

Ограничиваясь главными членами разложения в (2.5), (5.5), имеем

$$(5.9) \xi \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \lambda^{1/2} i t} \left(\gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{-1/2}(b\omega^{1/2}) \omega^{1/4} + \gamma_1 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{1/2}(b\omega^{1/2}) \omega^{-1/4} \right).$$

Коэффициенты $\gamma_0(-1/2)$, $\gamma_1(-1/2)$ вычислим по формуле (5.6):

$$(5.10) \quad \gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{-b}{2q'(1)} \right)^{1/2},$$

$$\gamma_1 \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{h} \left(\left(\frac{-b}{2q'(1)} \right)^{1/2} - \frac{i}{z_1^{1/2} (z_1^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{-b}{q'(z_1)} \right)^{1/2} \right).$$

Формула (5.9) определяет главный член равномерного разложения ξ на промежутке $\lambda \in [1 - \omega^{-\mu}, 1 + \lambda_0]$, $\mu > 0$. Из нее можно вывести формулу (3.4), но не формулы п. 4, поскольку в последних $\lambda < 1$ фиксировано.

Отметим, что на самом фронте наблюдается рост решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, раскрывая неопределенность в (5.10) и используя формулу (19.3.5) из [4, с. 496], получим

$$\xi \sim \frac{\omega^{1/4}}{(2\pi)^{3/2} i t} \gamma_0 \left(-\frac{1}{2} \right) U_{-1/2}(0) = \frac{\omega^{1/4}}{2^{9/4} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) t}, \quad \lambda = 1, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.
7. Bleistein N. Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity // *Comm. Pure and Appl. Math.* — 1966. — V. 19, N 4.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 3/III 1994 г.

УДК 539.3 + 622.83

Л.А. Назаров, Е.Н. Шер

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ НАРУШЕНИЙ СПЛОШНОСТИ

Общепризнанным является факт, что массив горных пород имеет блочное строение [1], причем межблочные контакты во многом определяют поведение массива в целом. Как показано в [1], динамические явления не могут быть связаны только с разрушением материала блоков, а в основном происходит переупаковка системы блоков без их разрушения. Поэтому для адекватного описания деформационных процессов, происходящих как в горном массиве, так и в земной коре в целом, чрезвычайно важно определить характеристики межблочных контактов.

© Л.А. Назаров, Е.Н. Шер, 1995

Модель межблочного контакта — элемента нулевой толщины, силовые (касательное τ и нормальное σ напряжения) и деформационные (проскальзывание R и сближение P берегов) характеристики которого связаны определенными зависимостями (уравнения состояния)

$$\tau = T(R, \sigma, P, \dots), \quad \sigma = S(P, \tau, R, \dots),$$

предложена в [2]. Конкретизация вида функций T и S осуществляется на основе лабораторных экспериментов с образцами, извлеченными из массива, результаты которых в последующем используются для описания реальных нарушений. Достаточно подробная библиография по этому вопросу приведена в [3].

Одними из основных характеристик межблочного контакта, используемых при математическом моделировании процесса деформирования массива, являются касательная K_t и нормальная K_n жесткости — коэффициенты пропорциональности между приращениями силовых и деформационных характеристик нарушения.

В случае невозможности нахождения K_t, K_n с помощью прямых экспериментов используются различные косвенные методы оценки (например, [4, 5]), основанные на геометрии нарушения и свойствах слагающих его пород.

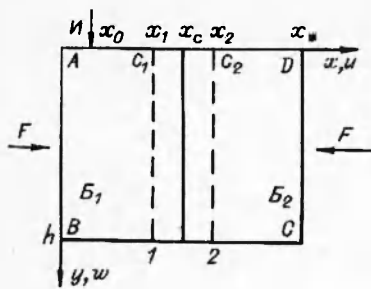
Развитая система выработок в шахтном поле позволяет в принципе получить доступ к некоторым участкам нарушения, а достаточно хорошо разработанная методика натурных измерений — точечные значения компонент тензора напряжений в их окрестности. Последние на основе [6] могут быть интерполированы на само нарушение. Выглядит перспективным организовать стационарный пункт акустических измерений, позволяющий определять не только мгновенные значения деформационных характеристик нарушения, но и тенденцию изменения напряжений в его окрестности.

В настоящей работе предложена методика определения жесткостей нарушения в реальных условиях, базирующаяся на сочетании экспериментальных данных и теоретических исследований.

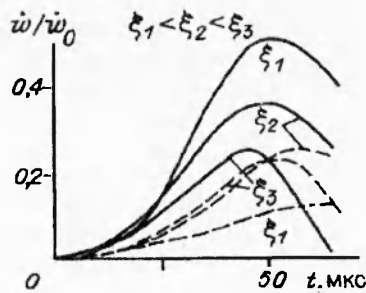
1. Определение касательной жесткости участка контакта при доступности его концов. На созданном стенде для комплексного исследования свойств межблочных контактов [7] был проведен эксперимент, схема которого показана на рис. 1. Между двумя блоками из оргстекла (B_1, B_2) помещались тонкие слои из различных материалов, и вся система подвергалась горизонтальному нагружению F . Одновременно на каждом шаге нагружения проводилось прозвучивание контакта с помощью импульсного источника H , сигналы фиксировались датчиками 1, 2 (акселерометрами). Длительность зондирующего сигнала t_0 подбиралась так, чтобы волны, отраженные от границ AB и CD , не исказили сигнал на датчиках в течение времени t_0 .

На рис. 2 показаны результаты экспериментов (велосигramмы w , отнесенные к максимальному значению w в точке приложения нагрузки, сплошные линии — датчик 1, штриховые — датчик 2) для различных шагов нагружения $\xi = F/F_0$ (F_0 — начальное значение). Их анализ показал, что с повышением нормальной нагрузки уменьшается амплитуда первого вступления A_1 на «ближнем» к источнику датчике 1, увеличиваются амплитуда A_2 и как следствие отношение $\psi = A_2/A_1$, уменьшается величина $\varphi = (t_2 - t_1)/t_0$ (t_i — время максимума первого вступления на велосигramме i -го датчика, $i = 1, 2$).

На каждом шаге нагружения в направлении x проводилось определение касательной жесткости контакта путем жесткого сдвига блоков с замером проскальзывания и касательного напряжения, по которым вычислялось значение K_t . На рис. 3 штриховыми линиями показаны функции ψ и φ в зависимости от безразмерной жесткости $\bar{K}_t = K_t h / (\rho V_p^2)$ (ρ, V_p — плотность и скорость продольных волн в оргстекле, h — длина контакта, рис. 1), построенные по экспериментальным данным.



Р и с. 1



Р и с. 2

Схема эксперимента была исследована теоретически на плоской модели в декартовой системе координат (x, y) . Расчетная область состоит из двух упругих подобластей с общей границей (см. рис. 1). На горизонтальных границах заданы следующие условия:

$$(1.1) \quad \sigma_y = \delta(x - x_0)f(t)H(t_0 - t), \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$(1.2) \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = h.$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений; δ — дельта-функция Дирака; H — функция Хевисайда; на вертикальных границах $x = 0, x = x_*$ формулируются произвольные однородные условия; на линии контакта $x = x_c$ напряжения непрерывны, а смещения разрывны:

$$(1.3) \quad \sigma_x = \bar{\sigma}_x = K_n P, P = u - \bar{u}, \tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} = K_t R, R = w - \bar{w}$$

(величины с чертой относятся к правой подобласти). Граничные условия (1.3) моделируют контактное взаимодействие в случае линейной зависимости напряжений от относительных смещений либо мгновенную ситуацию в случае нелинейных функций T и S .

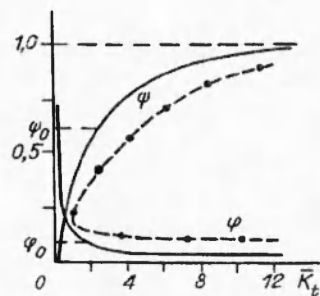
В каждой из подобластей справедливы уравнения динамической теории упругости:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Здесь u, w — смещения по x, y ; λ, μ — параметры Ляме; ρ — плотность; t — время.

Система (1.1)–(1.4) решалась численно с использованием стандартных аппроксимаций, обеспечивающих второй порядок точности. Единственной особенностью является «склеивка» решений на границе $x = x_c$. Из-за отсутствия напряжений на горизонтальных границах в окрестности нарушения оказалось возможным получение несвязанных систем линейных уравнений для P и R , решаемых трехточечной прогонкой. В качестве размерных параметров выбраны $\lambda + 2\mu, \rho, h$, свойства материала подобластей одинаковы. Значения x_0, x_c подбирались так, чтобы волны, отраженные от боковых границ, не влияли на сигнал в точках (x_c, h) , соответствующих положению датчиков в эксперименте.

Расчеты, проведенные при значениях параметров, отвечающих условиям эксперимента ($x_0 = x_1 = 0,9, x_2 = 1,1, x_c = t_0 = 1$), подтвердили его выводы, а также показали, что изменение



Р и с. 3

K_t практически не влияет на поведение \dot{u} , а K_n — на \dot{w} , что дает принципиальную возможность соответствующим образом ориентированными датчиками отслеживать поведение нарушения в различных направлениях.

На рис. 3 сплошными линиями показаны теоретически рассчитанные функции $\psi(K_t)$ и $\varphi(K_t)$, которые достаточно хорошо отвечают экспериментальным. Здесь нужно отметить характерную особенность: если точки приема сигналов расположены непосредственно на берегах контакта ($x_1 = x_2 = x$), то при $K_t \rightarrow \infty$ значение $\psi \rightarrow 1$, а $\varphi \rightarrow 0$, т.е. контакт стремится вести себя, как сплошная среда в одном из направлений при увеличении соответствующей жесткости.

Итак, в натуральных условиях касательную жесткость можно определить следующим образом. Теоретически рассчитываются функции $\psi(K_t)$, $\varphi(K_t)$, $K_t = K_t/p$, $p = (\lambda + 2\mu)/m$, m — расстояние между источником и приемником (длина участка нарушения). Организуется пункт измерений по предложенной схеме (см. рис. 1) и получают акустические данные (ψ_0 , φ_0 , см. рис. 3). Тогда касательную жесткость исследуемого участка можно найти из соотношений $K_t = p\psi^{-1}(\psi_0)$ или $K_t = p\varphi^{-1}(\varphi_0)$. Первое из них предпочтительнее из-за лучшей разрешимости.

Из анализа результатов экспериментов и расчетов можно предложить соотношение

$$(1.5) \quad K_t = K_t^* \frac{\sigma}{\sigma + \alpha},$$

связывающее касательную жесткость нарушения и нормальное напряжение на контакте. Два неизвестных параметра K_t^* и α определяются по двум (разнесенным во времени) измерениям статических напряжений $\sigma = \sigma_i$ и акустических величин $\psi = \psi_i$ (по последним находят K_t^*) с последующим решением системы уравнений

$$K_t^i = K_t^* \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \alpha}, \quad i = 1, 2.$$

Второй эксперимент можно заменить гипотезой (которая в принципе качественно подтверждена проведенными исследованиями): при нормальных напряжениях, близких к пределу прочности на сжатие $\sigma = \sigma_c$, нарушение ведет себя, как сплошная среда $K_t = \mu/\epsilon$ (ϵ — видимая толщина контакта).

Разрешив (1.5) относительно σ $\left(\sigma = \alpha \frac{K_t}{K_t - K_t^*} \right)$, получим соотношение,

позволяющее вести долговременные наблюдения за изменением σ акустическим методом.

Формула (1.5) достаточно хорошо качественно описывает результаты экспериментов [8]. В [9] для касательной жесткости предложено соотношение

$$(1.6) \quad K_t = A\sigma,$$

в котором значение A определяется прямым экспериментом на сдвиг. Вместо него можно найти $A = K_t^0/\sigma_0$ по описанной методике: на основе акустических измерений находим $K_t = K_t^0$, а в результате натуральных измерений напряжения получаем $\sigma = \sigma_0$. Формула (1.6) следует из (1.5) при невысоких напряжениях ($\alpha \gg \sigma$).

2. Исследование жесткостных свойств нарушений при одностороннем доступе. Доступ к обоим концам нарушения не всегда возможен (например, при выходе глобальных тектонических разломов на поверхность Земли), поэтому рассмотрим схему прозвучивания контакта при одностороннем доступе. На поверхности упругой области, содержащей линию разрыва смещений, задано вертикальное воздействие (см. рис. 1). В точках поверх-

ности по обеим сторонам контакта $C(x,0)$ ($i = 1,2$) фиксируются вертикальные \ddot{w} и горизонтальные \ddot{u} ускорения. Необходимо найти параметры сигнала, отвечающие за изменение жесткостных свойств контакта. Задача решалась по аналогичной п. 1 разностной схеме с той лишь разницей, что $x_0 = 0$ и нижняя граница удалена. Расчеты показали, что даже на сравнительно небольшом расстоянии от нарушения (в сторону источника) деформационные параметры последнего не влияют на показания датчика, и его можно взять за базовый (т.е. по показаниям нормировать остальные данные).

На рис. 4 представлены функции

$$U(\bar{K}_i, \bar{K}_n) = \max |\ddot{u}(x_2, 0, t)| / \ddot{w}_0, t_2 < t < t_0 + t_2,$$

$$W(\bar{K}_i, \bar{K}_n) = \max |\ddot{w}(x_2, 0, t)| / \ddot{w}_0, t_2 < t < t_0 + t_2,$$

где t_2 — время прихода возмущения в точку C_2 , \ddot{w}_0 — максимальное значение вертикального ускорения в точке $x_1 = 0,7x_c$; $x_2 = 1,3x_c$; $\bar{K}_i = K_i/q$; $\bar{K}_n = K_n/q$; $q = (\lambda + 2\mu)/x_c$.

Анализ показывает, что для любой пары значений $U = U_0$ и $W = W_0$ можно достаточно точно восстановить соответствующие им значения \bar{K}_i^0 и \bar{K}_n^0 , что дает принципиальную возможность оценки K_i и K_n в натуральных условиях. Для этого необходимо провести прозвучивание по предложенной схеме (см. рис. 1), отнормировать данные датчиков в точке C_2 по показаниям вертикального датчика в точке C_1 , получив значения U_0 и W_0 . Затем провести теоретический расчет функций $U(\bar{K}_i, \bar{K}_n)$, $W(\bar{K}_i, \bar{K}_n)$, по ним и по U_0, W_0 найти безразмерные значения жесткостей \bar{K}_i^0, \bar{K}_n^0 . Размерные величины определяются после нахождения физических свойств среды $K_i^0 = q\bar{K}_i^0$, $K_n^0 = q\bar{K}_n^0$.

Предложенный подход был использован для обработки результатов модельного эксперимента по определению свойств нарушенного слоя при одностороннем доступе.

Эксперименты проводились на прямоугольной пластине из оргстекла размерами $1 \times 1,5 \times 0,02$ м. Вдоль срединной линии большего размера пластина имела ослабленный слой, образованный пятью рядами отверстий диаметром 10 мм с расстоянием между центрами 12 мм, который моделировал межблочный контакт. Прозвучивание слоя проводилось волнами, возбужденными в пластине ударом по ее грани в точке x_0 (см. рис. 1). В точках C_1 и C_2 располагались приемники сигналов — акселерометры, в экспериментах $p = x_c - x_0 = 0,33$ м, $x_c - x_1 = x_2 - x_c = 0,1$ м. Акселерометры регистрировали как вертикальные, так и горизонтальные ускорения свободной поверхности. Наибольшие амплитуды ускорения возникают при проходе волны Рэлея. Именно они фиксировались при обработке экспериментов. Геометрия пластины позволяла провести нужные записи до прихода отраженных сигналов от других ее граней.

Средние значения относительных максимальных амплитуд ускорения, найденные в результате обработки записей серии ударов, приведены в таблице. По полученным относительным значениям ускорений в точке C_2 $U_0 = 0,13$, $W_0 = 0,09$ и графикам рис. 4 были определены безразмерные жесткости $\bar{K}_i^0 = 0,6$, $\bar{K}_n^0 = 1$ ослабленного слоя, при этом размерные значения следующие:

$$K_i^0 = 0,6(\lambda + 2\mu)/p, K_n^0 = (\lambda + 2\mu)/p.$$

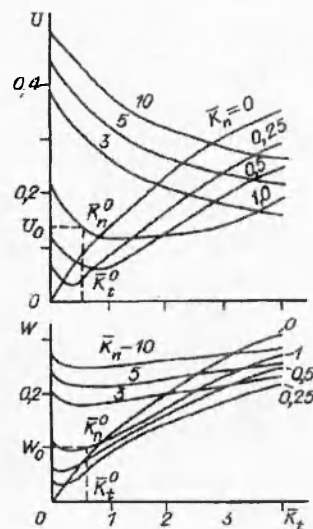


Рис. 4

Точки рис. 1	\ddot{u}	\ddot{w}
C_1	0,363	0,25
C_2	0,0225	0,033

Для оргстекла динамические измерения дают $E = 5,4 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,32$ (модуль Юнга и коэффициент Пуассона), откуда $\lambda = 3,64 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 2,05 \times 10^9$ Па. С учетом этих данных и $p =$

$= 0,33$ м имеем

$$K_i^0 = 14,1 \cdot 10^9 \text{ Па/м}, K_n^0 = 23,4 \cdot 10^9 \text{ Па/м}.$$

Можно провести оценку деформационных свойств ослабленного слоя, если усреднить упругие модули по среде с отверстиями. Для использованного в эксперименте слоя отношение площади, приходящееся на твердую среду, к общей площади твердой среды и отверстий составило $s = 0,45$. При толщине слоя $b = 0,06$ м

$$K_i = s\mu/b = 15,5 \cdot 10^9 \text{ Па/м}, K_n = sE/b = 41 \cdot 10^9 \text{ Па/м}.$$

Оценочные расчетные данные жесткостей ослабленного слоя достаточно близки к экспериментальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. — М.: Наука, 1987.
2. Goodman R.E., Taylor R.L., Brekke T.L. A model for the mechanics of jointed rock // Proc. ASCE. J. Soil Mech. and Found. Div. — 1968. — V. 94, N SM3. — P. 637—659.
3. Wittke W. Rock Mechanics. — Berlin: Springer-Verlag, 1990.
4. Barton N.R., Choubey V. The shear strength of rock joints in theory and practice // Rock Mech. — 1977. — V. 10, N 1—2. — P. 1—54.
5. Ke-Hsu-Sun. Non-linear analysis of a joint element and its application in rock engineering // Int. J. Numer. and Analyt. Meth. Geomech. — 1981. — V. 5. — P. 229—245.
6. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Некоторые постановки краевых задач L -пластичности // ПМТФ. — 1974. — № 2. — С. 128—137.
7. Леонтьев А.В., Назаров Л.А. Об определении жесткости контакта между блоками пород // ФТПРПИ. — 1994. — № 2. — С. 46—52.
8. Barton N.R. Deformation phenomena in jointed rock // Geotechnique. — 1986. — V. 36, N 2. — P. 147—167.
9. M. Oda, Yamabe T., Ishizuka Y. et al. Elastic stress and strain in jointed rock masses by means of crack tensor analysis // Rock Mechanics and Rock Engineering. — 1993. — V. 26, N 2. — P. 89—112.

г. Новосибирск

Поступила 25/II 1994 г.

УДК 539.3/4:620.17

Е.Ю. Еремина, С.Н. Пещеренко

РАСЧЕТ УСЛОВНОГО ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Разнообразие [1, 2] существующих в настоящее время методов расчета эффективного условного предела текучести $\sigma_{0,2}^*$ структурно-неоднородных материалов, в частности порошковых, объясняется иерархическим их строением, обуславливающим диссипацию энергии внешнего воздействия различными компонентами структуры, в зависимости от особенностей строения конкретных образцов и условий испытаний. Среди всех компонент структуры порошковых материалов важнейшее значение в формировании механических свойств при квазистационарном нагружении имеют компоненты

© Е.Ю. Еремина, С.Н. Пещеренко, 1995