

3. Haas F. C., Nissan A. H. Experimental heat transfer characteristics of a liquid in Couette motion and with Taylor vortices.— Proc. Roy. Soc. A, 1961, vol. 261, p. 215.
4. Беккер, Кей. Изучение неадиабатического течения в кольцевом канале с внутренним вращающимся цилиндром.— Труды Америк. о-ва инж.-механ. Сер. С. Теплопередача, 1962, т. 84, № 2.
5. Колесов В. В., Овчинникова С. Н. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами с радиальным градиентом температуры.— Изв. Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Сер. Естественные науки, 1975, № 4.
6. Караманова Э. Э., Тер-Григорьянц Г. К. Расчет плоской стационарной конвекции.— Изв. Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Сер. Естественные науки, 1977, № 3.
7. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
8. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
9. Ли. Влияние термодиффузии на устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами.— Труды Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Ф. Технология смазки, 1977, т. 99, № 3.
10. Колесов В. В. Устойчивость неизотермического течения Куэтта.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1.

УДК 538.4

ИЗМЕНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ШАРА, ПРИВОДИМОГО В ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ СИЛАМИ

В. И. Шатров, В. И. Яковлев

(Новосибирск)

Задачам МГД-обтекания во внешних магнитных полях посвящено значительное число работ, обзор которых содержится в [1, 2].

Интерес представляет подобное исследование для тел с внутренними источниками электромагнитных полей. При этом электрическое и магнитное поля в жидкости создаются только в окрестности обтекаемого тела и, что особенно важно, существует возможность управления величиной и пространственным распределением объемных сил. Такие внутренние источники могут служить в качестве движителя, приводящего твердое тело в поступательное движение относительно жидкости. В этом случае вопрос о влиянии электромагнитных объемных сил (ЭОС) на картину течения и величину гидродинамического сопротивления особенно интересен.

Полное изучение вопроса возможно при объединении теоретических и экспериментальных исследований; чисто теоретическое (с помощью численных методов) исследование в настоящее время ограничено небольшими значениями числа Рейнольдса Re . Как показали расчеты [3], коэффициент гидродинамического сопротивления пластины, приводимой в движение в своей плоскости за счет ЭОС, выше своего классического значения. Это увеличение обусловлено ускорением жидкости в окрестности пластины и в рассмотренном примере ($Re \approx 230$) составляет почти 80%. В случае объемных тел влияние электромагнитных сил на коэффициент сопротивления менее предсказуемо. При этом ЭОС не только ускоряют жидкость в окрестности тела и тем самым увеличивают сопротивление трения, но наряду с этим обладают способностью восстанавливать давление в кормовой зоне и снижать сопротивление давления. От того, какой из этих двух процессов преобладает, зависит характер изменения коэффициента сопротивления под действием ЭОС.

Данная работа посвящена численному исследованию обтекания шара с внутренними источниками электромагнитных полей.

1. Пусть шар радиуса a обтекается потоком вязкой несжимаемой проводящей жидкости, u_0 — скорость потока на бесконечности, σ , ρ , ν — проводимость, плотность и кинематическая вязкость жидкости. Источник электромагнитного поля, находящийся внутри шара, создает в окружающей жидкости бегущее магнитное поле. Пусть θ -компонента поля \mathbf{H} на

внешней границе шара в сферической системе координат (r, θ, α) (r — безразмерный радиус, полученный с использованием a в качестве масштаба длины, угол θ отсчитывается от направления, противоположного вектору \mathbf{u}_0) задается в виде

$$(1.1) \quad H_\theta(1, \theta, t) = H_0 h_*(\theta) e^{-i(k\theta - \omega t)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

где H_0 — максимальная величина поля H_θ ; функция $h_*(\theta)$ характеризует распределение амплитуды бегущей волны по поверхности шара; $|h_*(\theta)|_{\max} = 1$; ω — частота; k — аналог волнового числа, определяющий число полуволн, укладываемых на поверхности шара в пределах $0 < \theta < \pi$, отношение ω/k определяет фазовую угловую скорость бегущей волны. Как видно из (1.1), поля \mathbf{E} , \mathbf{H} в системе не зависят от координаты α , поэтому рассматривается осесимметричная картина обтекания.

На рассматриваемый шар с внутренними токами, создающими бегущее магнитное поле, со стороны токов в жидкости действует сила, направленная против вектора \mathbf{u}_0 . Эта сила может служить источником движения, поэтому при достаточном H_0 шар является самодвижущимся. Задача заключается в определении электрического и магнитного полей \mathbf{E} , \mathbf{H} в жидкости, в исследовании влияния ЭОС на картину обтекания и величину коэффициента сопротивления при различных H_0 .

2. Определение электромагнитных полей в жидкости в общем случае проводится совместно с решением уравнений гидродинамики. В данной работе рассматривается простая ситуация, когда в законе Ома $\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + (1/c)\mathbf{V} \times \mathbf{H}]$ вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым и, таким образом, уравнения Максвелла отделить от уравнений гидродинамики. Это справедливо, если фазовая скорость бегущего поля * существенно превышает скорость жидкости относительно шара, т. е.

$$(2.1) \quad \omega a/k \gg u_0.$$

Следует заметить, что при условии (2.1) рассматриваемая электромагнитная система энергетически малоэффективна — джоулевы потери намного превышают полезную механическую работу электромагнитных объемных сил. Однако при исследовании изменений гидродинамического сопротивления за счет внутренних источников это обстоятельство не является определяющим.

Поля в жидкости определяются вектором-потенциалом $\mathbf{A}(r, \theta, t) = H_0 a \mathbf{A}(r, \theta) e^{i\omega t} \mathbf{e}_\alpha$, безразмерная функция $\mathbf{A}(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.2) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A) \right] - \frac{2i}{\delta^2} A = 0$$

($\delta = c(a\sqrt{2\pi\sigma\omega})^{-1}$ — безразмерная толщина скин-слоя) и граничным условиям

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} [rA(r, \theta)]|_{r=1} = -h_*(\theta) e^{-i\theta}, \quad A|_{r=\infty} = 0.$$

Представив граничную функцию в виде разложения по присоединенным функциям Лежандра $P_l^1(\cos \theta) = -\sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} P_l(\cos \theta)$, т. е.

$$h_*(\theta) e^{-i\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} d_l P_l^1(\cos \theta), \quad d_l = \frac{i l + 1}{2l(l+1)} \int_{-1}^1 h_*(\theta) e^{-i\theta} P_l^1(\cos \theta) d \cos \theta,$$

* О бегущем поле можно говорить, когда k , по крайней мере, не меньше единицы. Ниже в гидродинамических расчетах принято $k = 4$.

получим решение задачи (2.2), (2.3)

$$(2.4) \quad A(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \frac{1}{\sqrt{r}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(sr) P_l^1(\cos \theta), \quad b_l = \frac{d_l}{lH_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(s) - sH_{l-\frac{1}{2}}^{(2)}(s)},$$

где $s = (1 - i)/\delta$; $H_{\pm 1/2}^{(2)}$ — вторые функции Ханкеля полуцелого порядка.

При вычислении суммарной электромагнитной силы тяги, действующей на шар, необходимо знать распределение тока в источнике, обеспечивающее поле (1.4), и магнитное поле, создаваемое во всем пространстве токами \mathbf{j} в жидкости. Пусть источником бегущего магнитного поля являются поверхностные токи, распределенные по сфере $r = 1$, имеющие α -компоненту

$$(2.5) \quad i_{\alpha}(\theta, t) = cH_0 i_{*}(\theta) e^{-i(k\theta - \omega t)}.$$

Для определения связи функций $i_{*}(\theta)$ и $h_{*}(\theta)$ рассмотрим поля \mathbf{E} , \mathbf{H} внутри шара. Шар считается непроводящим и немагнитным, следовательно, вектор-потенциал внутри шара описывается уравнением, получающимся из (2.2) отбрасыванием последнего члена левой части. Решение этого уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$, имеет вид

$$(2.6) \quad A_1(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^{(1)} r^l P_l^1(\cos \theta).$$

Из граничных условий

$$A(1, \theta) = A_1(1, \theta), \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} (rA_1) \right|_{r=1} - \left. \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right|_{r=1} = 4\pi i_{*}(\theta) e^{-ik\theta}$$

получаем

$$(2.7) \quad 4\pi i_{*}(\theta) e^{-ik\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left[(2l+1) H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(s) - s H_{l-\frac{1}{2}}^{(2)}(s) \right] P_l^1(\cos \theta).$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля в жидкости и внутри шара описываются решениями соответственно (2.4), (2.6) (величины, относящиеся к пространству внутри шара, здесь и далее отмечаются индексом 1), распределение поверхностного тока задается соотношениями (2.5), (2.7). Магнитное поле от токов в жидкости определяется разностями $A(r, \theta) - A^0(r, \theta)$, $A_1(r, \theta) - A_1^0(r, \theta)$,

$$\text{где } A_1^0(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l r^l P_l^1(\cos \theta), \quad A^0(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l r^{-(l+1)} P_l^1(\cos \theta)$$

описывают поля, создаваемые током (2.4) в пустоте, причем

$$c_l = \frac{b_l}{2l+1} \left[(2l+1) H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(s) - s H_{l-\frac{1}{2}}^{(2)}(s) \right].$$

3. Электромагнитные объемные силы \mathbf{f} и ротор этих сил при условии (2.1) также вычисляются независимо от поля скоростей. Так как $\mathbf{f} = (\sigma/c)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, $\mathbf{E} = -(1/c)\partial A/\partial t = -(i\omega/c)H_0 a A(r, \theta)e^{i\omega t} \mathbf{e}_{\alpha}$, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, то результат приводится к виду

$$(3.1) \quad f_r = -f_0 \frac{1}{r} \text{Real} \left[iA \frac{\partial}{\partial r} (rA) e^{2i\omega t} - iA^* \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right],$$

$$f_{\theta} = f_0 \frac{1}{r \sin \theta} \text{Real} \left[-iA \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A) e^{2i\omega t} + iA^* \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A) \right], \quad f_{\alpha} = 0;$$

$$(3.2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = (f_0/a)[\Phi(r, \theta) + \Omega(r, \theta, t)] \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2}{r} \operatorname{Real} \left(i \frac{\partial A^*}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right), \quad \Omega(r, \theta, t) = \\ = \frac{1}{r} \operatorname{Real} \left[2iA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) e^{2i\omega t} \right],$$

где $f_0 = \sigma \omega H_0^2 a / 2c^2$ — масштаб плотности объемных сил; функция $A(r, \theta)$ определена в (2.4). Как видно из (3.1), (3.2), сила \mathbf{f} имеет как стационарную, так и осциллирующую (с частотой 2ω) составляющую. Электромагнитная сила тяги \mathbf{F} , действующая на шар, направленная против вектора \mathbf{u}_0 , состоит из аналогичных двух частей. Усредненную по времени величину этой силы можно представить в виде

$$(3.3) \quad \langle F \rangle = f_0 a^3 F_1(k, \delta).$$

При вычислении безразмерной силы $F_1(k, \delta)$ имеем в виду, что \mathbf{F} представляет собой векторную сумму сил, действующих на поверхностные токи (2.5) со стороны магнитного поля токов \mathbf{j} в жидкости. Отсюда следует выражение

$$(3.4) \quad F_1(k, \delta) = 8\pi^2 \delta^2 \operatorname{Real} \int_0^\pi \sin \theta \times \\ \times i_* (\theta) e^{-ik\theta} [h_{j\theta}(1, \theta) \cos \theta + h_{jr}(1, \theta) \sin \theta]^* d\theta, \\ h_{j\theta}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(A_1 - A_1^0)], \quad h_{jr}(r, \theta) = \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \theta} [\sin \theta \cdot (A_1 - A_1^0)].$$

С другой стороны, \mathbf{F} есть вектор, обратный равнодействующей ЭОС во всей жидкости (поэтому в качестве масштаба силы (3.3) взято произведение масштаба f_0 на характерный объем), следовательно,

$$F_1(k, \delta) = - \int_1^\infty \int_0^\pi \frac{1}{f_0} (\langle f_r \rangle \cos \theta - \langle f_\theta \rangle \sin \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr.$$

Вычисления проводились по формуле (3.4), а выражение через объемный интеграл использовалось для контроля вычислений. Результаты для случая $h_*(\theta) = \sin \theta$, $\delta = 2$ приведены в таблице. Используя параметр МГД-взаимодействия

$$(3.5) \quad N = \frac{1}{4} \frac{f_0 a}{\rho u_0^2 / 2} = \frac{\sigma \omega a^2 H_0^2}{4c^2 \rho u_0^2},$$

характеризующий отношение работы объемных сил к динамическому давлению, выражение (3.3) представим в виде

$$(3.6) \quad \langle F \rangle = (4/\pi) N \pi a^2 (\rho u_0^2 / 2) F_1(k, \delta).$$

4. Исследование картины обтекания сводится к решению уравнений гидродинамики

$$(4.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{W}, \\ \partial \mathbf{W} / \partial t - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{W}] + \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W} = (1/\rho) \operatorname{rot} \mathbf{f}$$

с объемными силами, ротор которых определен в (3.2). Наличие осциллирующего члена $\Omega(r, \theta, t)$ в роторе сил приводит к тому, что на стационарную картину течения будет накладываться малая (при условии (2.4)) нестационарная добавка *. Нас интересуют осредненные по времени поля скоростей и давлений, которые вычисляются без учета влияния реинольдсовых напряжений, обусловленных переменной составляющей скорости.

k	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
$F_1(k, 2)$	0,792	0,950	0,932	0,620	0,334	0,196	0,131	0,094

В этом случае система уравнений (4.1) эквивалентна уравнениям

$$(4.2) \quad E^2 \psi - rw \sin \theta = 0;$$

$$(4.3) \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w}{r \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r \sin \theta} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r \sin \theta} E^2 (r \sin \theta \cdot w) + N \Phi(r, \theta) = 0$$

для безразмерной функции тока $\psi(r, \theta)$ и завихренности $w(r, \theta)$, введенных соотношениями

$$\mathbf{V} = u_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right], \quad \mathbf{W} = \frac{u_0}{a} w(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha.$$

Здесь $\text{Re} = u_0 2a/\nu$ — число Рейнольдса; параметр N определен в (3.5); оператор $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$. По найденному полю скоростей распределение давления P восстанавливается из уравнения движения

$$(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -(1/\rho) \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + (1/\rho) \mathbf{f}.$$

Результат для распределения безразмерного давления $p = P/(\rho u_0^2/2)$ по поверхности шара принимает вид

$$(4.4) \quad p(\theta) = p_0 + \frac{4}{\text{Re}} \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial r} (rw) \Big|_{r=1} d\theta + 4N \frac{1}{f_0} \int_0^\theta \langle f_\theta(1, \theta) \rangle d\theta,$$

$$p_0 = 1 + \frac{8}{\text{Re}} \int_1^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} dr,$$

где p_0 — давление в передней критической точке $r = 1, \theta = 0$ (давление на бесконечности принято равным нулю); $(1/f_0) \langle f_\theta(1, \theta) \rangle$ — усредненная по времени безразмерная θ -компонента объемных сил на поверхности шара. Согласно (3.1), $\frac{1}{f_0} \langle f_\theta(r, \theta) \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \text{Real} \left[iA^* \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A) \right]$.

5. Численное решение полученных уравнений проводилось по методу установлений [4], при этом вместо r вводилась новая независимая переменная $z = \ln r$. В переменных (z, θ) уравнения (4.2), (4.3) приобретают вид

$$L\psi - qe^{2z} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{2} e^{-2z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \frac{1}{\sin \theta} e^{-3z} Lq - \text{Re} N \Phi(e^z, \theta) = 0,$$

где $L = \partial^2/\partial z^2 - \partial/\partial z + \partial^2/\partial \theta^2 - \text{ctg} \theta (\partial/\partial \theta)$; q, χ — вспомогательные величины, связанные с завихренностью:

$$q = wr \sin \theta, \quad \chi = (1/r \sin \theta)w.$$

* Отношение масштаба осциллирующей компоненты завихренности к масштабу ее стационарной составляющей определяется отношением двух характерных времен: периода $1/\omega$ колебаний $\Omega(r, \theta, t)$ и времени пребывания жидкой частицы в поле сил a/u_0 . Это отношение равно $u_0/a\omega$ и на основании (2.1) существенно меньше единицы,

Область определения искомых функций представляет полуполосу $0 \leq \theta \leq \pi$, $z \geq 0$, которая при численном решении заменяется на прямоугольник с границей $z = z_m$. В плоскости (z, θ) используется равномерная сетка как по z ($\Delta z = z_m/N_1$), так и по θ ($\Delta \theta = \pi/N_2$). Равномерному разбиению отрезка $0 \leq z \leq z_m$ соответствует неравномерная сетка в физической плоскости (r, θ) , наиболее сгущенная вблизи поверхности шара, где течение характеризуется максимальными градиентами, и менее густая вдали от шара.

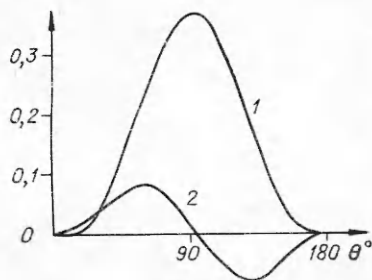
На границах $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $z = z_m$ использовались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad w = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta = \pi; \\ w &= 0, \quad \psi = (1/2)e^{2z}\sin^2\theta \quad \text{при } z = z_m, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2; \\ w &= 0, \quad \partial\psi/\partial x = 0 \quad \text{при } z = z_m, \quad \pi/2 < \theta < \pi, \end{aligned}$$

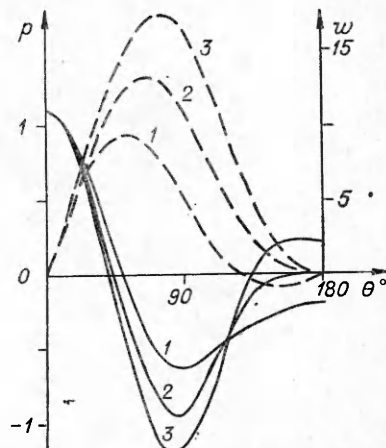
где x совпадает с осью симметрии. На твердой границе использовались условие $\psi = 0$ и граничное условие [5] с процедурой релаксации [6] для завихренности.

Расчеты проводились при сетке с $N_1 = 70$, $N_2 = 50$, внешняя граница области задавалась величиной $z_m = 2$, т. е. представляла сферу с радиусом, в 7,4 раза превышающим радиус шара. Погрешности, обусловленные сравнительной грубостью сетки и близостью внешней границы, оценивались из сравнения получаемых при отсутствии электромагнитных полей результатов для $Re = 100$ с данными работы [7], полученными при $N_1 = 100$, $N_2 = 60$, $z_m = 2,5$. Оказалось, что ошибка в величине завихренности на поверхности шара не достигает 1%. С наибольшей ошибкой вычисляется распределение давления в области отрыва, и максимальная относительная ошибка (отношение абсолютной ошибки к давлению в лобовой точке), имеющая место в точке $\theta = \pi$, $r = 1$, достигает 1,6%. В связи с этим ошибка в коэффициенте сопротивления давления тоже значительна и составляет 1,8%. Коэффициент сопротивления трения вычисляется с ошибкой 0,5%, а относительная погрешность общего коэффициента сопротивления составляет 0,8%. Погрешность вычисления общего коэффициента сопротивления для $Re = 300$ составила 1,3%, при этом внешняя граница была приближена до $z_m = 1,5$ для уменьшения шага сетки по z .

6. Вычисления проводились при $\delta = 2$, $k = 4$ для функции $h_*(\theta) = \sin \theta$, при которой амплитуда бегущей волны максимальна в экваториальной плоскости. Получающиеся при этом распределения безразмерных θ и r -компонент объемных сил по поверхности шара приведены на фиг. 1. Здесь кривая 1 изображает зависимость $(1/f_0)\langle f_\theta(1, \theta) \rangle$, 2 — $(1/f_0)\langle f_r(1, \theta) \rangle$. Видно, что силы \mathbf{f} имеют в основном то направление (совпадающее с \mathbf{e}_θ), которое интуитивно представляется необходимым для предотвращения отрыва потока.



Ф и г. 1



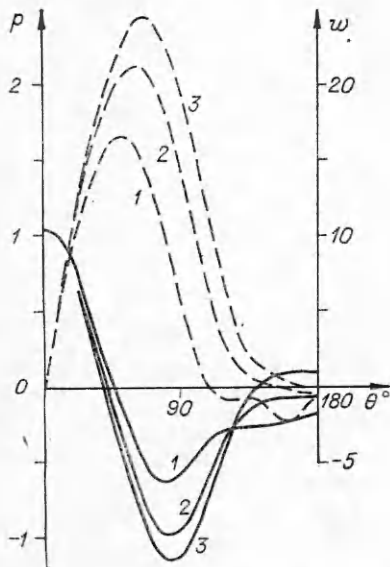
Ф и г. 2

На фиг. 2 приведены распределения давления (сплошные линии) и завихренности (штриховые линии) по поверхности шара при $Re = 100$ для значений $N = 0; 2; 4$ (кривые 1—3 соответственно). Аналогичные зависимости для $Re = 300$ представлены на фиг. 3 (кривые 1—3 соответственно $N = 0; 1; 1,75$). Видно, что наличие ЭОС слабо сказывается на параметрах потока вблизи лобовой точки шара и оказывает наибольшее влияние в кормовой зоне. При увеличении N точка отрыва отодвигается назад и исчезает, а давление в кормовой зоне увеличивается, что приводит к уменьшению сопротивления давления. Завихренность w на поверхности шара при увеличении N растет, увеличивая сопротивление трения. На фиг. 4 зависимости коэффициентов сопротивления трения c_f (штриховые линии), сопротивления давления c_p (штрихпунктирные линии) и суммарного коэффициента сопротивления $c_d = c_f + c_p$ (сплошные линии) от параметра N даны для всех рассматриваемых значений Re . Цифрами 1—4 отмечены кривые, относящиеся соответственно к $Re = 50; 100; 200; 300$. Видно, что при $Re = 50$ c_d растет с увеличением N наиболее быстро. При увеличении Re этот рост замедляется, и при $Re = 300$ коэффициент сопротивления практически перестает зависеть от N . Объяснение подобного поведения зависимости $c_d(N)$ заключается в уменьшении относительного веса сопротивления трения в общем сопротивлении при увеличении числа Рейнольдса.

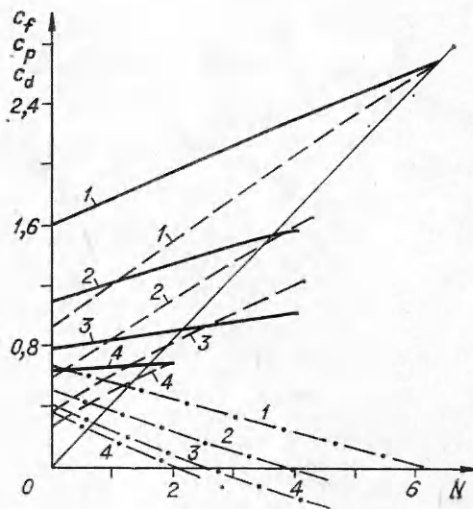
Значение параметра $N = N_*$, при котором шар становится самодвижущимся, определяется из условия равенства силы тяги (3.6) и силы сопротивления $\rho a^2 (\rho u_0^2 / 2) c_d(N)$, т. е. из условия

$$c_d(N) = (4/\pi)F_1(k, \delta)N.$$

На фиг. 4 тонкой линией нанесена прямая $y(N) = (4/\pi)F_1(4, 2)N$, пересечение которой с кривой $c_d(N)$ определяет искомые значения N_* . Видно, что при $Re = 50$ $N_* \simeq 6,7$ и $c_d(N_*) \simeq 2,85$, т. е. сопротивление самодвижущегося шара в 1,78 раз выше сопротивления при классическом обтекании. При $Re = 100; 200; 300$ рассматриваемые величины равны соответственно $N_* \simeq 3,6$, $c_d(N_*) \simeq 1,52$; $N_* \simeq 2,1$, $c_d(N_*) \simeq 0,9$ и $N_* \simeq 1,6$, $c_d(N_*) \simeq 0,68$. Таким образом, уже при $Re = 300$ коэффициент сопротивления шара, приводимого в движение рассматриваемыми электромагнит-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

ными силами, лишь незначительно превышает величину $cd(0) = 0,64$ коэффициента сопротивления при классическом обтекании. Это обстоятельство позволяет надеяться, что при больших значениях Re сопротивление при МГД-обтекании может принимать меньшие, чем при классическом обтекании, значения, как предполагается в работе [8]. Следует подчеркнуть, что для этого электрические и магнитные поля должны создаваться источником, расположенным вблизи (внутри) обтекаемого тела. В случае обтекания во внешнем магнитном поле наличие поля всегда приводит к увеличению как сопротивления давления, так и суммарного гидродинамического сопротивления [1, 2].

Авторы выражают признательность В. И. Меркулову и Н. Н. Яненко за стимулирующие обсуждения работы.

Поступила 5 VIII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970.
2. Цинобер А. Б. МГД-обтекание тел. Рига: Зинатне, 1970.
3. Хоничев В. И., Яковлев В. И. Движение плоской пластины конечной ширины в проводящей вязкой жидкости, вызванное электромагнитными силами. — ПМТФ, 1980, № 1.
4. Lin C. L., Lee S. C. Transient state analysis of separated flow around a sphere. — Computers and Fluids, 1973, vol. 1, N 3.
5. Кускова Т. В. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 7. М.: изд. Моск. ун-та, 1967.
6. Таруни Е. Л. Оптимизация неявных схем для уравнений Навье — Стокса в переменных функциях тока и вихря скорости. — В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Ч. 1. Новосибирск, 1975.
7. Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R. A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers. — J. Atmos. Sci., 1970, vol. 27, N 2.
8. Меркулов В. И. Движение сферы в проводящей жидкости под действием скрещенных электрического и магнитного полей. — Магнитная гидродинамика, 1973, № 1.

УДК 538.4

МЕДЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО ШАРА, СОДЕРЖАЩЕГО ВРАЩАЮЩИЙСЯ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

В. И. Шатров
(Новосибирск)

В ряде работ (см., например, [1, 2]) исследовалось течение несжимаемой вязкой жидкости около вращающегося шара, а также МГД-течение около медленно вращающегося шара [3, 4]. В [5, 6] рассмотрены примеры вихревых течений, возникающих в проводящей несжимаемой жидкости под действием электромагнитного поля, создаваемого переменным диполем, расположенным внутри непроводящего шара. В [5] диполь расположен в центре шара, в [6] смещен относительно центра, что привело к движению шара относительно покоящейся на бесконечности жидкости. В данной работе решена задача о медленном течении проводящей несжимаемой вязкой жидкости около шара, содержащего вращающийся магнитный диполь. Жидкость занимает все бесконечное пространство вне шара радиуса a , как и в [5, 6]. Задача решена для случая малых гидродинамического и магнитного чисел Рейнольдса. Решение содержит два члена разложения Стокса.