

УДК 539.3

УЧЕТ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ЧАСТОТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ДЮРАЛЮМИНИЯ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В. Н. Паймушин^{*,**}, В. А. Фирсов^{*}, И. Гюнал^{*}, В. М. Шишкин^{***}

* Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия

** Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия

*** Вятский государственный университет, 610000 Киров, Россия

E-mails: vpajmushin@mail.ru, vafirsov_49@mail.ru, igyunal@kai.ru, tism1@rambler.ru

Исследованы изгибные колебания образцов и выявлена существенная зависимость от частоты динамического модуля упругости дюралюминия марки Д16АТ. Показано, что в диапазоне частот $0 \div 20$ Гц динамический модуль упругости значительно уменьшается, при более высоких частотах практически не меняется. Разработана общая методика определения форм и частот свободных колебаний конструкции с учетом зависимости динамического модуля упругости материала от частоты его деформирования. Проведены численные эксперименты по импульсному воздействию на удлиненную пластину и показана необходимость учета частотной зависимости динамического модуля упругости дюралюминия в расчетах конструкций.

Ключевые слова: образец, динамический модуль упругости, частотная зависимость, идентификация, конечный элемент.

DOI: 10.15372/PMTF20170317

Введение. Дюралюминий (дуралюмин, дюраль) — общее название группы высокопрочных сплавов на основе алюминия с добавками меди, магния и марганца, в которую входят марки Д16, Д16Т, Д16АТ, Д18 и др. В настоящее время данные сплавы являются основным конструкционным материалом в авиационной и ракетно-космической технике, где предъявляются высокие требования к прочности и массе проектируемой конструкции. При этом в расчетах конструкции независимо от условия ее нагружения (статического или динамического) обычно используется модуль упругости, полученный при статических испытаниях образцов.

Наиболее достоверную информацию о характеристиках упругости материала позволяет получить динамический метод, основанный на данных экспериментального измерения циклической частоты изгибных колебаний специально изготовленных образцов и сравнения ее с расчетной частотой идеально упругого образца. В настоящее время для экспериментального определения упругих и демпфирующих свойств материалов существует международный стандарт ASTM E-756 [1], в соответствии с которым с помощью акустического метода в резонансных режимах исследуется динамическое поведение консолюно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-00667).

© Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Шишкин В. М., 2017

закрепленных образцов различной структуры в диапазоне частот $50 \div 5000$ Гц. Однако указанный стандарт имеет ряд сужающих область его применения ограничений, главным из которых является невозможность определения упругих и демпфирующих свойств материалов при частотах менее 50 Гц, наиболее близких к реальным условиям эксплуатации большинства конструкций.

С целью реализации данной возможности разработана экспериментальная установка [2] для исследования упругих и демпфирующих свойств широкого класса материалов на основе обработки экспериментально полученных виброграмм затухающих изгибных колебаний образцов. В частности, для исследования упругих и демпфирующих свойств резины при растяжении-сжатии и сдвиге необходимо иметь трехслойные тест-образцы симметричной структуры с жесткой основой, расположенной соответственно внутри или снаружи образца. При этом в обоих случаях предполагается предварительная оценка упругих и демпфирующих свойств материала основы на образцах, изготовленных из данного материала. В работе [3] в качестве основы использовалась листовая сталь марки Ст. 3, которая имеет большое значение модуля упругости и характеристики демпфирования, зависящие от амплитуды.

Для определения характеристик упругости и демпфирования мягких материалов в составе трехслойных образцов необходимо, чтобы материал основы имел сравнительно малый модуль упругости и стабильно низкие характеристики демпфирования. Результаты проведенных экспериментов показывают, что указанным требованиям в наибольшей мере удовлетворяет дюралюминий. В результате многочисленных динамических испытаний дюралюминиевых образцов установлено, что при циклическом деформировании модуль упругости дюралюминия существенно уменьшается по сравнению с его статическим значением, стремясь к определенному пределу по мере увеличения частоты колебаний образца. Это позволяет называть указанный модуль динамическим модулем упругости материала, зависящим от частоты.

Заметим, что термин “динамический модуль упругости” не является новым: данный термин используется в стандарте ГОСТ 23499-2009 [4] как физическая величина, характеризующая звукоизоляционные свойства материалов и изделий. В литературе понятие динамического модуля упругости используется в термодинамической теории релаксационного внутреннего трения в твердых телах, процесс деформирования в которых считается не только механическим, но и термодинамическим [5]. В случае если деформирование происходит медленно, термодинамический процесс является изотермическим, при быстром деформировании (например, при колебаниях) этот процесс является адиабатическим [6]. Поэтому даже в случае малых упругих деформаций при изучении напряженно-деформированного состояния тела предпочтительным является термодинамический подход, который впервые применил У. Томсон.

В классической теории внутреннего трения в материале при колебаниях твердых тел [5, 7] динамический модуль упругости определяется как отношение амплитуды напряжения к синфазной с ним составляющей амплитуды деформации при гармоническом законе деформирования материала. Тангенс угла сдвига амплитуды деформации относительно амплитуды напряжения является одной из мер рассеяния энергии в материале [8], которая, как и все другие меры, зависит не от частоты деформации, а только от ее амплитуды. Таким образом, динамический модуль является амплитудно-зависимой характеристикой упругости материала, значение которой несколько больше значения статического модуля упругости материала (для металлов это различие не превышает 1 %).

При моделировании динамического поведения конструкции часто ставится задача определения собственных форм и частот ее колебаний, которая может быть либо самостоятельной задачей, либо составной частью общего анализа динамической реакции кон-

струкции при заданном внешнем воздействии. Поскольку динамический модуль упругости дюралюминия существенно зависит от частоты его деформирования, возникает проблема адекватного учета данной зависимости при постановке и решении динамических задач.

1. Определение зависимости динамического модуля упругости дюралюминия от частоты по частотам изгибных колебаний образцов. Для определения зависимости динамического модуля упругости дюралюминия от частоты деформирования в широком диапазоне частот динамические испытания образцов необходимо проводить при изгибных затухающих и резонансных колебаниях. В последнем случае кроме основной частоты необходимо измерять и более высокие частоты (в действительности удается зафиксировать не более трех частот включая основную). Для получения низких частот необходимо использовать образцы значительной длины. При этом с целью исключения статической составляющей прогиба динамические испытания таких образцов проводятся при их вертикальном положении [9] с зажатым верхним концом.

Однако при указанном положении образца на частоты собственных колебаний оказывают влияние силы тяжести, зависящие от длины данного образца. Для оценки этого влияния можно выбрать статический модуль упругости материала. Рассмотрим уравнение свободных изгибных колебаний длинной вертикально закрепленной пластины с учетом ее силы тяжести, построенное в рамках классических гипотез Кирхгофа — Лява:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho gh \frac{\partial}{\partial x} \left((L-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$x=0: \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x=L: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$$

Здесь ρ — плотность материала; h , L — толщина и длина пластины соответственно; w — прогиб; t — время; E , ν — статический модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; x — пространственная координата, отсчитываемая от точки закрепления вниз вдоль оси пластины; g — ускорение свободного падения. Решение уравнения (1.1) ищется в виде $w = e^{i\omega t} u(x)$, где ω — круговая частота свободных колебаний пластины; i — мнимая единица. Вводя безразмерные координату $\xi = x/L$ и функцию $\varphi(\xi) = u(x)/h$, уравнение (1.1) приведем к виду

$$\varphi^{(IV)} - s(1-\xi)\varphi'' + s\varphi' - \lambda^2\varphi = 0 \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$\xi=0: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \xi=1: \quad \varphi'' = \varphi''' = 0 \quad (1.3)$$

(штрих означает дифференцирование переменной по осевой координате x). Безразмерные параметры s , λ определяются выражениями

$$s = 12(1-\nu^2)\rho g L^3 / (Eh^2), \quad \lambda^2 = 12\omega^2(1-\nu^2)\rho L^4 / (Eh^2). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.2) с граничными условиями (1.3) представляют собой задачу на определение собственных форм и частот колебаний вертикальной консольно закрепленной удлиненной пластины с учетом ее веса. Для приближенного определения низшей частоты f используем метод Бубнова — Галеркина:

$$\varphi = aW(\xi), \quad a \int_0^1 W(\xi) [\varphi^{(IV)} - s(1-\xi)\varphi'' + s\varphi' - \lambda^2\varphi] d\xi = 0. \quad (1.5)$$

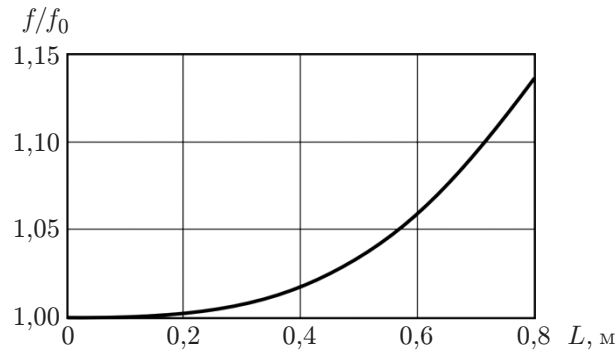


Рис. 1. Зависимость относительной частоты колебаний от длины пластины

Здесь a — произвольный множитель; $W(\xi)$ — базисная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.3). В качестве $W(\xi)$ будем использовать нормированную форму колебаний пластины, соответствующую низшей частоте, без учета веса:

$$W(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} k\xi - \cos k\xi) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} k + \cos k}{\operatorname{sh} k + \sin k} (\operatorname{sh} k\xi - \sin k\xi), \quad k = 1,875, \quad W(1) = 1. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5) и вычисляя определенный интеграл, получаем уравнение

$$a(3,090\,544 + 0,392\,715s - 0,249\,998\lambda^2) = 0,$$

из которого при $a \neq 0$ следует $\lambda^2 = 12,3623 + 1,5709s$. Наименьшее значение ω определяется по известному параметру λ из второго выражения в (1.4):

$$\omega = \sqrt{1,0302Eh^2/[(1 - \nu^2)\rho L^4] + 1,5709g/L}. \quad (1.7)$$

Из точного решения уравнения (1.2) без учета силы тяжести пластины следует

$$\omega_0 = \sqrt{1,0302Eh^2/[(1 - \nu^2)\rho L^4]}.$$

Отсюда получаем

$$\omega/\omega_0 = f/f_0 = \sqrt{1 + 1,5248(1 - \nu^2)\rho g L^3/(Eh^2)}.$$

Для оценки величины данного отношения рассмотрим пластину толщиной $h = 0,95$ мм, изготовленную из дюралюминия марки Д16АТ со следующими характеристиками: $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 2700$ кг/м³.

На рис. 1 представлена зависимость относительной частоты колебаний f/f_0 от длины L пластины. Видно, что учет сил тяжести вносит поправку в определение частоты первого тона изгибных колебаний, которая увеличивается с увеличением длины пластины. При длине образцов $L = 0,1 \div 0,7$ м максимальная поправка к циклической частоте f_0 равна 9,3 %, что свидетельствует о необходимости учета сил тяжести при определении частот колебаний образцов достаточно большой длины.

Из выражения (1.7) с учетом равенства $\omega = 2\pi f$ следует простая для практического применения формула для определения динамического модуля упругости материала по экспериментально измеренной циклической частоте колебаний f образца:

$$E_d = \frac{\rho(1 - \nu^2)L^4}{h^2} \left(38,3216f^2 - 1,5248 \frac{g}{L} \right). \quad (1.8)$$

Резонансные колебания образца по трем собственным формам, соответствующим низшим частотам, имеют место на частотах, совпадающих с соответствующими частотами

Таблица 1

Значения экспериментальных резонансных частот $f_{exp,n}$, частот f_n , полученных по формуле (1.9) при $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, относительной разности частот Δ и динамического модуля упругости E_d , вычисленного по формуле (1.10), при различных значениях L, n

$L, \text{ мм}$	n	$f_{exp,n}, \text{ Гц}$	$f_n, \text{ Гц}$	Δ	$E_d \cdot 10^{-4}, \text{ МПа}$
200	1	18,10	20,766	-0,128	5,470
	2	113,00	130,150	-0,132	5,428
250	1	11,55	13,290	-0,131	5,438
	2	73,20	83,296	-0,121	5,560
	3	205,30	233,254	-0,120	5,578
275	1	9,73	10,984	-0,114	5,650
	2	60,70	68,840	-0,118	5,598
	3	170,90	192,772	-0,113	5,659
300	1	8,18	9,230	-0,114	5,656
	2	50,50	57,844	-0,127	5,488
	3	140,90	161,982	-0,130	5,448
350	1	6,03	6,781	-0,111	5,694
	2	37,30	42,498	-0,122	5,547
	3	104,20	119,007	-0,124	5,520
400	1	4,66	5,192	-0,102	5,800
	2	28,92	32,537	-0,111	5,688
	3	80,00	91,115	-0,122	5,551

его свободных колебаний. Расчетные значения данных частот можно определить по известной формуле для тонкой консольно закрепленной пластины:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (n = 1, 2, 3), \quad (1.9)$$

где $k_1 = 1,875$; $k_2 = 4,694$; $k_3 = 7,855$; $D = E_d h^3 / [12(1 - \nu^2)]$; $m = \rho h$. Отсюда следует простая формула для определения динамического модуля упругости материала при каждой экспериментальной частоте $f_{exp,n}$:

$$E_d = 48\pi^2 \rho L^4 (1 - \nu^2) f_{exp,n}^2 / (h^2 k_n^4). \quad (1.10)$$

Исследуем резонансные изгибные колебания консольно закрепленных образцов из дюралюминия марки Д16АТ длиной $L = 200 \div 400$ мм, шириной $b = 20$ мм, толщиной $h = 0,95$ мм. Испытания проводились с использованием вибрационного электродинамического стенда ВЭДС-10. В табл. 1 приведены значения экспериментальных резонансных частот $f_{exp,n}$, соответствующих частот f_n , полученных по формуле (1.9) при статическом модуле упругости $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа (для сравнения их с экспериментальными частотами $f_{exp,n}$), относительной разности частот $\Delta = (f_{exp,n} - f_n) / f_n$ и динамического модуля упругости E_d дюралюминия марки Д16АТ, вычисленного по формуле (1.10) при экспериментальных частотах $f_{exp,n}$, при различных значениях L, n . Для образца длиной $L = 200$ мм в табл. 1 приведены данные только для первых двух частот, так как наибольшую третью частоту экспериментально определить не удалось.

Следует отметить, что значения экспериментальных частот $f_{exp,n}$ всех образцов меньше соответствующих расчетных частот f_n , полученных при статическом модуле упругости $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа. Это уменьшение не объясняется погрешностями эксперимента (в этом случае отклонения Δ имели бы случайный характер), его можно объяснить только существенно меньшим значением динамического модуля упругости E_d дюралюминия

Таблица 2

Значения экспериментальных частот f_{exp} , частот f , полученных с использованием формулы (1.7) при $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, относительной разности частот Δ и динамического модуля упругости E_d , вычисленного по формуле (1.8), при различных значениях L

L , мм	f_{exp} , Гц	f , Гц	Δ	$E_d \cdot 10^{-4}$, МПа
450	3,790	4,207	-0,099	5,774
500	3,148	3,438	-0,084	5,953
600	2,260	2,444	-0,075	6,027
650	1,960	2,113	-0,073	6,037
700	1,710	1,852	-0,077	5,929

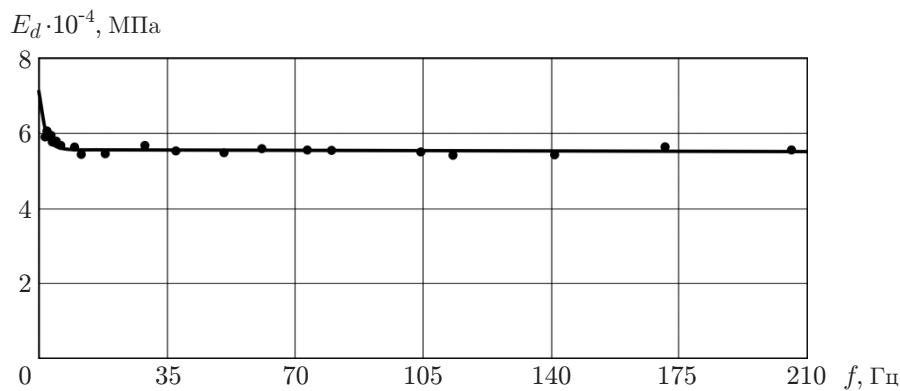


Рис. 2. Зависимость динамического модуля упругости от частоты: точки — эксперимент, линия — аппроксимирующая кривая

марки Д16АТ по сравнению с его статическим модулем упругости E (см. последнюю графу табл. 1). Некоторое увеличение модуля E_d при минимальной экспериментальной частоте $f_{exp} = 4,66$ Гц свидетельствует о его стремлении к статическому модулю E при $f_{exp} < 4,66$ Гц.

Для определения динамического модуля упругости дюралюминия марки Д16АТ при частотах, меньших 4,66 Гц, исследовались изгибные затухающие колебания вертикально закрепленных консольных образцов длиной $L = 450 \div 700$ мм, шириной $b = 20$ мм, толщиной $h = 0,95$ мм. В табл. 2 приведены значения экспериментальных частот f_{exp} , соответствующих им значений расчетных частот f , полученных с использованием формулы (1.7) при $\omega = 2\pi f$ и $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, относительной разности частот $\Delta = (f_{exp} - f)/f$ и значения динамического модуля упругости E_d дюралюминия марки Д16АТ, полученные по формуле (1.8) при частотах f_{exp} . Как и ранее, наблюдается уменьшение экспериментальной частоты f_{exp} всех образцов относительно расчетной частоты f , полученной при значении статического модуля упругости $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, которое меньше указанного в табл. 1. Этот результат соответствует тому, что при $f < 4,66$ Гц значения динамического модуля упругости E_d значительно меньше значений статического модуля E , однако имеется тенденция к их увеличению до значения E .

По данным, приведенным в табл. 1, 2, построена зависимость $E_d(f)$ (рис. 2). Для получения сглаживающей кривой использовалась аппроксимация

$$E_d(f) = c_1 e^{c_2 f} + c_3 e^{c_4 f}, \quad (1.11)$$

параметры c_1, c_2, c_3, c_4 которой определялись минимизацией функции

$$H(c_1, c_2, c_3, c_4) = \sum_i \left(1 - \frac{E_{d,i}^*}{E_{d,i}}\right)^2, \quad (1.12)$$

где $E_{d,i}^*, E_{d,i}$ — соответственно табличные и найденные по аппроксимации (1.11) значения динамического модуля упругости E_d . Поиск минимума функции (1.12) осуществлялся с помощью метода конфигураций Хука — Дживса [10] с учетом ограничения — равенства $E_d(0) = c_1 + c_3 = E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа. В результате получена зависимость (линия на рис. 2)

$$E_d(f) = 1,6148 \cdot 10^4 e^{-6,1695 \cdot 10^{-1} f} + 5,5852 \cdot 10^4 e^{-5,8931 \cdot 10^{-5} f}. \quad (1.13)$$

Видно, что динамический модуль упругости дюралюминия марки Д16АТ при увеличении частоты f в диапазоне $0 \div 20$ Гц значительно уменьшается, при $f = 20 \div 210$ Гц практически не меняется.

Заметим, что с помощью зависимости (1.13) можно определять значения динамического модуля упругости дюралюминия марки Д16АТ только при $f = 1,71 \div 205,30$ Гц или при незначительном превышении значения $f = 205,3$ Гц для исследованных образцов. При $f \gg 205,3$ Гц зависимость (1.13) не позволяет достоверно определить значение динамического модуля E_d . Однако данные частоты, как правило, соответствуют высоким тонам колебаний, которые не оказывают существенного влияния на динамическую реакцию конструкции [11]. Более того, как отмечалось выше, при $f = 20 \div 210$ Гц зависимость $E_d(f)$ практически не меняется. Поэтому при $f > 205,3$ Гц значения E_d можно определять по аппроксимации (1.13).

2. Определение динамической реакции удлиненной пластины с учетом зависимости динамического модуля упругости материала от частоты. При ударном и импульсном нагружениях конструкций и их элементов, изготовленных из традиционных конструкционных материалов (сталь, дюралюминий и др.), соответствующие динамические задачи механики формулируются и решаются с использованием упругих характеристик материалов, определяемых на основе данных статических испытаний образцов. Ниже излагается численная конечно-элементная методика решения простой динамической задачи описанного класса с учетом зависимости модуля упругости материала (дюралюминия) от частоты деформирования f .

Рассмотрим прямоугольную удлиненную консольно закрепленную пластину, отнесенную к декартовой системе координат $x y z$ таким образом, что плоскость $z = 0$ совпадает со срединной поверхностью пластины. Ось z пластины направлена вниз. На пластину действует поверхностная импульсная нагрузка постоянного направления $p(x, t) = p_{\max}(x)\psi(t)$ ($0 \leq t \leq \tau$) ($p_{\max}(x)$, τ — максимальные значения и продолжительность действия нагрузки $p(x, t)$ соответственно; $\psi(t)$ — заданная функция времени t , характеризующая форму импульса, причем $\psi(t)_{\max} = 1$).

Задачу определения динамической реакции удлиненной пластины с учетом зависимости динамического модуля упругости материала от частоты можно решать аналитически, используя предположение о цилиндрической форме прогиба пластины. Однако более удобным в реализации является метод конечных элементов. Пластина в продольном направлении представляется в виде конечных элементов с четырьмя степенями свободы (рис. 3), деформирующимися в рамках гипотез Кирхгофа — Лява.

Уравнения движения конечно-элементной модели пластины при импульсном воздействии имеют вид

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r}_s + K_d\mathbf{r} = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_{\max}\psi(t). \quad (2.1)$$

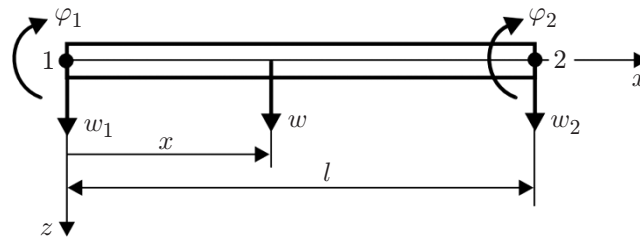


Рис. 3. Конечный элемент удлиненной пластины

Здесь M , C , K — соответственно матрица масс, суммарная матрица внутреннего и внешнего (аэродинамического) демпфирования и матрица статической жесткости рассматриваемой модели; K_d — матрица динамической жесткости; \mathbf{r}_s — вектор узловых перемещений в положении статического равновесия пластины; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — вектор узловых перемещений относительно положения статического равновесия; \mathbf{P}_s , \mathbf{P}_{\max} — векторы внешних узловых сил соответственно от сил тяжести пластины и нагрузки $p_{\max}(x)$; точка над символом означает дифференцирование по времени t . Матрица K_d вычисляется с использованием динамического модуля упругости E_d , зависящего от частоты f , что предполагает следующее разложение вектора \mathbf{r} по собственным формам колебаний пластины и определение данной матрицы с использованием модуля E_d , соответствующего частоте каждой формы. Вектор \mathbf{r}_s определяется из условия $K\mathbf{r}_s = \mathbf{P}_s$. С учетом данного условия уравнения (2.1) принимают вид

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + K_d\mathbf{r} = \mathbf{P}_{\max}\psi(t) \quad (2.2)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$.

Поскольку при импульсном воздействии максимальная динамическая реакция пластины достигается за очень малый промежуток времени, в течение которого силы внутреннего и внешнего аэродинамического сопротивления не успевают поглотить значительную часть энергии, передаваемой пластине, для получения верхней оценки динамической реакции можно использовать систему уравнений без учета демпфирования

$$M\ddot{\mathbf{r}} + K_d\mathbf{r} = \mathbf{P}_{\max}\psi(t) \quad (2.3)$$

с теми же начальными условиями, что и для уравнений (2.2). Геометрические граничные условия, по-видимому, лучше учитывать с использованием правила Пэйна — Айронса [12]: диагональные элементы матрицы K_d , соответствующие номерам узловых перемещений (прогиба и угла поворота) в заделке, должны умножаться на параметр штрафа $\alpha = 10^6 \div 10^8$. При применении данной процедуры перемещения в заделке становятся практически равными нулю.

Для формирования системы (2.3) необходимо иметь уравнения динамического равновесия конечного элемента

$$M_e\ddot{\mathbf{r}}_e + K_{d,e}\mathbf{r}_e = \mathbf{P}_{\max,e}\psi(t), \quad (2.4)$$

где M_e , $K_{d,e}$, $\mathbf{r}_e = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}$ — соответственно матрица масс, матрица динамической жесткости и вектор узловых перемещений данного элемента; $\mathbf{P}_{\max,e}$ — вектор внешних узловых сил от нагрузки $p_{\max}(x)$ в пределах элемента. Для получения указанных матриц и вектора $\mathbf{P}_{\max,e}$ используем принцип Даламбера — Лагранжа, согласно которому сумма возможных работ внешних сил, сил инерции и внутренних упругих сил (напряжений) должна быть равна нулю:

$$b \int_0^l \delta w p_{\max}(x) dx \psi(t) - \rho b h \int_0^l \delta w \ddot{w} dx - b \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx dy = 0. \quad (2.5)$$

Здесь b, h, l — ширина, толщина и длина элемента соответственно; ρ — плотность материала; δw — вариация прогиба w ; $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}\}$ — вектор возможных осевых деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и угла сдвига γ_{xy} в произвольной точке элемента; $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ — вектор, содержащий нормальные напряжения σ_x, σ_y и касательное напряжение τ_{xy} в той же точке элемента. С учетом того что при цилиндрическом изгибе пластины $\varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0, \sigma_y = \nu \sigma_x, \tau_{xy} = 0, \sigma_x = E \varepsilon_x / (1 - \nu^2)$ [13], уравнение (2.5) принимает вид

$$b \int_0^l \delta w p_{\max}(x) dx \psi(t) - \rho b h \int_0^l \delta w \ddot{w} dx - \frac{Eb}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \delta \varepsilon_x \varepsilon_x dx dz = 0. \quad (2.6)$$

Прогиб w в пределах элемента представляется выражением

$$w = \mathbf{N}^T \mathbf{r}_e. \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ — вектор, содержащий базисные функции конечного элемента:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

Подставляя в (2.6) геометрическую зависимость $\varepsilon_x = -z \partial^2 w / \partial x^2$ и учитывая представление (2.7), получаем

$$b \delta \mathbf{r}_e^T \int_0^l \mathbf{N} p_{\max}(x) dx \psi(t) - \rho b h \delta \mathbf{r}_e^T \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \ddot{\mathbf{r}}_e - \frac{Eb}{1 - \nu^2} \delta \mathbf{r}_e^T \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_0^l \mathbf{N}'' (\mathbf{N}'')^T dx \mathbf{r}_e = 0. \quad (2.8)$$

С учетом условия независимости компонент вектора \mathbf{r}_e уравнение (2.8) можно представить в виде (2.4) с матрицами $M_e, K_{d,e}$ и вектором $\mathbf{P}_{\max,e}$, определяемыми выражениями

$$M_e = \rho b h \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx, \quad K_{d,e} = \frac{E_d b h^3}{12(1 - \nu^2)} \int_0^l \mathbf{N}'' (\mathbf{N}'')^T dx, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_{\max,e} = b \int_0^l \mathbf{N} p_{\max}(x) dx.$$

После вычисления определенных интегралов в первых двух выражениях получаем матрицу масс и матрицу динамической жесткости конечного элемента в окончательном виде

$$M_e = \rho b h \begin{bmatrix} 13l/35 & 11l^2/210 & 9l/70 & -13l^2/420 \\ 11l^2/210 & l^3/105 & 13l^2/420 & -l^3/140 \\ 9l/70 & 13l^2/420 & 13l/35 & -11l^2/210 \\ -13l^2/420 & -l^3/140 & -11l^2/210 & l^3/105 \end{bmatrix},$$

$$K_{d,e} = \frac{E_d b h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{P}_{\max,e}$ зависит от закона распределения нагрузки $p_{\max}(x)$ в пределах конечного элемента. Будем считать этот закон линейным: $p_{\max}(x) = p_{\max,1}(1 - x/l) + p_{\max,2}x/l$, где $p_{\max,1}$, $p_{\max,2}$ — временные максимумы поверхностной нагрузки $p(x, t)$ в узлах 1 и 2 элемента. С учетом линейности этого закона после интегрирования последнего выражения в (2.9) по длине элемента получаем

$$\mathbf{P}_{\max,e} = \frac{bl}{60} \begin{bmatrix} 21 & 3l & 9 & -2l \\ 9 & 2l & 21 & -3l \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_{\max,1} \\ p_{\max,2} \end{Bmatrix}.$$

При решении системы уравнений (2.3) модуль упругости материала будем считать постоянным (не зависящим от частоты f) и равным статическому модулю E . В этом случае матрицу K_d в системе (2.3) необходимо заменить матрицей статической жесткости K , вычисляемой при статическом модуле упругости E :

$$M\ddot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r} = \mathbf{P}_{\max}\psi(t). \quad (2.10)$$

Рассмотрим движение конечно-элементной модели пластины в пространстве нескольких низших собственных форм колебаний F_n ($n = 1, 2, \dots, s$):

$$\mathbf{r}(t) = \Phi\mathbf{q}(t). \quad (2.11)$$

Здесь Φ — прямоугольная матрица, столбцами которой являются формы F_n ; $\mathbf{q}(t)$ — вектор нормальных координат $q_n(t)$, соответствующих формам F_n . Подставляя представление (2.11) в систему (2.10) и применяя затем принцип Даламбера — Лагранжа, получаем систему s уравнений

$$M_q\ddot{\mathbf{q}} + K_q\mathbf{q} = \mathbf{P}_{q,\max}\psi(t). \quad (2.12)$$

Выражения для матриц M_q , K_q и вектора $\mathbf{P}_{q,\max}$ имеют вид

$$M_q = \Phi^T M \Phi, \quad K_q = \Phi^T K \Phi, \quad \mathbf{P}_{q,\max} = \Phi^T \mathbf{P}_{\max}.$$

Собственные формы F_n ($n = 1, 2, \dots, s$) и соответствующие им частоты ω_n определяются из системы однородных уравнений

$$(K - \omega^2 M) F = 0.$$

Для решения данной задачи используем метод преобразований Якоби [14], реализуемый с помощью встроенных функций пакетов MATLAB, Mathcad, Mathematica.

Следует отметить, что при $n \neq m$ формы (моды) колебаний F_n , F_m являются взаимно ортогональными по отношению к матрице масс и матрице жесткости пластины. В этом случае система (2.12) разделяется на модальные уравнения

$$m_n\ddot{q}_j + k_n q_n = P_{n,\max} \psi(t) \quad (n = 1, 2, \dots, s) \quad (2.13)$$

с начальными условиями $q_n(0) = 0$, $\dot{q}_n(0) = 0$. Параметры m_n , k_n , $P_{n,\max}$ определяются выражениями

$$m_n = F_n^T M F_n, \quad k_n = F_n^T K F_n, \quad P_{n,\max} = F_n^T \mathbf{P}_{\max}.$$

При использовании динамического модуля упругости E_d , зависящего от частоты f , вместо (2.13) следует применять уравнения

$$m_n\ddot{q}_n + k_{d,n} q_n = P_{n,\max} \psi(t) \quad (n = 1, 2, \dots, s), \quad (2.14)$$

где $k_{d,n} = F_n^T K_d F_n$ — обобщенные динамические жесткости конечно-элементной модели пластины, вычисляемые при модулях $E_{d,n}$, соответствующих частотам $f_n = \omega_n/(2\pi)$. Собственные частоты ω_n и формы F_n определяются из решения задачи

$$(K_d - \omega^2 M) F = 0. \quad (2.15)$$

Матрица динамической жесткости K_d пластины при определении ω_n , F_n должна формироваться при каждом значении n в зависимости от получаемого на частоте f_n динамического модуля упругости $E_{d,n}$. Поскольку в момент формирования матрицы K_d частота f_n еще неизвестна, для решения системы (2.15) необходимо использовать итерацию. Учитывая, что частоты f_n при увеличении их номера n могут иметь большие значения, в качестве критерия окончания итерационной процедуры целесообразно использовать отношение частот на текущей и предыдущей итерациях:

$$|1 - f_n^{(i)} / f_n^{(i-1)}| \leq \varepsilon \quad (2.16)$$

(ε — заданная погрешность).

Частота f_n определяется следующим образом.

1. Задается начальная частота $f_n^{(i-1)}$ ($i = 1$).
2. Определяется динамический модуль упругости $E_{d,n}$ при частоте $f_n^{(i-1)}$.
3. Формируется матрица K_d при найденном модуле $E_{d,n}$.
4. Решается задача (2.15).
5. Из полученного спектра частот выбирается необходимая частота f_n , которая становится частотой $f_n^{(i)}$ на итерации i .
6. Проверяется условие (2.16). В случае если данное условие выполняется, в качестве искомой частоты f_n выбирается частота $f_n^{(i)}$, если не выполняется — частота $f_n^{(i-1)}$ заменяется на $f_n^{(i)}$ и все пункты повторяются начиная с п. 2.

Рассмотренный итерационный алгоритм должен применяться для определения каждой из всех необходимых частот f_n ($n = 1, 2, \dots, s$). Заметим, что при использовании для решения задачи (2.15) встроенных функций (решателей) процесс определения указанных частот является трудоемким, поскольку эти функции определяют все собственные формы и частоты. Для уменьшения трудоемкости реализации рассмотренного алгоритма задачу (2.15) следует решать с помощью методов, основанных на итерировании матриц [11, 15]. Наиболее целесообразно использовать метод итераций в подпространстве [11, 16], позволяющий итерировать одновременно несколько собственных форм и частот. В работе [17] предложены способы, увеличивающие устойчивость и скорость сходимости данного метода.

Для оценки достоверности рассматриваемой методики определения собственных частот f_n ($n = 1, 2, \dots, s$) при динамическом модуле упругости $E_d(f)$ и алгоритма ее реализации используем уравнение свободных колебаний удлиненной шарнирно опертой по торцам пластины

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_d(f)h^2}{12\rho(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.17)$$

с граничными условиями

$$x = 0, x = L: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.17) ищем в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^s a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}, \quad (2.19)$$

удовлетворяющем граничным условиям (2.18). Подставляя (2.19) в уравнение (2.17) и учитывая независимость коэффициентов a_n , а также условий $a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots, s$), получаем

$$-\rho\omega_n^2 + E_d(f_n)h^2 n^4 \pi^4 / [12(1-\nu^2)L^4] = 0.$$

Таблица 3

Значения собственных частот f_n и динамических модулей упругости E_d , вычисленных в результате решения задачи (2.15) и уравнения (2.20), а также число итераций m при различных значениях n

n	Задача (2.15)			Уравнение (2.20)		
	f_n , Гц	$E_d \cdot 10^{-4}$, МПа	m	f_n , Гц	$E_d \cdot 10^{-4}$, МПа	m
1	22,8053	5,5777	4	22,8053	5,5777	3
2	91,0379	5,5553	3	91,0379	5,5553	3
3	204,1541	5,5184	4	204,1537	5,5184	4
4	361,2660	5,4675	4	361,2635	5,4676	4
5	561,1684	5,4035	5	561,1593	5,4035	4

Отсюда с учетом соотношения $\omega_n = 2\pi f_n$ следует трансцендентное уравнение для определения частоты f_n :

$$f_n = \frac{n^2 \pi h}{L^2} \sqrt{\frac{E_d(f_n)}{48\rho(1-\nu^2)}}. \quad (2.20)$$

Решение уравнения (2.20) необходимо итерировать. В качестве начальной можно выбрать частоту $f_n^{(0)}$, полученную при использовании статического модуля упругости E .

Рассматривается шарнирно опертая прямоугольная пластина из дюралюминия марки Д16АТ, имеющая следующие размеры: $L = 300$ мм, $b = 20$ мм, $h = 0,95$ мм. Значения $E_d(f_n)$ в (2.20) определялись по зависимости (1.13). В табл. 3 приведены первые пять собственных частот f_n пластины и соответствующие им динамические модули упругости E_d , найденные в результате итерационного решения задачи (2.15) с использованием деления пластины на 40 элементов и уравнения (2.20), а также число итераций m до выполнения условия (2.16) при $\varepsilon = 10^{-6}$. Из табл. 3 следует, что результаты, полученные по двум различным расчетным моделям пластины, практически совпадают.

3. Численные эксперименты по определению динамической реакции удлиненной пластины при импульсном воздействии. Рассмотрим консольно закрепленную прямоугольную в плане пластину из дюралюминия марки Д16АТ с размерами $L = 340$ мм, $b = 50$ мм, $h = 0,95$ мм. Зависимость динамического модуля упругости E_d данного материала от частоты определяется выражением (1.13). Свободному концу пластины сообщается прямоугольный импульс $S = F\tau$, создаваемый силой $F = 1,54$ Н за время $\tau = 0,05T_1$, где $T_1 = 0,158$ с — период основного тона колебаний пластины. Значение T_1 определялось по частоте f_1 , найденной в результате итерации решения задачи (2.15) с учетом зависимости $E_d(f)$. Пластина моделируется в продольном направлении 40 конечными элементами одинаковой длины.

Общее решение уравнения с номером n группы независимых уравнений (2.14) при действии импульса $S = F\tau$ имеет вид

$$q_n(t) = P_n(1 - \cos \omega_n t) / (m_n \omega_n^2) \quad (t \leq \tau),$$

$$q_n(t) = q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) / \omega_n + \dot{q}_n(\tau) \cos \omega_n(t - \tau) \quad (t > \tau).$$

Обобщенная сила P_n задается выражением

$$P_n = F_n^T \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P} = \{0, 0, 0, \dots, F, 0\}$ — вектор внешних узловых сил конечно-элементной модели пластины при $t \leq \tau$.

Таблица 4

Значения частоты f_n , вычисленные с использованием динамического модуля упругости E_d , частоты $f_{n,0}$, вычисленные с использованием статического модуля упругости $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, относительной разности этих частот $\Delta = (f_n - f_{n,0})/f_{n,0}$ и динамического модуля упругости E_d при различных значениях n

n	f_n , Гц	$f_{n,0}$, Гц	Δ	$E_d \cdot 10^{-4}$, МПа
1	6,346	7,186	-0,117	5,615
2	39,619	45,036	-0,120	5,572
3	110,704	126,103	-0,122	5,549
4	216,262	247,112	-0,125	5,518
5	356,029	408,497	-0,125	5,518

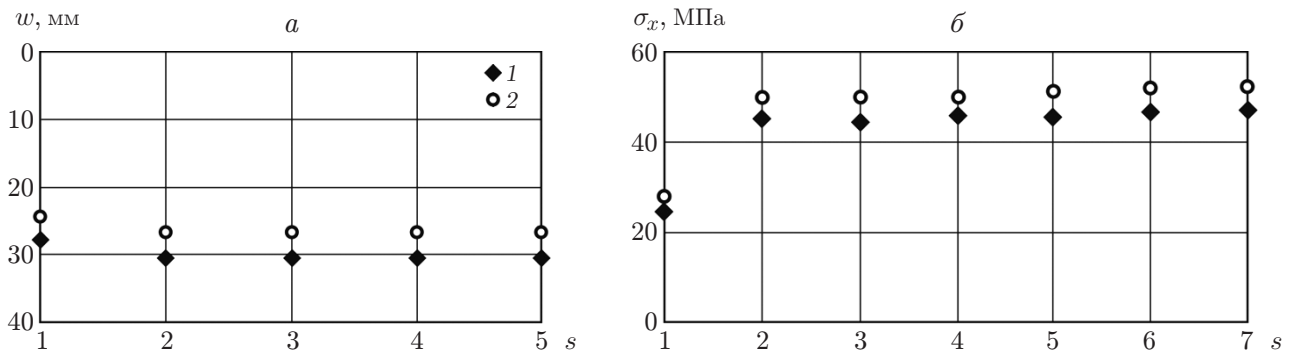


Рис. 4. Зависимости максимальных по времени динамических прогибов w (а) и напряжений σ_x (б) пластины от числа s учитываемых собственных форм, полученные с использованием динамического E_d (1) и статического E (2) модулей

В табл. 4 приведены первые пять частот f_n свободных колебаний пластины, вычисленные с использованием динамического модуля упругости E_d , определяемого зависимостью (1.13) при $f_n \leq 205,3$ Гц (максимальная экспериментальная частота). При значениях $f_n > 205,3$ Гц динамический модуль E_d считался постоянным и равным его значению, вычисленному по зависимости (1.13) при частоте $f = 205,3$ Гц. Для сравнения приведены значения соответствующих частот $f_{n,0}$, найденные при $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа. Значения частот f_n , определенные с использованием динамического модуля упругости E_d , в среднем на 12,2 % меньше соответствующих частот $f_{n,0}$, вычисленных с использованием статического модуля E . В последней графе табл. 4 приведены значения динамического модуля упругости E_d при различных частотах f_n .

На рис. 4,а приведены зависимости максимальных по времени динамических прогибов w свободного конца пластины от числа s учитываемых собственных форм F_n . При расчете с использованием динамического модуля упругости E_d прогибы w при всех s значительно больше соответствующих прогибов, полученных с использованием статического модуля E . Этот результат соответствует тому, что при всех собственных частотах f_n $E_d \ll E$. Для достижения практически постоянных (не зависящих от s) максимальных прогибов w в представлении (2.11) достаточно учитывать только три собственные формы.

На рис. 4,б приведены зависимости максимальных по времени динамических напряжений σ_x в заделке на нижней поверхности пластины от числа s учитываемых собственных форм F_n . При расчете с использованием модуля E_d напряжения σ_x значительно меньше, чем при расчете с использованием модуля E . Это можно объяснить тем, что сила инерции

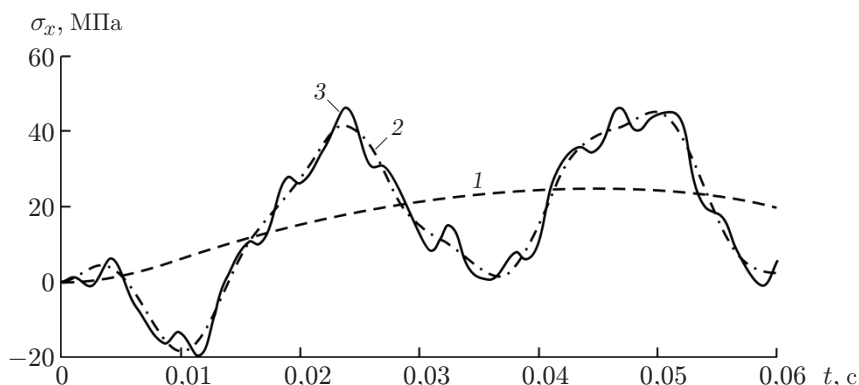


Рис. 5. Зависимости динамического напряжения σ_x от времени, полученные с учетом одной (1), трех (2) и пяти (3) собственных форм колебаний пластины

в каждой точке пластины при колебаниях ее по некоторой форме F_n пропорциональна амплитуде данной формы и квадрату соответствующей частоты f_n . При расчете колебаний пластины с использованием динамического модуля упругости E_d прогибы при всех значениях s больше, чем при использовании статического модуля E , а частоты f_n примерно во столько же раз меньше. Это должно приводить к уменьшению напряжений σ_x в случае расчета колебаний пластины с использованием модуля E_d .

На рис. 5 приведены зависимости $\sigma_x(t)$, полученные с учетом в представлении (2.11) одной, трех и пяти собственных форм колебаний пластины при расчете с использованием динамического модуля упругости E_d . Максимальное напряжение σ_x основного тона колебаний пластины достигается в момент времени $t = 0,0433$ с, что при $\tau = 0,05T_1$ незначительно превышает $1/4$ периода T_1 (при мгновенном импульсе $t_1 = T_1/4$). При увеличении числа учитываемых собственных форм наблюдается увеличение осцилляций зависимости $\sigma_x(t)$, обусловленное уменьшением периода колебаний каждой формы по мере возрастания ее номера n .

Заключение. Определены значения динамического модуля упругости дюралюминия марки Д16АТ на основе исследования изгибных затухающих и резонансных колебаний образцов. Построена зависимость динамического модуля упругости дюралюминия указанной марки от частоты, свидетельствующая о значительном уменьшении данного модуля в диапазоне частот $f = 0 \div 20$ Гц относительно его статического модуля упругости E и дальнейшей стабилизации при $f = 20 \div 210$ Гц. Показана возможность учета полученной частотной зависимости динамического модуля упругости дюралюминия при определении собственных форм и частот колебаний конструкций. На примере расчета удлиненной пластины при импульсном воздействии показано существенное отличие значений частот, прогибов и напряжений, полученных с использованием динамического модуля упругости, от соответствующих значений, полученных с использованием его статического значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **ASTM E-756.** Standard test method for measuring vibration damping properties of materials. S. 1.: ASTM Intern., 2004.
2. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50, № 2. С. 185–198.

3. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И. и др.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50, № 5. С. 750–770.
4. **ГОСТ 23499-2009.** Материалы и изделия звукоизоляционные и звукопоглощающие строительные. М.: Стандартинформ, 2011.
5. **Постников В. С.** Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1969.
6. **Демидов С. П.** Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979.
7. **Криштал М. А.** Внутреннее трение в металлах и сплавах / М. А. Криштал, Ю. В. Пигузов, С. А. Головин. М.: Металлургия, 1964.
8. **Хильчевский В. В.** Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций / В. В. Хильчевский, В. Г. Дубенец. Киев: Вища шк., 1977.
9. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Шишкин В. М.** Построение уточненной методики идентификации демпфирующих свойств ортогонально армированных композитных материалов при сдвиге // *Механика композит. материалов*. 2016. Т. 52, № 2. С. 193–208.
10. **Шуп Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.
11. **Клаф Р.** Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. М.: Стройиздат, 1979.
12. **Норри Д.** Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. М.: Мир, 1981.
13. **Тимошенко С. П.** Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
14. **Мэтьюз Д. Г.** Численные методы. Использование MATLAB / Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. М.: Издат. дом “Вильямс”, 2001.
15. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
16. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. М.: Стройиздат, 1982.
17. **Паймушин В. Н., Шишкин В. М.** Моделирование упругих и демпфирующих свойств многослойной конструкции торсион-лопасть несущих винтов легких вертолетов нового поколения. 1. Конечно-элементная аппроксимация торсиона // *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51, № 5. С. 861–888.

Поступила в редакцию 7/VI 2016 г.
