УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Д. А. Пожарский, Н. Б. Золотов

Донской государственный технический университет, 344000 Ростов-на-Дону, Россия
E-mails: pozharda@rambler.ru, zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Изучаются пространственные периодические контактные задачи о бесконечных прямолинейных цепочках штампов, действующих на грань трансверсально-изотропного упругого слоя, другая грань которого находится в условиях скользящей заделки. Плоскости изотропии параллельны или перпендикулярны граням слоя. Для решения контактных задач применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Выполнены расчеты для известных трансверсально-изотропных материалов.

Ключевые слова: периодический контакт, трансверсальная изотропия, слой.

DOI: 10.15372/PMTF20220620

Введение. Актуальность контактных задач и задач механики анизотропных материалов обусловлена тем, что в инженерных приложениях часто встречаются периодические профили, возникающие после машинной обработки поверхности [1–3]. При этом волнистость вдоль средней линии может приводить к появлению линейно-периодической цепочки пятен контакта. Ранее для трансверсально-изотропных тел исследовались контактные задачи о действии штампа на слой (плоскости изотропии параллельны его граням) [4], а также на полупространство (плоскости изотропии перпендикулярны его границе) [5, 6]. Изучалась задача о периодической системе круговых штампов на изотропном слое [7]. Для решения периодических контактных задач для круговых инденторов разработан метод локализации [8, 9]. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений применялся при исследовании прямолинейной цепочки штампов на неоднородном по толщине слоя [10]. Рассматривались двоякопериодические контактные задачи [11, 12]. Численно исследовалось упругое взаимодействие двумерной волнистой поверхности и полупространства, сдавливаемых до полного контакта [13]. В области периодического контакта учитывалось влияние сложных явлений (трение, адгезия, износ) [14, 15], которые возникают на разных масштабных уровнях [16]. В большинстве работ, посвященных исследованию периодического контакта, рассматривались плоские задачи [17]. Целью настоящей работы является получение и решение новых интегральных уравнений периодических контактных задач для трансверсально-изотропного слоя при различной ориентации плоскостей изотропии. В случае, когда плоскости изотропии параллельны граням слоя, ядро интегрального уравнения можно представить в двух эквивалентных формах, методика получения одной из которых предложена ранее [11]. В случае, когда плоскости изотропии перпендикулярны граням

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013).

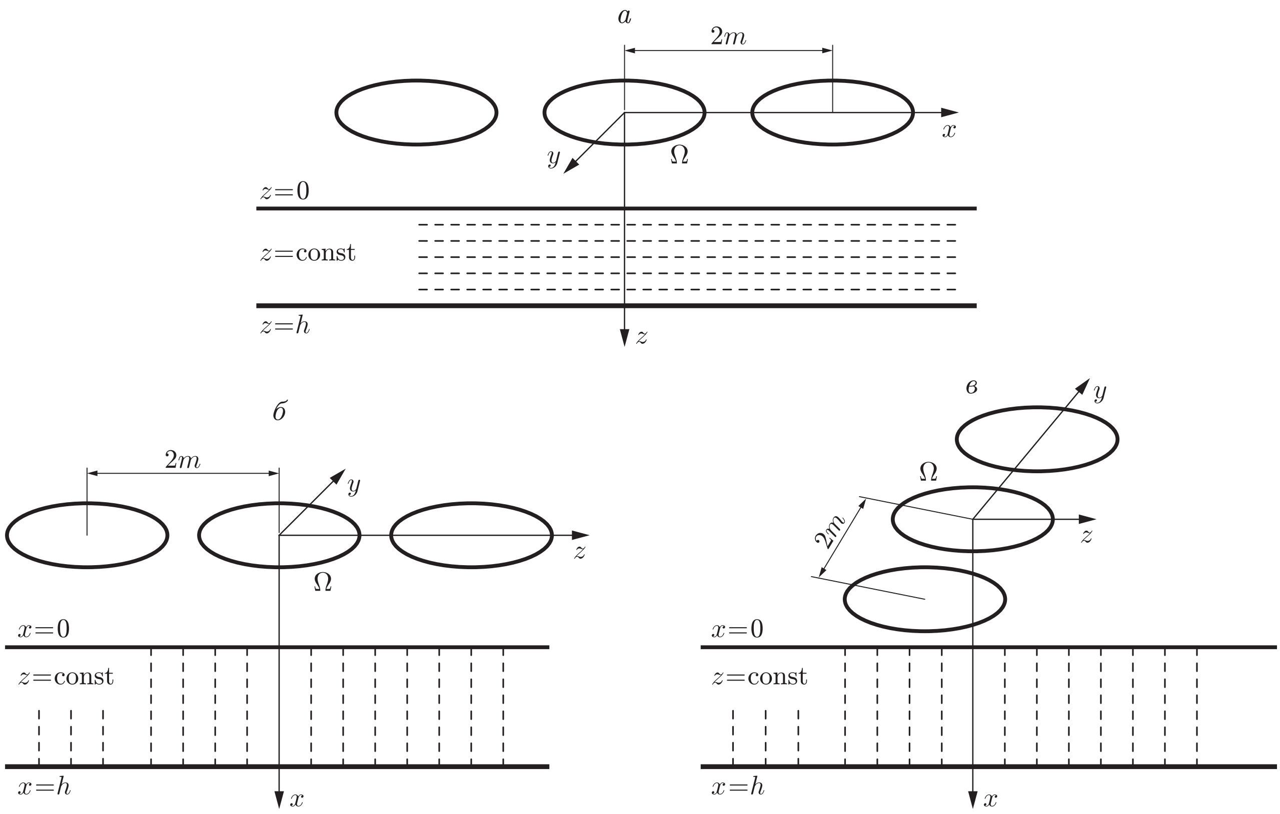

Рис. 1. Схемы контакта штампов со слоем в задаче 1 (*а*), задаче 2 (*б*), задаче 3 (*в*)

слоя, а функции-символы ядер интегральных уравнений становятся несимметричными, рассматривается два варианта ориентации цепочек штампов.

Постановка задач. Ниже исследуются три задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропный упругий слой $\{|x| < \infty,\ |y| < \infty,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$, на верхней грани которого находится периодическая система одинаковых жестких штампов, распределенных вдоль оси x с периодом $2m$. Начало координат находится в области контакта Ω под штампом с формой основания $f(x, y)$. Плоскости изотропии $z = \mathrm{const}$ параллельны граням слоя (задача 1, рис. 1,*а*). Нижняя грань слоя лежит без трения на недеформируемом основании (скользящая заделка). К штампам приложены силы P, осадка штампов равна δ, перекос отсутствует. Рассмотрим две аналогичные задачи для слоя $\{0 \leqslant x \leqslant h,\ |y| < \infty,\ |z| < \infty\}$, которые отличаются от задачи 1 направлением осей координат и тем, что плоскости изотропии $z = \mathrm{const}$ перпендикулярны граням слоя (рис. 1,*б*,*в*). В задаче 2 ось периодической цепочки штампов совпадает с осью z, а в задаче 3 — с осью y. Для всех трех задач закон Гука приведен в работе [5]. В задаче 1 граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} z = 0\colon \quad u_z = \delta - f^*(x, y),\ (x, y) \in \Omega^*, \qquad \sigma_z = 0,\ (x, y) \notin \Omega^*, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\ z = h\colon \qquad u_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

а в задачах 2, 3 —

$$\begin{gathered} x = 0\colon \quad u_x = \delta - f^*(y, z),\ (y, z) \in \Omega^*, \qquad \sigma_x = 0, \quad (y, z) \notin \Omega^*, \qquad \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0, \\ x = h\colon \qquad u_x = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

(Ω^* — объединенная область контакта, в которой формы штампов описываются функцией f^*).

При заданных параметрах упругости A_{mn} [5], известных величинах h, m, δ и функции $f(x,y)$ (задача 1) или $f(y,z)$ (задачи 2, 3) требуется определить область контакта Ω и контактное давление $\sigma_z(x,y,0) = -q(x,y)$ ($(x,y) \in \Omega$ для задачи 1) или $\sigma_x(0,y,z) = -q(y,z)$ ($(y,z) \in \Omega$ для задач 2, 3). Затем с использованием интегрального условия равновесия штампов может быть найдена сила P.

Интегральные уравнения. Для сведения задач с граничными условиями (1), (2) к интегральным уравнениям (ИУ) следует рассмотреть вспомогательные задачи типа задачи Буссинеска о действии заданной сосредоточенной силы на грани слоя при различных ориентациях плоскостей изотропии. Решения таких задач находятся с помощью двойных преобразований Фурье. В результате для задачи 1 с учетом периодичности расположения штампов получаем ИУ ($(x,y) \in \Omega$)

$$\iint\limits_{\Omega} q(x_0,y_0)K(x-x_0,y-y_0)\,dx_0\,dy_0 = 2\pi\theta h[\delta - f(x,y)], \tag{3}$$

где

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{L(r)}{r}\cos\Big(\xi\,\frac{x+2km}{h}\Big)\cos\Big(\eta\,\frac{y}{h}\Big)\,d\xi\,d\eta; \tag{4}$$

$$L(r) = \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1\operatorname{cth}(r/\gamma_1) - \gamma_2\operatorname{cth}(r/\gamma_2)}, \qquad \theta = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{A_{11}(\gamma_1+\gamma_2)}, \qquad r = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Для задач 2 ($n = 1$) и 3 ($n = 2$) аналогичное уравнение имеет вид ($(y,z) \in \Omega$)

$$\iint\limits_{\Omega} q(y_0,z_0)K_n(y-y_0,z-z_0)\,dy_0\,dz_0 = 2\pi A_{66}h[\delta - f(y,z)], \tag{5}$$

где

$$K_1(y,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M(\xi,\eta)\cos\Big(\xi\,\frac{z+2km}{h}\Big)\cos\Big(\eta\,\frac{y}{h}\Big)\,d\xi\,d\eta; \tag{6}$$

$$K_2(y,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M(\xi,\eta)\cos\Big(\xi\,\frac{z}{h}\Big)\cos\Big(\eta\,\frac{y+2km}{h}\Big)\,d\xi\,d\eta; \tag{7}$$

$$M(\xi,\eta) = \frac{(m_2-m_1)\gamma_3^2\xi^2\zeta_1\zeta_2}{D},$$

$$D = m_2h_1^2\zeta_2\operatorname{cth}\zeta_1 - m_1h_2^2\zeta_1\operatorname{cth}\zeta_2 + 4(m_1-m_2)\eta^2\zeta_1\zeta_2\zeta_3\operatorname{cth}\zeta_3,$$

$$m_l = \frac{A_{11}\gamma_l^2 - A_{44}}{A_{13}+A_{44}}, \quad h_l = (m_l+1)\gamma_3^2\xi^2 + 2\eta^2 \ (l = 1,2), \quad \zeta_l = \sqrt{\gamma_l^2\xi^2+\eta^2} \ (l = 1,2,3),$$

γ_l ($l = 1,2$) — корни характеристического уравнения [2, 5]

$$\gamma^4A_{11}A_{44} - \gamma^2[A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13}+2A_{44})] + A_{33}A_{44} = 0, \qquad \gamma_3 = \sqrt{A_{44}/A_{66}}.$$

В силу положительной определенности матрицы упругих постоянных $\theta > 0$ [2]. В случае изотропного материала в формулах (3), (4) с учетом пределов

$$\lim_{\gamma_1\to\gamma_2\to1} L(r) = L_1(r) = \frac{\operatorname{ch}2r - 1}{\operatorname{sh}2r + 2r}, \qquad \lim_{\gamma_1\to\gamma_2\to1}\theta = \frac{G}{1-\nu}$$

(G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона) получаем известное ядро ИУ контактной задачи для изотропного слоя [18]. Возможен аналогичный предельный переход в задаче (5)–(7).

При $h \to \infty$ после соответствующих замен переменных интегрирования функции-символы ядер уравнений (4), (6), (7) переходят в известные для транстропного полупространства (функция-символ $L(r)$ стремится к единице, в функции-символе $M(\xi,\eta)$ исчезают котангенсы) [4–6]. При этом меняются значения функций-символов в начале координат и ряды в ядрах расходятся. Таким образом, корректность поставленных периодических задач обеспечена заделкой нижней грани слоя.

Для функции-символа в задаче 1 имеет место асимптотика

$$L(r) - 1 = O(\mathrm{e}^{-2/\gamma_1}) \qquad (r \to \infty, \quad \gamma_1 > \gamma_2). \tag{8}$$

В отличие от задачи 1 в задачах 2, 3 функции-символы несимметричны: $M(\xi,\eta) \neq M(\eta,\xi)$, но обладают важным асимптотическим свойством: их поведение на бесконечности по одному из аргументов зависит от поведения в нуле по другому аргументу. Если один из аргументов фиксирован, то

$$\begin{aligned} &M(\xi,\eta) \to \frac{B_1}{\eta} L_1(\eta) \quad (\xi \to 0), \qquad M(\xi,\eta)\xi \to B_2 \quad (\xi \to \infty), \\ &M(\xi,\eta) \to \frac{B_2}{\xi} L_2(\xi) \quad (\eta \to 0), \qquad M(\xi,\eta)\eta \to B_1 \quad (\eta \to \infty), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$B_1 = \frac{\gamma_3^2(m_2 - m_1)}{2(\gamma_3^2(m_2 - m_1) - m_2\gamma_1^2 + m_1\gamma_2^2)}, \qquad B_2 = \frac{\gamma_1\gamma_2(m_2 - m_1)}{\gamma_3^2(m_1 + m_2 + 2)(\gamma_2 - \gamma_1)},$$

$$L_2(\xi) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2\xi) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\gamma_1\xi)}.$$

Метод решения. Дополним ИУ (3), (5) условием отсутствия контакта вне области Ω и условием положительности контактного давления в Ω. Применяя метод нелинейных граничных ИУ [19], сведем их и граничные условия к эквивалентным нелинейным ИУ по заданному прямоугольнику S со сторонами $2a$ и $2b$ соответственно поперек и вдоль оси цепочки штампов ($b \geqslant a$), содержащему область Ω. Для численного решения нелинейных ИУ в области S используем модифицированный метод Ньютона, при этом область Ω определяется точками S, в которых решение положительно. В нелинейные уравнения входят ядра (4), (6), (7), которые требуется рассчитать в узлах решетки в S. Представим эти ядра в форме, удобной для расчетов.

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} &x_* = \frac{x}{b}, \quad y_* = \frac{y}{b}, \quad z_* = \frac{z}{b}, \quad q_*(x_*,y_*) = \frac{q(x,y)}{2\pi\theta}, \quad q_*(y_*,z_*) = \frac{q(y,z)}{2\pi A_{66}}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \\ &\delta_* = \frac{\delta}{b}, \quad \lambda = \frac{h}{b}, \quad \mu = \frac{m}{b}, \quad f_*(x_*,y_*) = \frac{f(x,y)}{b}, \quad f_*(y_*,z_*) = \frac{f(y,z)}{b}, \quad \Omega \to \Omega_* \end{aligned} \tag{10}$$

(индекс “$*$” далее опускается). Параметр λ характеризует относительную толщину слоя, параметр $\mu \geqslant 1$ — относительное расстояние между соседними областями контакта. Используя обозначения (10), соотношение [20]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\Bigl(\xi\,\frac{x + 2k\mu}{\lambda}\Bigr) = 2\pi\cos\Bigl(\xi\,\frac{x}{\lambda}\Bigr) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Bigl(\frac{2\xi\mu}{\lambda} - 2\pi k\Bigr), \tag{11}$$

свойства δ-функции Дирака $\delta(x)$ и замену $\xi = t\pi_k\lambda$ ($\pi_k = \pi k/\mu$), запишем ядро (4) для задачи 1 в виде

$$K(x,y) = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \frac{L(t)}{t}\cos\Big(t\,\frac{y}{\lambda}\Big)\,dt + \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^\infty \cos(\pi_k x)\int\limits_0^\infty \frac{L(\pi_k\lambda\sqrt{1+t^2}\,)}{\sqrt{1+t^2}}\cos(\pi_k y t)\,dt. \qquad (12)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (12) совпадает с ядром ИУ соответствующей плоской контактной задачи для слоя. Его главная логарифмическая часть сокращается в силу формул [21, 22]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ty) - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = -\ln|y|, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos(ty)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = K_0(y),$$

$$\sum_{k=1}^\infty K_0(ky)\cos(kx) = \frac{\pi}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\Big(C + \ln\frac{y}{4\pi}\Big) + {} \qquad (13)$$

$$+ \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{(2\pi k - x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi k + x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\pi k}\Big),$$

где $K_0(y)$ — функция Бесселя; C — постоянная Эйлера. С использованием равенств (13) улучшим сходимость интегралов и рядов в ядре (12), выделяя главную часть с учетом асимптотики (8):

$$K(x,y) = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \Big[(L(t)-1)\cos\Big(t\,\frac{y}{\lambda}\Big) + \mathrm{e}^{-t}\Big]\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{\mu}\Big(C + \ln\frac{\lambda}{4\mu}\Big) + {}$$

$$+ \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^\infty \cos(\pi_k x)\int\limits_0^\infty \frac{L(\pi_k\lambda\sqrt{1+t^2}) - 1}{\sqrt{1+t^2}}\,\cos(\pi_k y t)\,dt + {}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{(2\mu k - x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\mu k + x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\mu k}\Big). \qquad (14)$$

Ядро $K(x,y)$ в задаче 1 можно представить в эквивалентной форме, введя функцию [11]

$$M(t) = L(t) - 1 + \mathrm{e}^{-2/\gamma_1}, \qquad \gamma_1 > \gamma_2.$$

Для задачи 2 преобразуем ядро (6) на основе соотношений (10), (11), (13) и асимптотик (9) к форме

$$K_1(y,z) = \frac{B_1}{\mu}\int\limits_0^\infty \Big[(L_1(t)-1)\cos\Big(t\,\frac{y}{\lambda}\Big) + \mathrm{e}^{-t}\Big]\,\frac{dt}{t} + \frac{B_1}{\mu}\Big(C + \ln\frac{\lambda}{4\mu}\Big) + {}$$

$$+ \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^\infty \cos(\pi_k z)\int\limits_0^\infty \Big(M_1(t) - \frac{B_1}{\sqrt{1+t^2}}\Big)\cos(\pi_k y t)\,dt + \frac{B_1}{\sqrt{y^2+z^2}} + {}$$

$$+ B_1\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{(2\mu k - z)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\mu k + z)^2 + y^2}} - \frac{1}{\mu k}\Big), \qquad (15)$$

$$M_1(t) = (m_2 - m_1)\gamma_3^2\zeta_{11}\zeta_{21}/D_1,$$
$$D_1 = m_2 h_{11}^2 \zeta_{21} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{11}) - m_1 h_{21}^2 \zeta_{11} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{21}) + 4(m_1 - m_2) t^2 \zeta_{11}\zeta_{21}\zeta_{31} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{31}),$$
$$h_{l1} = (m_l + 1)\gamma_3^2 + 2t^2 \quad (l = 1, 2), \qquad \zeta_{l1} = \sqrt{\gamma_l^2 + t^2} \quad (l = 1, 2, 3).$$

Для задачи 3 аналогично получаем

$$K_2(y,z) = \frac{B_2}{\mu}\int\limits_0^\infty \Big[(L_2(t) - 1)\cos\Big(t\,\frac{z}{\lambda}\Big) + \mathrm{e}^{-t}\Big]\,\frac{dt}{t} + \frac{B_2}{\mu}\Big(C + \ln\frac{\lambda}{4\mu}\Big) +$$
$$+ \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(\pi_k y)\int\limits_0^\infty\Big(M_2(t) - \frac{B_2}{\sqrt{1+t^2}}\Big)\cos(\pi_k z t)\,dt + \frac{B_2}{\sqrt{y^2+z^2}} +$$
$$+ B_2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{(2\mu k - y)^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\mu k + y)^2 + z^2}} - \frac{1}{\mu k}\Big), \qquad (16)$$
$$M_2(t) = (m_2 - m_1)\gamma_3^2 t^2 \zeta_{12}\zeta_{22}/D_2,$$
$$D_2 = m_2 h_{12}^2 \zeta_{22} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{12}) - m_1 h_{22}^2 \zeta_{12} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{22}) + 4(m_1 - m_2)\zeta_{12}\zeta_{22}\zeta_{32} \operatorname{cth}(\pi_k \lambda \zeta_{32}),$$
$$h_{l2} = (m_l + 1)\gamma_3^2 t^2 + 2 \quad (l = 1, 2), \qquad \zeta_{l2} = \sqrt{\gamma_l^2 t^2 + 1} \quad (l = 1, 2, 3).$$

При $\mu \to \infty$ ядра (14)–(16) переходят в ядра соответствующих контактных задач для одного штампа. Ядра (15), (16) содержат ядра соответствующих плоских контактных задач. При этом характерные для плоских задач логарифмические особенности сокращаются в силу (9). Ряд-интеграл в формуле (14) сходится при любых x, y, требуется регуляризация только особого члена $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ при $x = y = 0$. В отличие от задачи 1 в задачах 2, 3 в рядах-интегралах требуется дополнительная регуляризация при $y = 0$ (в формуле (15)) и $z = 0$ (в формуле (16)), поскольку подынтегральные функции убывают по закону t^{-2} $(t \to \infty)$. При $y \neq 0$ (в формуле (15)) и $z \neq 0$ (в формуле (16)) ряды-интегралы сходятся быстро, так как при $k \to \infty$ интегралы убывают по экспоненциальному закону. Для вычисления этих интегралов рекомендуется разбивать промежуток интегрирования по нулям подынтегрального косинуса и рассчитывать эти интегралы отдельно на каждом интервале.

Численный анализ. Для расчетов выбраны следующие трансверсально-изотропные материалы (параметры упругости A_{ij} приведены в [1. С. 22–23]): древесина, в частности ель Дугласа ($\gamma_1^2 = 13{,}79$, $\gamma_2^2 = 0{,}1227$, $\gamma_3^2 = 0{,}7101$, $m_1 = 76{,}22$, $m_2 = 1/m_1$), и гнейс влажный ($\gamma_1^2 = 2{,}627$, $\gamma_2^2 = 0{,}2999$, $\gamma_3^2 = 0{,}5660$, $m_1 = 4{,}085$, $m_2 = 1/m_1$). В качестве штампов используются эллиптические параболоиды $f(x,y) = Ax^2 + By^2$ (задача 1) и $f(y,z) = Ay^2 + Bz^2$ (задачи 2, 3). На рис. 2, 3 показаны зависимости безразмерной интегральной характеристики контактных давлений $P_0 = P/\theta$ от осадки δ и относительной толщины слоя λ $(\varepsilon = 1)$ соответственно. Видно, что величина P_0 существенно зависит как от материала слоя, так и от положения плоскостей изотропии. Для гнейса влажного (задачи 2, 3) с ростом δ или λ может меняться направление оси периодической цепочки на грани слоя, вдоль которого требуется меньшая сила P для внедрения штампов. Для транстропного полупространства, в случае когда плоскости изотропии перпендикулярны его границе (задачи 2, 3 при $\lambda \to \infty$), решение задачи типа задачи Буссинеска (нормальное перемещение точек границы под действием нормальной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат) получается в форме, свободной от квадратур [6]. Имея

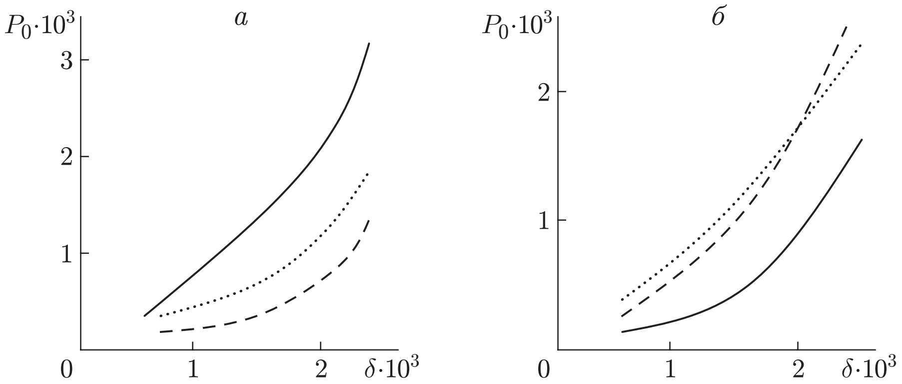

Рис. 2. Зависимость $P_0(\delta)$ для древесины (*а*) и гнейса влажного (*б*) при $\lambda = 2$, $\mu = 1{,}1$, $A = B = 10^{-3}$:
сплошные линии — задача 1, штриховые — задача 2, пунктирные — задача 3

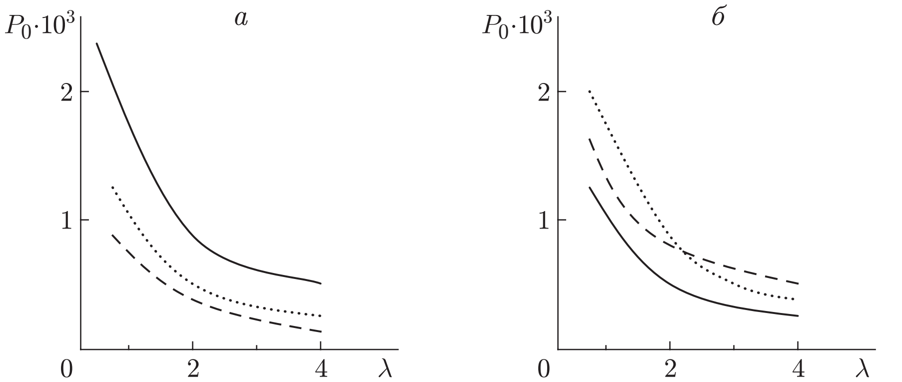

Рис. 3. Зависимость $P_0(\lambda)$ для древесины (*а*) и гнейса влажного (*б*) при $\mu = 1{,}1$, $\delta = A = B = 10^{-3}$:
сплошные линии — задача 1, штриховые — задача 2, пунктирные — задача 3

такое решение, нетрудно показать, что для точек, равноудаленных от начала координат, нормальные перемещения вдоль оси y могут быть меньше перемещений вдоль оси z (древесина ели), и наоборот (гнейс влажный). Этим объясняется пересечение кривых на рис. 3,*б* для задач 2, 3 при достаточно больших λ. Вдавливающая сила возрастает при увеличении осадки (см. рис. 2), а также при уменьшении λ вследствие увеличения влияния скользящей заделки нижней грани слоя (см. рис. 3). Как показывают расчеты, в относительно тонкий слой легче вдавить один штамп, чем цепочку, тогда как для внедрения периодической цепочки инденторов в относительно толстый слой требуется меньшая сила.

Для изучения перколяции (слияния) [13] областей контакта положим $\mu = 1$. При этом прямоугольники, содержащие области контакта, соприкасаются сторонами, в точках которых возможна перколяция при увеличении силы P или осадки δ. При $\mu = 1$ в ядрах (14)–(16) помимо классической интегрируемой особенности появляются новые интегрируемые особенности в точках возможной перколяции (на сторонах прямоугольника S, перпендикулярных оси цепочки штампов). Например, в задаче 1 помимо известной особенности $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ возникают особенности вида $((2 \pm x)^2 + y^2)^{-1/2}$, $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2\varepsilon$. В таблице приведены значения осадки и силы в начальный момент перколяции ($\mu = \varepsilon = 1$, $A = 5 \cdot 10^{-4}$, $B = 10^{-3}$). Из таблицы следует, что зависимость осадки δ от относительной толщины слоя λ является монотонной, в то время как зависимость $P_0(\lambda)$ имеет немонотонный характер вследствие наличия заделки нижней грани слоя.

Значения осадки и силы в начальный момент перколяции в задаче 1

λ	$\delta \cdot 10^3$		$P_0 \cdot 10^3$	
	Древесина (ель Дугласа)	Гнейс влажный	Древесина (ель Дугласа)	Гнейс влажный
1	0,7	0,8	0,724	0,520
2	0,9	1,2	0,617	0,602
3	1,1	1,4	0,629	0,589
4	1,2	1,6	0,591	0,609
5	1,3	1,8	0,580	0,641

Заключение. Полученные ИУ трехмерных периодических контактных задач для трансверсально-изотропного слоя являются обобщением как ИУ соответствующих трехмерных задач для одного штампа (предельный переход при $\mu \to \infty$), так и ИУ плоских задач (в случае области контакта Ω в виде полосы и плоского штампа). Форма областей контакта существенно зависит от ориентации плоскостей изотропии. Для достаточно близко расположенных штампов при увеличении контактного давления может возникнуть перколяция — просачивание областей контакта друг в друга и образование односвязной сплошной бесконечно длинной области контакта. Переход от дискретного контакта к непрерывному обусловлен образованием новых интегрируемых особенностей ядра ИУ в точках слияния областей контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Barber J. R.** Contact mechanics. Berlin: Springer, 2018.
2. **Ding H.** Elasticity of transversely isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. Dordrecht: Springer, 2006.
3. **Pan E.** Static Green's functions in anisotropic media / E. Pan, W. Chen. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2015.
4. **Fabrikant V. I.** Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah: Bentham, 2010.
5. **Fabrikant V. I.** Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2011. V. 64, N 2. P. 151–170.
6. **Давтян Д. Б., Пожарский Д. А.** Действие полосового штампа на трансверсально-изотропное полупространство // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 783–794.
7. **Горячева И. Г., Торская Е. В.** Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16, № 4. С. 642–652.
8. **Горячева И. Г.** Периодическая контактная задача для упругого полупространства // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 6. С. 1036–1044.
9. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
10. **Пожарский Д. А., Бедоидзе М. В., Пожарская Е. Д.** Периодические контактные задачи для слоя // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2019. № 1. С. 30–32.
11. **Александров В. М.** Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 307–315.
12. **Jin F., Wan Q., Guo X.** A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Intern. J. Solids Structures. 2016. V. 102/103. P. 66–76.

13. **Yastrebov V. A., Anciaux G., Molinari J.-F.** The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183.
14. **Goryacheva I. G., Torskaya E. V.** Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268, N 11/12. P. 1417–1422.
15. **Солдатенков И. А.** Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 2. С. 337–351.
16. **Горячева И. Г., Яковенко А. А.** Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5. С. 22–37.
17. **Пожарский Д. А.** Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33.
18. **Alexandrov V. M.** Three-dimensional contact problems / V. M. Alexandrov, D. A. Pozharskii. Dordrecht: Kluwer, 2001.
19. **Галанов Б. А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
20. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1959.
21. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1981.
22. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 1/II 2022 г.,
после доработки — 12/V 2022 г.
Принята к публикации 26/V 2022 г.