

**ВЫРОЖДЕННЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ О РАСЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИЙ
В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛАХ**

B. P. Ястребов

(Ленинград)

Предположим, что движение сплошной среды описывается дифференциальным уравнением в частных производных, зависящим от пространственной координаты x и времени t . Если движение автомодельно, то решение уравнения имеет структуру [1, 2] $t^\alpha \Phi(\eta)$, где $\Phi(\eta)$ — функция безразмерной переменной $\eta = x/(at^\beta)$, a — размерная константа, α и β — показатели степени, зависящие от исходных величин, структуры дифференциального уравнения, граничных и начальных условий. Автомодельные решения удается найти в задачах, исходные данные которых содержат минимальное число величин с независимыми размерностями. Сюда относятся задачи о движении сред неограниченной протяженности, не имеющих характерного линейного размера. При этом выпадают из рассмотрения практически важные задачи, в которых среда имеет конечные размеры. Исключение представляет частный случай автомодельных движений, для которых β обращается в нуль. Соответствующие этому случаю автомодельные решения назовем вырожденными. Сужение значения β до нуля накладывает дополнительные ограничения на исходные параметры задачи, однако искупаются возможностью получить точные решения при исследовании динамических деформаций нелинейно-упругих тел конечных размеров. Это иллюстрируется решением задачи об изгибе балок, материал которых подчиняется степенной зависимости между напряжениями и деформациями.

Изгиб балки описывается дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.$$

Здесь w — прогиб; M — изгибающий момент; m — погонная масса балки; q — погонная нагрузка. Момент M связан с кривизной $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ степенной зависимостью

$$(2) \quad M = M_0 |\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|^\mu \operatorname{sign} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}),$$

где μ — задаваемый показатель степени; M_0 — размерная константа. Автомодельное решение системы (1), (2) ищется в виде

$$(3) \quad w = w_* n_1 t^\alpha \varphi(\xi), \quad \xi = x/(bn_2 t^\beta);$$

$$(4) \quad M = M_* n_3 t^\delta \psi(\xi).$$

Здесь w_* , M_* , b — размерные постоянные; α , β , δ , n_1 , n_2 , n_3 — неизвестные пока показатели степени и числовые множители; $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ — безразмерные функции переменной ξ .

Рассматриваются два варианта загрузки балки: распределенной нагрузкой

$$(5) \quad q = q_* t^\omega f(\xi)$$

и сосредоточенной силой, приложенной в сечении $x = 0$,

$$(6) \quad P = P_* t^\lambda,$$

где q_* , P_* — задаваемые размерные величины; $f(\xi)$ — функция переменной ξ ; ω , λ — задаваемые показатели степени. Выражение (6) позволяет записать граничное условие при $x = 0$

$$(7) \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 0,5 P_* t^\lambda.$$

Используя соображения о размерностях величин, можно выразить размерные коэффициенты в формулах (3), (4) через задаваемые величины. Если задана нагрузка (5), то

$$(8) \quad w_* = q_* m^{-1}, b = (M_0 m^{-\mu} q_*^{\mu-1})^{1/(2\mu+2)}, M_* = (M_0 m^{-\mu} q^{2\mu})^{1/(\mu+1)},$$

а если (6), то

$$(9) \quad w_* = (M_0^{-1} P_*^{2(1+\mu)} m^{-(1+2\mu)})^{1/(1+3\mu)}, b = (M_0 P_*^{\mu-1} m^{-\mu})^{1/(1+3\mu)}, \\ M_* = P_* b.$$

Производится подстановка выражений (3)–(5) в (1), (2) и (7) для получения уравнений, определяющих функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$. При подстановке учитываются соотношения (8) или (9). Выполняемые преобразования аналогичны тем, которые приведены в [3]. В частности, для того чтобы уравнения не зависели явно от времени, показатели степени при t в процессе подстановки полагаются равными нулю. Это дает соотношения

$$(10) \quad \alpha - 2 - \delta + 2\beta = 0, \mu(\alpha - 2\beta) - \delta = 0, \omega - \delta + 2\beta = 0, \\ \lambda - \delta + \beta = 0.$$

В случае задания нагрузки (5) для определения значений α , β , δ используются три первых уравнения (10). При действии только силы (6) из (10) исключается третье уравнение.

В уравнения, определяющие функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$, войдут также комбинации из произвольных величин n_1 , n_2 , n_3 . Они подбираются таким образом, чтобы упростить значения коэффициентов этих уравнений. Можно добиться того, чтобы часть коэффициентов была равна единице. В рассматриваемом случае примем $n_1 = [\alpha(\alpha - 1)]^{-1}$, $n_2 = [\alpha(\alpha - 1)]^{-\mu/(2\mu+2)}$, $n_3 = [\alpha(\alpha - 1)]^{-\mu/(\mu+1)}$.

В дальнейшем используются только вырожденные решения, которым соответствует $\beta = 0$. Для функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ при $\beta = 0$ окончательно получаются дифференциальные уравнения

$$(11) \quad \psi'' + \varphi = f(\xi), \quad \psi = |\varphi''|^\mu \operatorname{sign} \varphi''.$$

Условие (7) дает соотношение

$$(12) \quad \psi'(0) = n_2/(2n_3).$$

Из формул (10) при $\beta = 0$ имеем

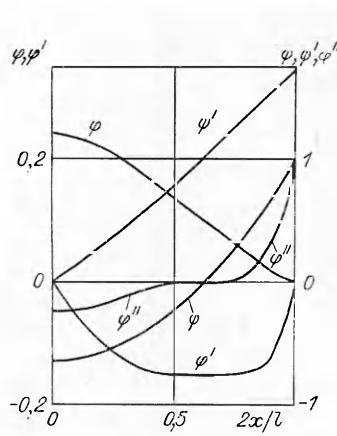
$$(13) \quad \alpha = 2/(1 - \mu), \quad \delta = 2\mu/(1 - \mu), \quad \omega = 2\mu/(1 - \mu), \quad \lambda = 2\mu/(1 - \mu).$$

Два последних равенства в этих формулах связывают коэффициент μ , характеризующий упругие свойства материала, и показатели степени ω и λ , определяющие изменение внешней нагрузки в вырожденном решении.

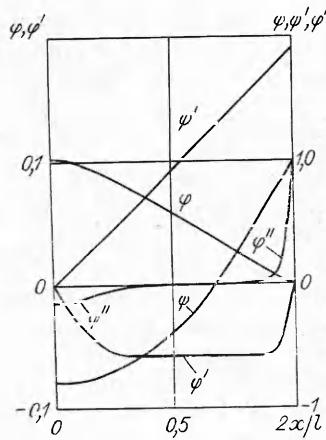
Система (11), описывающая вырожденное автомодельное решение, позволяет рассчитывать балки конечной длины. В качестве переменной в этой системе, по существу, выступает линейная координата, поскольку случаю $\beta = 0$ отвечает $\xi = x/(bn_2)$. При любом фиксированном значении x (или ξ) могут быть сформулированы граничные условия для функций φ , ψ или их производных, выражающихся через физические величины, характеризующие изгиб балок. Вырожденному решению будет соответствовать неизменяемая с течением времени форма изгиба балки, определяемая видом функции φ .

Система (11) использовалась для расчета изгиба свободно опертых и жестко заделанных балок под действием равномерно распределенной нагрузки (5) ($f(\xi) = 1$) или сосредоточенной силы (6), приложенной в центре балки, при разных длинах пролета и двух значениях μ (1/3 и 0,1). Каждому конкретному значению μ в вырожденном решении отвечают, согласно (13), определенные значения ω или λ , от которых зависит характер изменения нагрузки во времени.

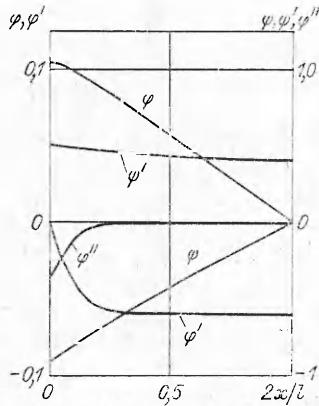
При задании воздействия только силы (6) функция $f(\xi)$ в (11) полагается равной нулю. Длина балки обозначается l , начало координат бе-



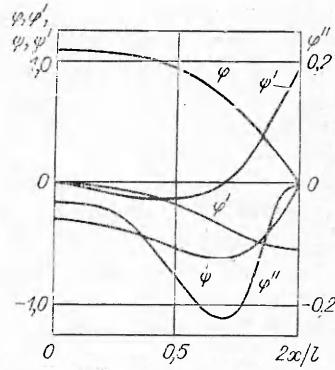
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

рется посередине пролета. Для функций, входящих в (11), могут быть записаны граничные условия в начале координат ($\xi = 0$) и на правой опоре ($\xi = \xi_*$). При действии сосредоточенной силы одно из условий при $\xi = 0$ определяется формулой (12).

Расчеты производились на ЭВМ «Электроника-60» методом редукции к задаче Коши [4], согласно которому при $\xi = 0$ использовались два известных граничных условия для функций φ , ψ и их производных и произвольно задавались два других условия. Решалась задача Коши. По величине незамыкания решения на конце балки ($\xi = \xi_*$) корректировались значения условий при $\xi = 0$. Процесс повторялся до получения необходимой точности.

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1—4 в виде графиков φ , ψ , ψ' , ψ'' , φ' , φ'' , характеризующих соответствующие физические величины: прогиб, изгибающий момент, перерезывающую силу, угол наклона упругой линии и кривизну балки. Графики построены в функции отношения $\xi/\xi_* = 2x/l$. Параметр $\xi_* = l/(2bn_2)$ характеризует относительную длину балки. Графики представлены для одной половины балки.

На рис. 1 показан изгиб жестко заделанной балки при равномерно распределенной нагрузке для $\mu = 1/3$ и $\xi_* = 2$. Значению $\mu = 0,1$ при сохранении остальных параметров соответствует рис. 2. На рис. 3 приведены результаты для свободно опертой балки, нагруженной посередине пролета сосредоточенной силой при $\mu = 0,1$ и $\xi_* = 2$. Прослеживается локализация деформаций (рост кривизны φ'') в наиболее напряженных местах балки. Это обуславливается принятой зависимостью (2), согласно которой при $0 < \mu < 1$ небольшому увеличению изгибающего момента

может отвечать большой рост деформаций. В местах, где напряжения меньше, наблюдаются прямолинейные участки балки.

У длинных свободно опертых балок ($\xi_* \geqslant 5$), находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, максимум изгибающего момента смещается из центра к концам балки. Это показано на рис. 4 при $\mu = 1/3$, $\xi_* = 5$. Для длинных жестко заделанных балок, загруженных равномерно распределенной нагрузкой, изгибающий момент имеет максимальное значение на опоре, а в пролете максимум момента также перемещается из центра к опорам.

Заметим, что при значении μ , стремящемся к нулю, коэффициенты ω и λ , согласно (13), также обращаются в нуль. Этот случай отвечает воздействию мгновенно приложенной постоянной нагрузки на балку из идеального жесткопластического материала.

Вырожденное решение можно найти в задаче о распространении продольных волн. Используя зависимости, приведенные в [5], можно получить решение о продольном ударе по торцу нелинейно-упругого стержня, другой конец которого свободен или закреплен. При этом решение записывается в квадратурах и выражается через эллиптические интегралы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1972.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. Ястребов В. П. Автомодельные задачи динамического изгиба бесконечных нелинейно-упругих балок // ПМТФ.— 1981.— № 4.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы.— М.: Наука, 1977.— Ч. 2.
5. Ястребов В. П. Автомодельные задачи о распространении продольных волн в нелинейных средах // ПМТФ.— 1985.— № 4.

Поступила 3/X 1986 г.

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Л. Г. Доборджинидзе

(Тбилиси)

Для материала гармонического типа [1] рассматривается плоская обратная задача нелинейной теории упругости об определении равнопрочного контура отверстия. В линейном классическом случае эта задача решена в [2].

1. Пусть рассматриваемая нелинейно-упругая среда занимает плоскость переменной $z = x + iy$, ослабленной криволинейным отверстием. Предположим, что к контуру L этого отверстия приложены постоянные нормальные усилия [3]

$$(1.1) \quad \sigma_n = P_0, \tau_n = 0,$$

а на бесконечности реализуется двухосное растяжение вдоль координатных осей

$$(1.2) \quad \sigma_x^{(\infty)} = P_1, \sigma_y^{(\infty)} = P_2.$$

В этих условиях требуется найти форму и расположение контура L таким образом, чтобы во всех его точках тангенциальное напряжение σ_t было постоянным

$$(1.3) \quad \sigma_t = \sigma$$

(σ — неизвестная пока постоянная).