении импульса $I_* = -1$. Как видно из этого графика, остаточный прогиб пластинки существенно зависит не только от величины импульса, но также и от величины амплитуды нагрузки. Поэтому прямое сравнение полученных результатов численного расчета с данными экспериментов из [4] невозможно, так как в [4] приведены лишь значения импульсов и отсутствуют значения амплитуд нагрузок. На фиг. 5 изображена зависимость $\alpha(\tau)$ при значениях $I_* = -1$ и $p_0 = -0,4$, видно, что размер области, соответствующий пластическому режиму 3, 9 на фиг. 1, до момента времени $\tau = T$ (пока уровень нагрузки сохраняется) остается неизменным, резко уменьшаясь с падением нагрузки. Эта область исчезает лишь в момент остановки пластинки.

Поступила 17 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций. — В кн.: Механика, новое в зарубежной науке. Вып. 5. Проблемы динамики упругопластических сред. М., «Мир», 1975.
2. Parkes E. W. Some simple experiments on the dynamic plastic behaviour of mild-steel beams. — «Brit. Weld. J.», 1956, vol. 3, N 8, p. 36.
3. Mentel I. J. The plastic deformation due to impact of a cantilever beam with an attached tip mass. — «J. Appl. Mech.», 1958, vol. 25, N 4, p. 515—524.
4. Florence A. L. Circular plate under a uniformly distributed impulse. — «Int. J. Solids and Structures», 1966, vol. 2, N 1, p. 37—47.
5. Sawczuk A., Duszek M. A note on the interaction of shear and bending in plastic plates. — «Arch. mech. stosow.», 1963, vol. 15, N 3, p. 411—426.
6. Жук Н. П., Шаблий О. Н. О предельном равновесии оболочек вращения и круглых пластин с учетом напряжений сдвига. — ПМ, 1972, т. 8, вып. 7.
7. Жук Н. П., Шаблий О. Н. Предельное равновесие круглой пластинки с учетом напряжений сдвига. — ПМ, 1973, т. 9, вып. 6.
8. Шапиро Г. С. О поверхностях текучести для идеально пластических оболочек. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
9. Ванг В., Гопкине Г. О пластической деформации заделанной по краю круглой пластинки под действием импульсной нагрузки. — Сб. пер. Механика, 1955, № 3.