

**МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

УДК 621.391.266

**Я. А. Фурман, Д. Г. Хафизов**

*(Йошкар-Ола)*

**РАСПОЗНАВАНИЕ ГРУППОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ  
В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ\***

Рассмотрены кватернионные сигналы, задающие расположенный в трехмерном пространстве групповой точечный объект, введена мера схожести этих сигналов в виде их скалярного произведения. Синтезирован кватернионный согласованный фильтр. На основе критерия минимума расстояния решена задача распознавания полностью известных сигналов, сигналов с неизвестным начальным кватернионом и неизвестным углом поворота.

**1. Введение и постановка задачи.** Значительное количество актуальных научно-технических задач сводится к обработке информации, получаемой от компактно расположенных на плоскости или в пространстве групп точечных объектов. Примерами таких групповых точечных объектов (ГТО) служат изображения звезд на машинном кадре астродатчика летательного аппарата, изображения на дисплее радиолокационной или гидролокационной станции, изображения микробиологических объектов и другие.

Одним из эффективных подходов к обработке расположенных на плоскости изображений ГТО с целью оценки их параметров, распознавания и идентификации является трактовка этих изображений как определенного вида сигналов. Для их обработки используются обычные методы теории сигналов: спектральный и корреляционный анализ, различные виды фильтрации (в первую очередь согласованная [1]).

Ряд известных ученых в области обработки изображений и сигналов – В. В. Яншин, И. Н. Сеницын, В. М. Чернов – высказали предположения о возможности создания для этих целей на базе гиперкомплексных чисел непротиворечивой теории обработки трехмерных изображений. В этом плане далее рассматривается один из возможных подходов к созданию теории кватер-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00298).

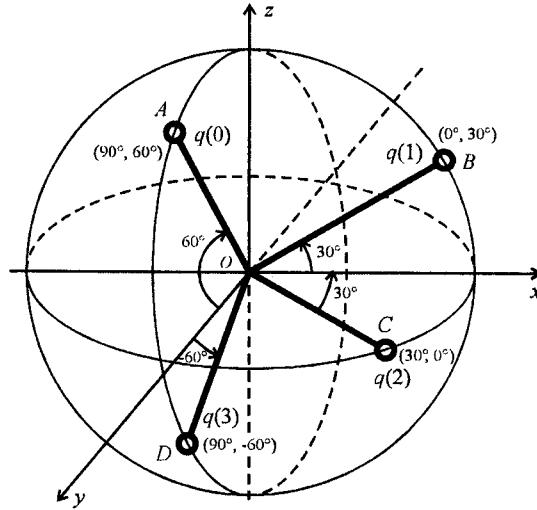


Рис. 1. Заданный на сфере групповой точечный объект  $Q = \{q(n)\}_{0,3}$

нионных сигналов (КТС), включающей в качестве частного случая анализ комплексных сигналов, и решение на ее основе задачи распознавания ГТО.

**2. Задание кватернионного сигнала.** Пусть  $ABCD$  – заданный на сфере единичного радиуса ГТО (рис. 1). Соединим центр сферы с каждой из его точек. В результате получим пространственный пучок  $OABCD$ , который обозначим как  $Q = \{q(n)\}_{0,3}$ . Каждый радиус-вектор  $q(n)$ , определяющий точку на сфере единичного радиуса с угловыми координатами  $\alpha(n)$  и  $\beta(n)$  ( $\alpha(n)$  и  $\beta(n)$  – углы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно), описывается векторным кватернионом

$$q(n) = \cos\beta(n) \cdot \cos\alpha(n)i + \cos\beta(n) \cdot \sin\alpha(n)j + \sin\beta(n)k,$$

а сам ГТО из  $s$  точек – в виде пучка векторных кватернионов

$$Q = \{\cos\beta(n) \cdot \cos\alpha(n)i + \cos\beta(n) \cdot \sin\alpha(n)j + \sin\beta(n)k\}_{0,s-1}. \quad (1)$$

Здесь  $i, j, k$  – мнимые единицы, правила умножения которых задаются следующими таблицей и схемой из [2]:

	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$j$	$-i$	-1

(2)

Кватернионным сигналом размерности  $s$  будем называть упорядоченную последовательность из  $s$  кватернионов  $q(n)$ :

$$Q = \{q(n)\}_{0, s-1},$$

через них [2]. Его можно представить как сумму двух комплексных чисел, одно из которых берется с весом, равным мнимой единице, не совпадающей с мнимой единицей, используемой в этих числах. Для кватерниона  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ , входящего в состав эталонного (исходного) сигнала, эти комплексные числа обозначим через  $t$  и  $w$ , а для кватерниона в составе принятого сигнала, подвергнутого преобразованию, – через  $u$  и  $v$ . Верхний индекс при каждом из этих чисел будет обозначать мнимую единицу, которая используется в данном комплексном числе. Например, первая комплексная форма, или  $i$ -представление,

$$q = t^{(i)} + w^{(i)}j, \quad \text{где } t^{(i)} = q_0 + q_1i, \quad w^{(i)} = q_2 + q_3i. \quad (3)$$

Целесообразность задания таких представлений кватерниона связана с возможностями использования аппарата контурного анализа при обработке КТС.

Трем формам представления кватернионов соответствуют три формы КТС:

$$Q = T^{(i)} + W^{(i)}j = T^{(j)} + W^{(j)}k = T^{(k)} + W^{(k)}i,$$

где  $T^{(i)}$ ,  $W^{(i)}$ ,  $T^{(j)}$ ,  $W^{(j)}$  и  $T^{(k)}$ ,  $W^{(k)}$  – комплекснозначные сигналы. Выбор формы представления КТС зависит от того, вокруг какой оси ( $x$ ,  $y$  или  $z$ ) производится вращение радиусов-векторов кватернионного сигнала.

**Пример 1.** Показанный на рис. 1 КТС и его комплексные формы имеют вид

$$Q = \{0,5j + 0,86k; 0,86i + 0,5k; 0,86i - 0,5j; 0,5j - 0,86k\};$$

$$Q = T^{(i)} + W^{(i)}j = \{0; 0,86i; 0,86i; 0\} + \{0,5 + 0,86i; 0,5i; 0,5; 0,5 - 0,86i\}j;$$

$$Q = T^{(j)} + W^{(j)}k = \{0,5j; 0; 0,5j; 0,5j\} + \{0,86; 0,5 + 0,86i; 0,86i; -0,86\}k;$$

$$Q = T^{(k)} + W^{(k)}i = \{0,86k; 0,5k; 0; -0,86k\} + \{0,5k; 0,86; 0,86 + 0,5k; 0,5k\}i.$$

Вышеописанные соотношения носят общий характер и применимы к КТС, заданным не только на сфере. Далее будем пользоваться в основном первой комплексной формой и в этом случае опустим верхний индекс  $i$ .

**3. Скалярное произведение кватернионов.** Произведение заданных в комплексной форме двух кватернионов  $q = t + wj$  и  $p = u + vj$ , полученное с учетом некоммутативности для них этой операции, имеет вид

$$\begin{aligned} qp &= (t + wj)(u + vj) = (ut - v^*w) + j(uw^* + v^*t^*) = \\ &= (ut - v^*w) + (u^*w + vt)j. \end{aligned} \quad (4)$$

Основной базовой операцией при линейной обработке сигналов является скалярное произведение, служащее мерой их схожести. К образованию скалярного произведения обрабатываемого и эталонного сигналов сводятся такие операции, как разложение и фильтрация сигналов, а также получение их АКФ и ВКФ. В действительном линейном пространстве  $E$  скалярное произведение его элементов (векторов) вводится аксиоматически и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (y, x); & (x + y)z &= (x, z) + (y, z); \\ ((\lambda x), y) &= \lambda(x, y); & (x, x) &\neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\lambda$  – произвольное вещественное число. В комплексном линейном пространстве  $C$  первая операция становится некоммутативной, так как  $(x, y) = (y, x)^*$ . Но если это свойство для пространства  $E$  записать в виде  $(x, y) = (y, x)^*$ , что не меняет его вид, то свойства скалярного произведения в пространстве  $E$  и  $C$  одинаковы. Далее приведены формулы для вычисления скалярных произведений комплексных слагаемых  $u = u_1 + iu_2$  и  $t = t_1 + it_2$  кватернионов:

$$\begin{aligned} (u, t) &= (t, u)^* = (t^*, u^*) = ut^*, \\ (u, t) &= u_1t_1 + u_2t_2 - u_1t_2i + u_2t_1i, \\ (u^*, t) &= u_1t_1 - u_2t_2 - u_1t_2i - u_2t_1i. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем с учетом некоммутативности операции умножения скалярное произведение кватернионов  $q = t + wj$  и  $p = u + vj$  в виде  $(q, p) = (p, q)^* = qp^*$ , обладающее свойствами (5). Так как для кватернионов имеют место распределительный и сочетательный законы, то выполняются также остальные приведенные в (5) операции:

$$\begin{aligned} ((q + p), c) &= (q, c) + (p, c); & ((\lambda q), p) &= \lambda(q, p); \\ (q, q) &\neq 0 \text{ при } q_0 \neq 0, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, q_3 \neq 0. \end{aligned}$$

**Слагаемые скалярного произведения  
кватернионов**

№ п/п	$x = x_1 + ix_2; y = y_1 + iy_2$
1	$(x, yj) = -(x, y^*)j = -j(x^*, y) = -jx^*y^*$
2	$(x, jy) = (x, y^*)j = j(x^*, y) = jx^*y^*$
3	$(xj, yj) = (jx, jy) = (x, y) = xy^*$
4	$(jx, y) = j(x, y) = (x, y^*) = jxy^*$
5	$(xj, jy) = (x, y^*) = xy$
6	$(jx, yj) = (x^*, y) = x^*y^*$

Здесь  $c = c_0 + c_1i + c_2j + c_3k = l + mj$  – еще один произвольно заданный кватернион. С учетом этого скалярное произведение кватернионов  $q$  и  $p$  записывается следующим образом:

$$(q, p) = (t + wj, u + vj) = (t, u) + (t, vj) + (wj, u) + (wj, vj).$$

Скалярное произведение на основании формул таблицы запишем в виде

$$(q, p) = (u_1t_1 + u_2t_2 + w_1v_1 + w_2v_2) + i(-t_1u_2 + t_2u_1 - w_1v_2 + w_2v_1) + j(-t_1w_1 + t_2w_2 + w_1u_1 - w_2u_2) + k(-t_1v_2 - t_2v_1 + w_1u_2 + w_2u_1), \quad (7)$$

где  $w = w_1 + iw_2$  и  $v = v_1 + iv_2$ . Квадрат модуля (нормы) кватерниона получается из выражения (7) при  $q = p$ :

$$(q, q) = |q|^2 = t_1^2 + t_2^2 + w_1^2 + w_2^2 = |t|^2 + |w|^2. \quad (8)$$

Скалярное произведение двух комплекснозначных сигналов  $U = \{u(n)\}_{0, s-1}$  и  $T = \{t(n)\}_{0, s-1}$  равно [1]:

$$(U, T) = \sum_{n=1}^{s-1} u(n)t^*(n),$$

а скалярное произведение двух КТС  $P = U + Vj = \{u(n) + v(n)j\}_{0, s-1}$  и  $Q = T + Wj = \{t(n) + w(n)j\}_{0, s-1}$ , выраженное через скалярные произведения составляющих их комплексных сигналов, запишется как

$$(P, Q) = \{U + Vj, T + Wj\} = (U, T) + (U, Wj) + (Vj, T) + (Vj, Wj). \quad (9)$$

Используя формулы сопряжения для кватернионов, последнее выражение приведем к виду

$$\eta_{P,Q} = (P, Q) = A + Bj = (U, T) + (V, W) - j[(U^*, W) - (V^*, T)].$$

4. **Распознавание полностью известных нормированных КТС.** На основании введенного определения для скалярного произведения двух КТС найдем расстояние между этими сигналами как

$$R_{Q,P}^2 = (Q - P, Q - P) = \|Q\|^2 + \|P\|^2 - 2\text{Re}(Q, P).$$

Данное представление удовлетворяет всем аксиомам, введенным для такого рода мер:

$$R_{Q,Q} = 0; \quad R_{Q,P} = R_{P,Q}; \quad R_{Q,P} \leq R_{Q,C} + R_{C,P},$$

где  $C$  – произвольный КТС. Отметим, что для нормированных КТС, т. е. когда  $\|Q\| = \|P\| = 1$ , выражение для расстояния имеет вид  $R_{Q,P}^2 = 2[1 - \text{Re}(Q, P)]$ . Отсюда видно, что расстояние между нормированными КТС определяется величиной реальной части их скалярного произведения.

Пусть  $Q = bP_m^{(d)}b^{-1} + Z$  – зашумленный КТС, который надо отнести к одному из классов  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Здесь  $P_m^{(d)}$  – эталонный КТС  $m$ -го класса со сдвинутым на величину  $d$ ,  $d = 0, 1, \dots, s - 1$ , начальным номером;  $b$  – вращающий кватернион, обеспечивающий поворот КТС  $P_m$  на угол  $2\psi$  вокруг заданной оси. Величины  $d$  и  $\psi$  являются неизвестными. КТС  $Z$  состоит из шумовых кватернионов, значения которых обусловлены ошибками измерения угловых координат точек ГТО. Эти ошибки обычно независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним.

Рассмотрим случай распознавания полностью известного КТС  $Q = P_m + Z$ , т. е. когда отличие между  $Q$  и  $P_m$  вызвано лишь действием координатного шума. Решение будем принимать по критерию минимума расстояния между  $Q$  и  $P_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , т. е.

$$Q \in A_m \quad \text{при} \quad R_{Q,P_m} \rightarrow \min_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Для случая нормированных КТС это правило примет вид

$$Q \in A_m \quad \text{при} \quad \text{Re}(Q, P_m) \rightarrow \max_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

На рис. 2 представлена структура многоканального по числу классов устройства распознавания точно известного КТС. В каждом канале находится формирователь скалярного произведения (ФСП) сигналов  $Q$  и  $P_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , и звено, выделяющее реальную часть этого произведения. Решающее устройство определяет максимальное значение  $\text{Re}(Q, P_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , и канал, на выходе которого оно сформировалось. КТС  $Q$  относится к классу, номер которого совпадает с номером этого канала.

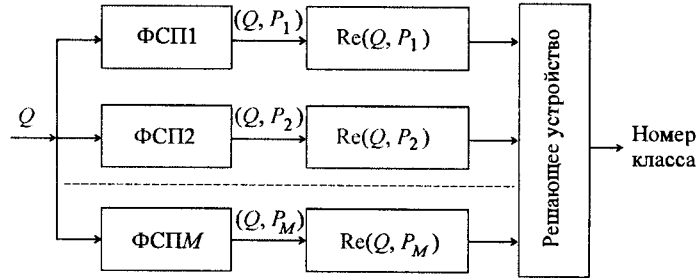


Рис. 2. Структура устройства распознавания полностью известного кватернионного сигнала

**5. Распознавание КТС с неизвестным номером начального кватерниона.** Если порядок следования кватернионов в эталонном и сигнальном КТС задан, но неизвестен кватернион, который следует принять в качестве начального  $q(0)$ , то для принятия решения о классе зашумленного КТС  $Q$  необходимо сформировать не одно, а  $s$  скалярных произведений. Далее в соответствии с критерием минимума расстояния необходимо в каждом канале выбрать отсчет с максимальной реальной частью, а решение о классе КТС  $Q$  принимать по номеру канала с максимальным значением выходного эффекта, т. е.

$$Q \in A_m \text{ при } \operatorname{Re}(Q, P_m) \rightarrow \max_d \max_m, \quad d=0,1,\dots,s-1, \quad m=1,2,\dots,M. \quad (11)$$

Процедуру формирования  $s$  значений скалярных произведений  $(Q, P_m^{(d)})$ , где  $P_m^{(d)}$ ,  $d=0,1,\dots,s-1$ , – эталонный кватернионный сигнал класса  $A_m$  со сдвинутым на величину  $d$  номером начального кватерниона, выполняет согласованный фильтр. Кватернионный согласованный фильтр вырабатывает  $s$  значений ВКФ фильтруемого  $Q$  и эталонного  $P_m$  сигналов. Структуру такого фильтра можно получить, используя связь между КТС и комплексными числами (см. разд. 2, 3). Отсчет ВКФ двух комплексных сигналов  $U = \{u(n)\}_{0,s-1}$  и  $T = \{t(n)\}_{0,s-1}$  равен скалярному произведению:

$$\eta_{U,T} = (U, T^{(d)}) = \sum_{n=0}^{s-1} u(n)t^*(n+d), \quad d=0,1,\dots,s-1, \quad (12)$$

где  $T^{(d)} = \{t(n+d)\}_{0,s-1}$  – комплексный сигнал со смещенным на  $d$  элементарных векторов началом [1]. Тогда ВКФ двух кватернионных сигналов  $P = U + Vj$  и  $Q = T + Wj$ , представленных суммой комплексных слагаемых, запишется как

$$\begin{aligned} \eta_{P,Q}(d) &= (P^{(d)}, Q) = (U + Vj, T^{(d)} + W^{(d)}j) = \\ &= (U, T^{(d)}) + (U, W^{(d)}j) + (Vj, T^{(d)}) + (Vj, W^{(d)}j). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя формулы из таблицы, получим

$$\eta_{P,Q}(d) = \eta_{U,T}(d) + \eta_{V,W}(d) - j[\eta_{U^*,W}(d) - \eta_{V^*,T}(d)].$$

Здесь

$$\eta_{V,W}(d) = (V, W^{(d)}) = \sum_{n=0}^{s-1} v(n)w^*(n+d);$$

$$\eta_{U^*,W}(d) = (U^*, W^{(d)}) = \sum_{n=0}^{s-1} u^*(n)w^*(n+d);$$

$$\eta_{V^*,T}(d) = (V^*, T^{(d)}) = \sum_{n=0}^{s-1} v^*(n)t^*(n+d).$$

Данные выражения позволяют найти ВКФ двух КТС, выраженных через комплексные слагаемые. При  $Q = P$  и, следовательно, при  $U = T$  и  $V = W$  можно вычислить АКФ кватернионного сигнала. В этом случае выражение (12) примет вид

$$\eta_P(d) = \eta_U(d) + \eta_V(d) - j[\eta_{U^*,V}(d) - \eta_{V^*,U}(d)], \quad d = 0, 1, \dots, s-1. \quad (14)$$

Согласованный фильтр реализует на своем выходе смещенную на  $s$  отсчетов ВКФ двух сигналов. Один из сигналов служит эталонным и определяет импульсную характеристику фильтра, а другой является фильтруемым, и для него в процессе фильтрации вычисляется набор мер схожести (близости) с эталонным сигналом. При этом один из параметров сигнала (фильтруемого или эталонного) варьируется в заданных пределах. Если фильтруемый и эталонный сигналы совпадают, то существует отсчет фильтра, равный энергии фильтруемого сигнала. Он является максимальным (пиковым) по отношению ко всем остальным отсчетам.

Согласованный фильтр для комплексных сигналов  $U = \{u(n)\}_{0, s-1}$  и  $T = \{t(n)\}_{0, s-1}$  вырабатывает текущий выходной отсчет  $\eta_{U,T}(d)$  следующим образом [1]:

$$\eta_{U,T}(d) = (U, T^{(s-d-1)}) = \sum_{n=0}^{s-1} u(n)t^*(n-d+s-1), \quad d = 0, 1, \dots, s-1, \quad (15)$$

где  $T^{(s-d-1)} = \{t(n-d+s-1)\}_{0, s-1}$  – комплексный сигнал со смещенным на  $s-d-1$  началом. Поскольку  $Q = T + Wj$  и  $P = U + Vj$ , то в соответствии с (15) согласованный с КТС  $Q = \{q(n)\}_{0, s-1}$  фильтр должен выполнять операцию

$$\eta_{Q,P}(d) = \sum_{n=0}^{s-1} u(n)t^*(n-d+s-1) + \sum_{n=0}^{s-1} v(n)w^*(n-d+s-1) -$$



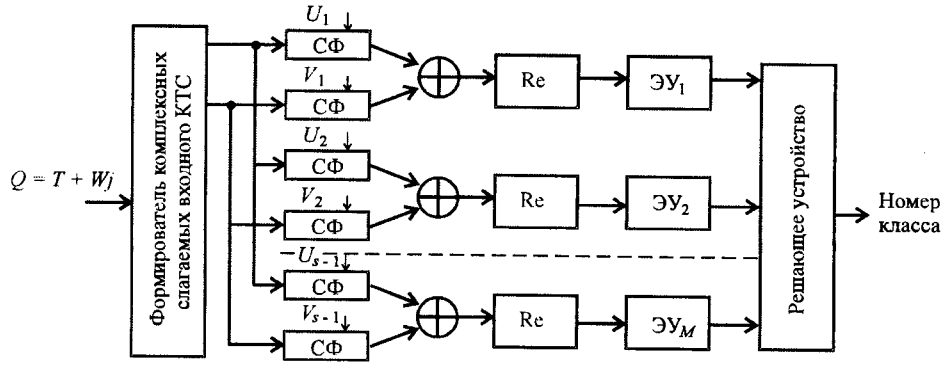


Рис. 3. Структура устройства распознавания КТС с неизвестным положением начального кватерниона

$$-j \left[ \sum_{n=0}^{s-1} u^*(n) w^*(n-d+s-1) - \sum_{n=0}^{s-1} v^*(n) t^*(n-d+s-1) \right]. \quad (16)$$

Данный фильтр представляет собой совокупность четырех фильтров для комплексных сигналов. При  $d = s - 1$  он вырабатывает отсчет в виде скалярного произведения КТС  $P$  и  $Q$ . Поскольку для принятия решения о классе КТС нас будет интересовать лишь реальная часть выходных отсчетов согласованного фильтра, то, как следует из (16), она является составляющей лишь первого и второго слагаемых этого выражения:

$$\text{Re } \eta_{P, Q}(d) = \text{Re}[(U, T^{(d)}) + (V, W^{(d)})].$$

Отсюда следует, что каждый канал устройства распознавания содержит два согласованных фильтра: один из них согласован с комплексным сигналом  $U_m = \{u_m(n)\}_{0, s-1}$ , а второй – с комплексным сигналом  $V_m = \{v_m(n)\}_{0, s-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Выходные сигналы фильтров суммируются, и вычисляется реальная часть их суммы. Выходной величиной канала является максимальное значение этой реальной части, достигаемое при некоторой величине  $d$ . Последнюю операцию реализует экстремальное устройство (ЭУ) (рис. 3).

**6. Вращение кватернионного сигнала.** Поворот КТС  $Q = \{q(n)\}_{0, s-1} = T + Wj$  как пучка векторных кватернионов на угол  $2\psi$  вокруг оси, задаваемой вектором  $r = r_1 i + r_2 j + r_3 k$ ,  $|r| = 1$ , происходит в результате операции [3]:

$$Q_{2\psi, r} = \{q_{2\psi, r}(n)\}_{0, s-1} = b Q b^{-1},$$

где вращающий кватернион

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k = \cos \psi + r \sin \psi,$$

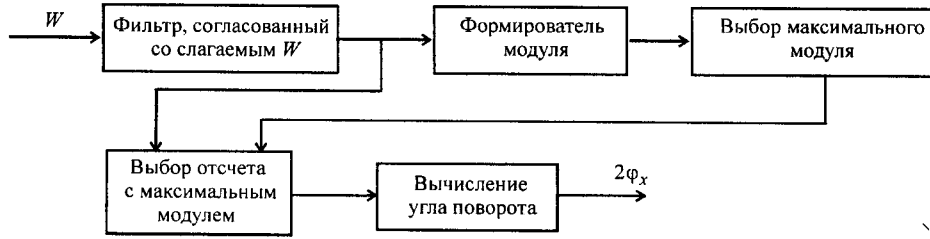


Рис. 4. Структура устройства определения угла элементарного поворота КТС

$$b^{-1} = \cos \psi - r \sin \psi, \quad \|b\| = \|b^{-1}\| = 1.$$

Элементарным поворотом КТС назовем его поворот вокруг одной из осей системы отсчета, в частности вокруг оси  $X$ . В этом случае  $2\psi = 2\varphi_X$ ,  $b = b_X = \cos \varphi_X + i \sin \varphi_X = \exp \{i\varphi_X\}$ . Повернутый КТС имеет вид

$$Q_{2\varphi_X} = T + \exp \{i2\varphi_X\} Wj. \quad (17)$$

Таким образом, при элементарном повороте изменилась лишь «мнимая» часть комплексного  $i$ -представления КТС, а именно  $W$ . Запишем в общем виде выражения для скалярного произведения повернутого вокруг оси  $X$  и исходного КТС:

$$(Q_{2\varphi_X}, Q) = \|T\|^2 + \|W\|^2 \exp \{i2\varphi_X\} - TW(1 - \exp \{i2\varphi_X\}j).$$

Видно, что полезную информацию о величине  $2\varphi_X$  несет скалярное произведение  $(\exp \{i2\varphi_X\} Wj, Wj) = \|W\|^2 \exp \{i2\varphi_X\}$ . Это скалярное произведение «мнимых» комплексных частей входного и эталонного КТС, значение которого образуется в момент  $d = s - 1$  фильтром, согласованным с комплексным сигналом  $W^{(l)}$  эталонного КТС при фильтрации аналогичной комплексной составляющей входного КТС. Отсюда следует, что величина угла поворота

$$2\varphi_X = \arctg \frac{\text{Im} \sum_{n=0}^{s-1} v(n) w^*(n)}{\text{Re} \sum_{n=0}^{s-1} v(n) w^*(n)}. \quad (18)$$

Таким образом, по выходному сигналу фильтра, согласованного с комплексным слагаемым  $W$ , можно определить угол одиночного элементарного поворота КТС (рис. 4).

Покажем, что при последовательном выполнении двух элементарных поворотов, например, вокруг оси  $X$ , а затем вокруг оси  $Y$  по виду исходного

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k = t^{(l)} + w^{(l)} j$$

и результирующего

$$q_{X, 2\varphi_X} = q_{1, X, Y} i + q_{2, X, Y} j + q_{3, X, Y} k$$

кватернионов можно найти значения углов  $2\varphi_X$  и  $2\varphi_Y$ . Для этого кватернион

$$q_{X, 2\varphi_X} = q_{1, X} i + q_{2, X} j + q_{3, X} k = t^{(j)} + \exp\{i2\varphi_X\} w^{(j)} j,$$

полученный в результате поворота  $q$  вокруг оси  $X$ , представим в  $j$ -й комплексной форме:

$$q_{X, 2\varphi_X} = t_X^{(j)} + w_X^{(j)} k, \quad (19)$$

где

$$t_X^{(j)} = q_{2, X} j = (q_2 \cos 2\varphi_X - q_3 \sin 2\varphi_X) j, \quad (20)$$

$$w_X^{(j)} = q_{3, X} + q_{1, X} j = q_3 \cos 2\varphi_X + q_2 \sin 2\varphi_X + q_1 j.$$

После поворота вокруг оси  $Y$  кватернион  $q_{X, 2\varphi_X}$  принимает вид

$$q_{X, 2\varphi_X} = e^{j\varphi_Y} q_{X, 2\varphi_X} e^{-j\varphi_Y} = t_X^{(j)} + e^{j2\varphi_Y} w_X^{(j)} k.$$

Из сравнения этого выражения с (19) видно, что слагаемое  $t_X^{(j)}$  является для них общим, т. е.  $q_{2, X} = q_{2, X, Y}$ . Как следует из (20), это слагаемое содержит необходимую для определения угла  $2\varphi_X$  информацию:

$$2\varphi_X = \arccos \frac{q_{2, X}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} - \arctg \frac{q_3}{q_2}, \quad (21)$$

$$q_{2, X} = q_{2, X, Y} \leq \sqrt{q_2^2 + q_3^2}.$$

Теперь можно вычислить угол  $2\varphi_Y$ . Для этого кватернион  $q$  поворачиваем на угол  $2\varphi_X$  и определяем  $q_{X, 2\varphi_X}$ . Кватернионы  $q_{X, 2\varphi_X}$  и  $q_{X, 2\varphi_X} = q_{X, 2\varphi_X}$  отличаются

друг от друга лишь элементарным поворотом на угол  $2\varphi_Y$ , который может быть определен в соответствии с вышеописанной методикой (см. рис. 4 и (18)).

**Пример 2.** Исходный векторный кватернион  $q$  и результат его двух элементарных поворотов имеют вид

$$q = i + 2j + 3k; \quad q_{X, 2\varphi_X} = 2,821i - 1,598j - 1,867k.$$

Для определения угла  $2\varphi_X$  по формуле (21) имеем

$$q_2 = 2; \quad q_3 = 3; \quad q_{2,X} = q_{2,X,Y} = -1,598.$$

Тогда

$$2\varphi_X = \arccos(-1,598/\sqrt{13}) - \arctg 3/2 = 60^\circ.$$

Далее находим угол  $2\varphi_Y$ , поворачивая кватернион  $q$  на угол  $2\varphi_X = 60^\circ$ :

$$q_{X, 2\varphi_X} = i - 1,598j + 3,232k.$$

Записываем кватернионы в  $j$ -й комплексной форме:

$$q_{X, 2\varphi_X} = t_X^{(j)} + w_X^{(j)}k = i - 1,598j + (3,232 + j)k;$$

$$q_{Y, 2\varphi_Y} = t_{X,Y}^{(j)} + w_{X,Y}^{(j)}k = -1,598j + (-1,867 + 2,821j)k.$$

Вычислим скалярное произведение

$$(w_{X,Y}^{(j)}, w_X^{(j)}) = (-1,867 + 2,821j, 3,232 + j).$$

Оно равно  $-3,213 + 10,895j$ . Отсюда следует, что

$$2\varphi_Y = \arctg 10,895/(-3,213) = 106,3^\circ.$$

Покажем теперь, что значение нормы скалярного произведения исходного и повернутого сигналов изменяется даже при элементарных поворотах. Для этого на основании (16) получим выражение для «вещественной»  $A$  и «мнимой»  $B$  частей выходного отсчета фильтра при  $d = s - 1$  и найдем квадрат нормы скалярного произведения КТС  $P$  и  $Q$ :

$$\begin{aligned} \|\eta_{P,Q}\|^2 &= \|A\|^2 + \|B\|^2 = \left| \sum_{n=0}^{s-1} u(n)t^*(n) + \sum_{n=0}^{s-1} v(n)w^*(n) \right|^2 + \\ &+ \left| \sum_{n=0}^{s-1} v(n)t(n) - \sum_{n=0}^{s-1} u(n)w(n) \right|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

КТС  $Q$  повернем вокруг оси  $X$  на угол  $2\varphi_X$ . В этом случае выражение (22) с учетом (17) примет вид

$$\|\eta_{P,Q_{2\varphi_X}}\|^2 = \left| \sum_{n=0}^{s-1} u(n)t^*(n) + e^{-j2\varphi_X} \sum_{n=0}^{s-1} v(n)w^*(n) \right|^2 +$$

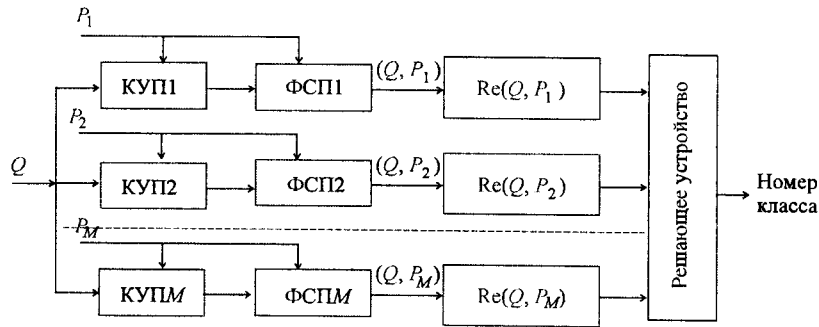


Рис. 5. Структура устройства распознавания кватернионных сигналов с неизвестным углом поворота

$$+ \left| \sum_{n=0}^{s-1} v(n)t(n) - e^{i2\varphi_x} \sum_{n=0}^{s-1} u(n)w(n) \right|^2. \quad (23)$$

Из данного результата хорошо видно, что за счет комплексной экспоненты величина  $2\varphi_x$  при образовании модуля меняет значение суммируемых комплексных чисел. В конечном счете это приводит к зависимости квадрата нормы скалярного произведения от величины  $2\varphi_x$ .

**7. Распознавание кватернионных сигналов с неизвестным углом поворота.** Из неинвариантности модуля скалярного произведения двух КТС к вращению одного из них следует неинвариантность кватернионного фильтра к данной операции. Следствием этого будет зависимость результатов распознавания зашумленного КТС  $Q$  от угла его поворота относительно эталонного КТС  $P$ . Поэтому до получения скалярного произведения необходима операция совмещения КТС  $Q$  с эталонным КТС  $P_m$ ,  $m=1, 2, \dots, M$ . Данная функция выполняется стоящим в каждом канале распознаваемого устройства корректором угла поворота (КУП). Корректор оценивает угол поворота  $2\psi_m$  и компоненты вектора  $r_m$ , задающего ось вращения распознаваемого сигнала  $Q = \{q(n)\}_{0, s-1}$  по отношению к эталонному сигналу  $P_m$ ,  $m=1, 2, \dots, M$ . Далее выполняется операция компенсирующего поворота  $Q$  на угол  $-2\psi_m$ , причем траектория поворота может быть выбрана произвольной, важен сам факт наилучшего совмещения этих КТС. Поэтому данную задачу можно решить путем элементарных поворотов (см. разд. 6). В качестве исходного сигнала берется соответствующий эталон  $P_m$ , а результирующим служит распознаваемый сигнал  $Q$ . На рис. 5 представлена структура устройства распознавания зашумленного КТС с неизвестным значением угла поворота относительно эталонного КТС. В каждом канале устройства содержится отдельный КУП.

**8. Пример распознавания кватернионных сигналов.** Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим случай распознавания КТС классов «Клин», «Двойной клин» и «Рассредоточенный клин». Проекции ГТО, задаваемые этими сигналами, показаны на рис. 6. Все КТС имеют размерность  $s=10$ . ГТО, задаваемые этими КТС, подобраны таким образом, что в горизонтальной плоскости  $XOY$  они задают одинаковую клинообразную фи-

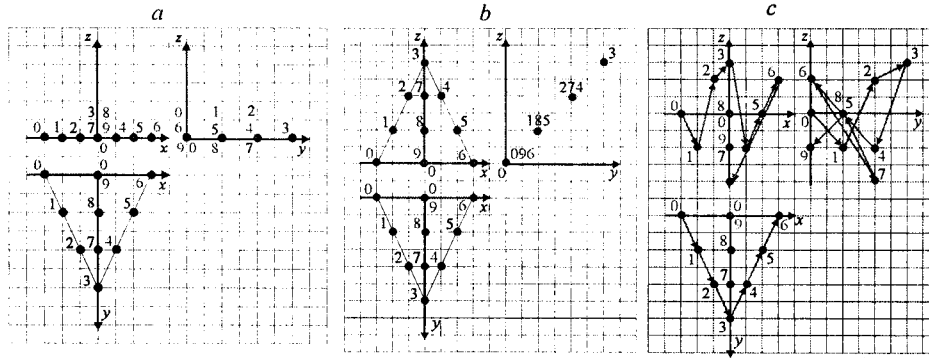


Рис. 6. Проекция ГТО, задаваемые КТС «Клин» (а), «Двойной клин» (b) и «Расседоточенный клин» (с)

гуру. Различия между эталонными ГТО имеются лишь в проекциях на координатные плоскости  $XOZ$  и  $YOZ$ .

На рис. 7 показаны построенные по результатам  $5 \cdot 10^4$  опытов графики зависимостей значения достаточной статистики от СКО  $\sigma_\theta$  углового координатного шума. В качестве сигнала выбран зашумленный ГТО «Клин». Для случая обработки полностью известного сигнала и сигнала с неизвестным углом поворота в качестве достаточной статистики используется в соответствии с (10) реальная часть нормированного скалярного произведения фильтруемого и эталонного сигналов, а для случая неизвестного номера начального кватерниона – реальная часть нормированного выходного сигнала согласованного фильтра. Как видно из графиков (рис. 7, а), для первого случая наблюдается всюду в пределах СКО  $\sigma_\theta = 0, \dots, 20^\circ$  равномерный зазор между кривыми. Во втором случае (рис. 7, б), т. е. когда неизвестны углы  $2\varphi_x, 2\varphi_y, 2\varphi_z$  и ось поворота КТС, используются значения реальной части скалярного произведения распознаваемого сигнала с эталонными сигналами первого и второго классов; соответствующие кривые отличаются незначи-

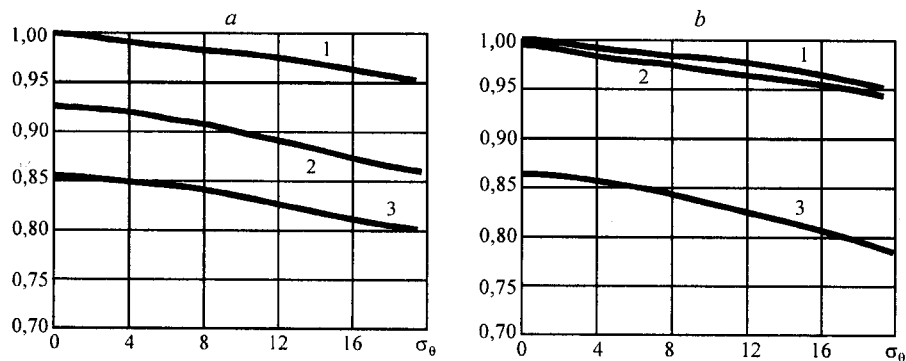


Рис. 7. Зависимость значений достаточной статистики от СКО углового шума при распознавании КТС «Клин»: для полностью известного сигнала и сигнала с неизвестным номером начального кватерниона (а), для сигнала с неизвестным углом поворота (b) (кривые 1 – «Клин» – «Клин», 2 – «Клин» – «Двойной клин», 3 – «Клин» – «Расседоточенный клин»)

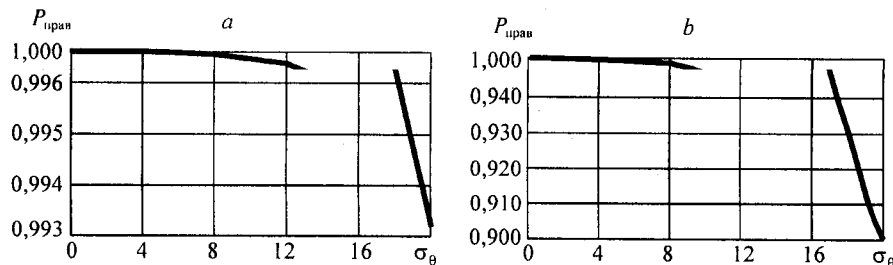


Рис. 8. Зависимости оценок вероятностей правильного распознавания КТС «Клин» от СКО углового шума: для полностью известного сигнала и сигнала с неизвестным номером начального кватерниона (а), для сигнала с неизвестным углом поворота (b)

тельно. Поэтому следует ожидать, что ошибки распознавания из-за перепутывания этих классов будут более значительными, чем в первом случае.

На рис. 8, а, b приведены графики зависимостей оценок вероятности правильного распознавания КТС «Клин» от СКО углового координатного шума для алфавита из трех приведенных на рис. 6 классов. Из графиков следует, что для приведенного диапазона значений СКО  $\sigma_\theta$  углового координатного шума эти оценки свидетельствуют о хорошей эффективности работы устройства распознавания. Кроме того, отсутствие информации о номере начального кватерниона по сравнению со случаем неизвестного значения угла поворота КТС практически не приводит к снижению значений оценок правильного распознавания.

**Заключение.** В данной работе основные положения контурного анализа, являющиеся базой для описания и обработки представленных на плоскости дискретных комплексных сигналов, распространены на обработку сигналов, задающих пространственно расположенные группы точечных объектов. Групповой точечный объект описан пучком векторных кватернионов. Введены комплексные  $i$ -,  $j$ -,  $k$ -представления произвольного кватерниона в виде суммы двух комплексных чисел. В результате кватернионный сигнал, рассматриваемый как упорядоченная совокупность кватернионов, задается в виде соответствующей совокупности комплекснозначных сигналов. Следствием такого подхода является возможность ввода на базе скалярного произведения контуров аналогичной меры схожести двух кватернионных сигналов и ортонормированного базиса из полного семейства элементарных кватернионных сигналов. Это дает возможность ввести понятия спектральной и корреляционной функций кватернионного сигнала, сформулировать задачу фильтрации таких сигналов [3], в частности, синтезировать кватернионные согласованные фильтры в виде совокупности контурных согласованных фильтров. На базе таких фильтров, вырабатывающих меру схожести кватернионных сигналов, в данной работе с позиции критерия максимальной близости сигналов решена задача распознавания пространственно расположенных групповых точечных объектов. При этом учитывалось влияние ошибок

измерения координат каждой из точек, а также отсутствие информации о номере начальной точки и величине угла поворота всего объекта. Приведенный пример распознавания достаточно сложного по структуре группового точечного объекта показал практическую полезность полученных результатов.

В заключение обсудим целесообразность использования описанного здесь аппарата кватернионных сигналов в отличие от известных подходов к заданию и обработке точечных объектов в декартовой или сферической системах отсчета. Следует отметить, что анализ посвященной использованию гиперкомплексных чисел библиографии показал их широкое применение к решению чисто физических задач, в частности, в механике и электродинамике. Однако практически отсутствуют результаты по использованию кватернионов в задачах обработки изображений и распознавания образов. К таким работам следует отнести [4], где тематика ограничена вопросами быстрых дискретных ортогональных преобразований. Систематическое рассмотрение кватернионных сигналов и распространение на их обработку методов теории сигналов дается лишь в наших работах [1, 3, 5, 6]. Применение кватернионных сигналов для обработки, обнаружения, оценки параметров, разрешения и распознавания трехмерных изображений связано с определенными трудностями. В первую очередь они вызваны некоммутативностью операции умножения, неинвариантностью алгоритмов к углу поворота и сложностью оценки этого угла. Частично с такими же сложностями приходится сталкиваться и при задании изображений в декартовой и сферической системах координат. При этом кватернионное представление сигналов имеет много достоинств. Среди них следует отметить такие, как простота задания ортонормированного базиса, проведения спектрального анализа, согласованной фильтрации и выполнения серии поворотов вокруг произвольно заданных осей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Введение** в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов /Под общей ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002.
2. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.
3. **Furman Ya. A.** Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. **12**, N 2. P. 175.
4. **Методы** компьютерной обработки изображений /Под. ред. В. А. Сойфера. М.: Физматлит, 2001.
5. **Кревецкий А. В., Фурман Я. А.** Кватернионные сигналы для систем ориентации по изображениям звездного неба // Сб. матер. 5-й Междунар. конф. «Распознавание-2001», Курск, 2001. Курск: Курский гос. ун-т, 2001.
6. **Фурман Я. А., Хафизов Д. Г., Хафизов Р. Г.** Распознавание изображений пространственных объектов на базе их кватернионных моделей // Тр. 6-й Междунар. конф. «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии» РОАИ-6-2002, 21–26 октября, 2002. Великий Новгород: Новгородский гос. ун-т, 2002. С. 586.

*Марийский государственный  
технический университет,  
E-mail: RTS@MARSTU.MARI.RU*

*Поступила в редакцию  
20 ноября 2002 г.*