

ДВУМЕРНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ КОНТАКТ.
 КОНТАКТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ С УЧЕТОМ ВТОРИЧНЫХ
 ПОТОКОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

А. Л. Стасенко

(Москва)

При рассмотрении ряда задач теплопередачи, диффузии, прохождения электрического тока через поверхность соприкосновения двух проводников вводится понятие контактного сопротивления потоку соответствующей физической величины (тепла, массы, заряда). Суть этого понятия, независимо от физической природы потока, состоит в следующем.

Рассмотрим потенциальный соленоидальный поток некоторой физической величины, текущий в направлении X через проводник с проводимостью λ (коэффициент диффузии, тепло- или электропроводности), ограниченный двумя параллельными плоскостями $X = -l_-$, $X = l_+$. Пусть значения потенциала U ($\mathbf{q} = -\lambda \nabla U$) на этих плоскостях постоянны и равны соответственно U_-° и U_+° .

Сопротивление такого проводника потоку, как известно, определяется только его проводимостью и толщиной

$$R^\circ = \frac{U_-^\circ - U_+^\circ}{q} = \frac{l_- + l_+}{\lambda} \quad (0.1)$$

Пусть теперь этот проводник разделен плоскостью $X = 0$ на две части, соприкасающиеся в ряде участков, суммарная площадь которых составляет долю $\eta < 1$ от видимой площади соприкосновения. Тогда вследствие поджатия линий тока к этим участкам (контактным пятнам) возникает добавочное, по сравнению со случаем идеального контакта $\eta = 1$, сопротивление. Это сопротивление различной физической природы (электрическое, тепловое) исследовалось теоретически и экспериментально в ряде работ [1-3], в которых использовалась модель периодического соприкосновения полубесконечных проводников в пятнах круглой или эллиптической формы (трехмерный контакт). В частности, в работах по термическому сопротивлению [2,3] учитывалась теплопроводность через газообразную или жидкую среду, заключенную в полостях между соприкасающимися проводниками тепла. Контактное сопротивление определялось отношением

$$R = q^{-1} \Delta U_\infty \quad (0.2)$$

где ΔU_∞ — разность между точками пересечения асимптоты $U(X)$ с плоскостью $X = 0$. Такое определение правомерно при $l_-, l_+ \rightarrow \infty$, когда значения U вдоль линий тока действительно стремятся к асимптоте; в случае же тонкого проводника (в смысле, указанном ниже) оно нуждается в некотором изменении.

В настоящей работе рассматривается периодический контакт (в том числе тонких проводников) вдоль параллельных полос (двумерный контакт), и определяется его сопротивление потоку любой физической вели-

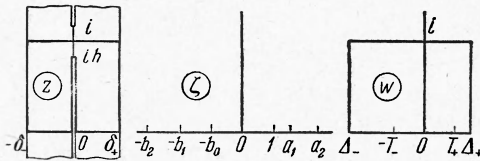
чины. Результаты распространяются на случай n толстых проводников. В общем случае (как двумерного, так и трехмерного контактов) учитывается влияние конечного числа вторичных потоков $q_2 = q_2^{(1)} + \dots + q_2^{(N)}$, порожденных разностью значений $U(\pm 0, P)$ на противоположных сторонах полости $X = 0$ (например, потоков излучения или проводимости через среду), и в качестве примера рассматривается частный случай зависимости функционала $q_2[U(-0, P), U(+0, P)]$ от разности целых степеней $U(\pm 0, P)$.

1. Будем считать, что параметры контакта (ширина полос $2c$ и расстояние между ними $2a$) известны, а все величины обезразмерены следующим образом:

$$\eta = \frac{c}{a}, \quad h = 1 - \eta, \quad x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad \delta = \frac{l}{a}, \quad u = \frac{U - U_*}{qa/\lambda}, \quad r = \frac{R}{a/\lambda} \quad (1.1)$$

Здесь U_* — значение U на контактных пятнах.

Периодичность контакта позволяет выделить в плоскости $z = x + iy$ прямоугольник D_z единичной ширины с длиной $\delta_- + \delta_+$ и с вырезом $x = 0, 0 \leq y < h$, причем на горизонтальных границах D_z выполняется условие $\partial u / \partial y = 0$ при $y = 0$ и $y = 1$.



Фиг. 1

Всюду внутри D_z имеем $\nabla^2 u = 0$. Будем считать сначала, что поток через вырез равен нулю. Тогда на границах выреза также выполняется

условие непротекания $\partial u / \partial x = 0$ при $x = \pm 0, 0 \leq y < h$. В поставленной задаче величина u (потенциал течения) может рассматриваться как действительная часть конформного отображения $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ фигуры D_z на прямоугольник D_w единичной ширины и некоторой длины $\Delta_- + \Delta_+$. В качестве промежуточного шага найдем отображение верхней полуплоскости $\zeta = t + is$ на семиугольник D_z и на прямоугольник D_w со следующим соответствием точек (фиг. 1)

$$\begin{array}{cccccccc} z & ih & +0 & \delta_+ & i + \delta_+ & i - \delta_- & -\delta_- & -0 & i \\ t & 0 & 1 & a_1 & a_2 & -b_2 & -b_1 & -b_0 & \infty \\ w & 0 & T_+ & \Delta_+ & i + \Delta_+ & i - \Delta_- & -\Delta_- & -T_- & i \end{array} \quad (1.2)$$

Эта задача решается следующими двумя интегралами Кристоффеля — Шварца:

$$z(\zeta) - ih = A \int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{V(\zeta - 1)(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta + b_2)(\zeta + b_1)(\zeta + b_0)} \quad (1.3)$$

$$w(\zeta) = B \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta + b_2)(\zeta + b_1)} \quad (1.4)$$

Здесь уже учтено первое из условий (1.2). Все параметры функций (1.3) и (1.4), так же как длина $\Delta_- + \Delta_+$ прямоугольника D_w , будут зависеть от δ_-, δ_+ и η в силу остальных условий (1.2).

Выписанные интегралы упрощаются, если фигура D_z симметрична относительно $x = 0$, т. е. $\delta_- = \delta_+ = \delta$; тогда, согласно принципу симметрии Шварца, $b_0 = 1, b_1 = a_1, b_2 = a_2, T_- = T_+ = T$, и функции (1.3) и (1.4) можно выразить через эллиптический интеграл I рода $F(\varphi, k)$.

Действительно, в этом случае (1.3) принимает вид

$$z(\zeta) - ih = \frac{A}{\sqrt{a_2^2 - 1}} \left[F \left(\arcsin \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{a_1^2 - 1}}, k \right) - F \left(\arcsin \frac{i}{\sqrt{a_1^2 - 1}}, k \right) \right] \quad (1.5)$$

$$\left(k^2 = \frac{a_1^2 - 1}{a_2^2 - 1} \right)$$

Для определения постоянных a_1, a_2, A через параметры семиугольника D_z имеем следующую систему трех уравнений (полученную из второго, третьего и четвертого условий (1.2)):

$$\frac{K(k)}{K(k')} = \delta, \quad F(\arcsin a_1^{-1}, k') = hK(k'), \quad A = \frac{\delta \sqrt{a_2^2 - 1}}{K(k)} \quad (1.6)$$

$$(k' = \sqrt{1 - k^2})$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода. Обращая интеграл (1.6), имеем

$$a_1 = \operatorname{sn}^{-1} [hK(k')], \quad a_2 = \frac{\operatorname{dn} [hK(k')]}{k \operatorname{sn} [hK(k')]} \quad (1.7)$$

где sn и dn — эллиптические функции Якоби.

Аналогично преобразуя (1.4), получим известное [4] отображение полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ на прямоугольник D_w

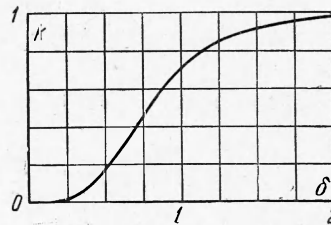
$$w(\zeta) = \frac{B}{a_2} F \left(\arcsin \frac{\zeta}{a_1}, k_1 \right) \quad \left(k_1 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{\operatorname{dn} [hK(k')]} \right) \quad (1.8)$$

Параметры отображения B и $\Delta = \Delta_- = \Delta_+$ найдутся из третьего и четвертого условий (1.2):

$$B = \frac{a_2}{K(k_1)}, \quad \Delta = \frac{K(k_1)}{K(k_1')} \quad (k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}) \quad (1.9)$$

На фиг. 2—4 приведены зависимости $k(\delta)$, $a_1(\eta, \delta)$ и $k_1(\eta, \delta)$. Можно показать, что вблизи $k_1 = 1$ ($\eta = 0$, см. фиг. 4) и при малых δ имеем $k_1 \approx 1 - \frac{1}{2}(\pi\eta / 2\delta)^2$. Тогда

$$\Delta \approx \frac{2}{\pi} \ln 4 / \left(\frac{\pi\eta}{2\delta} \right) \quad (1.10)$$



Фиг. 2

Исключая ζ из функций (1.5), (1.8), получим искомое отображение

$$w(z) = \frac{F(\arcsin a_1^{-1} \zeta(z), k_1)}{K(k_1')}$$

$$\zeta(z) = \sqrt{1 + (a_1^2 - 1) \operatorname{sn}^2 [(z - ih) K(k') + \beta]} \quad (1.11)$$

$$\beta = F \left(\arcsin \frac{i}{\sqrt{a_1^2 - 1}}, k \right) = iF \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 1}}, k' \right)$$

Учитывая второе из условий (1.2), имеем

$$T = \frac{F(\arcsin a_1^{-1}, k_1)}{K(k_1')}$$

Так как $u(\pm\delta, y) = \pm\Delta$, то $\partial u / \partial y = 0$ при $x = \pm\delta$, и, в силу аналитичности $w(z)$, имеем $\partial v / \partial x = 0$ при $x = \pm\delta$, т. е. линии тока на вертикальных границах имеют касательные, параллельные оси x . Сопротивление контакта r определим следующим образом. Пусть в случае идеального и неидеального контактов поток через систему двух проводников

одинаков. Составим разности $u_- - u_+ = 2\Delta$ и $u_-^\circ - u_+^\circ = 2\delta$ (нуль вверху относится к идеальному контакту; в этом случае отображение (1.11) принимает вид $w(z) = z$ и $\Delta = \delta$). Под r будем понимать разность

$$r = (u_- - u_+) - (u_-^\circ - u_+^\circ) = 2(\Delta - \delta) \quad (1.12)$$

которая является функцией δ и η , т. е. зависит и от толщины проводника, в отличие от определения (0.2). Учитывая (1.6) и (1.9), имеем

$$\frac{1}{2} r(\eta, \delta) = \frac{K(k_1)}{K(k_1')} - \frac{K(k)}{K(k')} \quad (1.13)$$



Фиг. 3

Эта функция приведена на фиг. 5, из которой видно, что с возрастанием δ сопротивление перестает зависеть от δ . Это значит, что мы переходим в область толстого проводника.

2. Пусть $\delta \rightarrow \infty$. Тогда функция (1.11) переходит в известное [5] отображение бесконечной полосы единичной ширины с вырезом на полюсу (для упрощения записи все величины, имеющие множитель $\pi/2$, обозначены индексом 1)

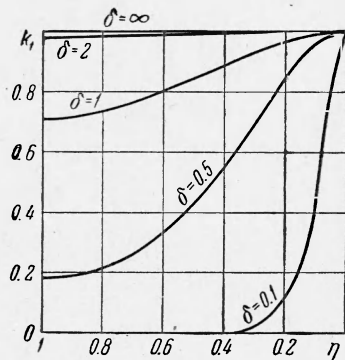
$$w_1 = \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{\operatorname{ch} z_1}{\sin \eta_1}, \quad T_1 = \operatorname{ar} \operatorname{sh} \operatorname{ctg} \eta_1 \quad (2.4)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получаем

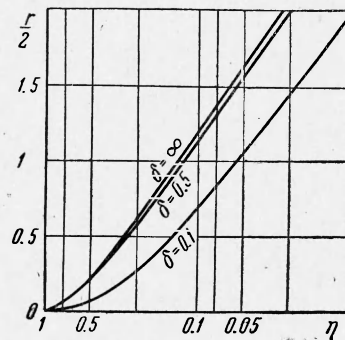
$$\begin{aligned} u_1(\pm x, y) &= \pm \operatorname{ar} \operatorname{sh} \sqrt{\sqrt{M^2 + N^2} + M} \\ v_1(x, y) &= \operatorname{arc} \sin \sqrt{\sqrt{M^2 + N^2} - M} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$M = \frac{\operatorname{sh}^2 x_1 + \operatorname{cos}^2 y_1 - \sin^2 \eta_1}{2 \sin^2 \eta_1}, \quad N = \frac{\operatorname{sh} x_1 \sin y_1}{\sin \eta_1}$$

Рассмотрим поведение функции $u(x, y)$ на прямых $y = \operatorname{const}$. Вдоль



Фиг. 4



Фиг. 5

нижней границы ($y = 0$) бесконечной полосы функция $u(x, 0)$ претерпевает разрыв в точке $x = 0$ (фиг. 6)

$$u(\pm x, 0) = \pm \frac{2}{\pi} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \left[\left(\frac{\operatorname{ch} x_1}{\sin \eta_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

вдоль верхней границы $u(x, 1)$ непрерывна

$$u(x, 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{\operatorname{sh} x_1}{\sin \eta_1}$$

Можно показать, что обе эти функции, а следовательно, и все функции $u(x, y = \text{const})$ асимптотически стремятся к прямым

$$u_{\infty}(\pm x) = x \mp 2\pi^{-1} \ln \sin(1/2 \pi \eta) \quad (2.3)$$

причем

$$|u(\pm x, 1)| < |u_{\infty}(\pm x)| < |u(\pm x, 0)| \quad (2.4)$$

Из фиг. 7 видно, что при больших x разность

$$\xi(x) = u(x, 0) - u(x, 1) = 4\pi^{-1} (e^{-\pi x} + 1/3 e^{-3\pi x} + \dots) \quad (2.5)$$

быстро убывает по x . Это значит, что при больших x прямая $x = \delta = \text{const}$ с точностью до $\xi(\delta)$ преобразуется в прямую $u = \Delta = \text{const}$. В силу неравенства (2.4) отличие функций $u(x, 0)$ и $u(x, 1)$ (а тем более, всех других функций $u(x, y = \text{const})$) от асимптоты (2.3) еще меньше. Таким образом, задаваясь любым числом $\nu > 0$, можно найти из (2.5) или из фиг. 6, 7 такое $x = \delta^*$, что для всех $\delta > \delta^*$ будем иметь $\xi < \nu$. Проводники с таким δ будем называть толстыми. Из (2.3) следует, что для толстых проводников

$$\Delta = \delta - 2\pi^{-1} \ln \sin(1/2 \pi \eta) + O[\xi(\delta)] \quad (2.6)$$

и, следовательно, сопротивление контакта равно (с точностью до $O(\xi)$)

$$r_{\infty} = -4\pi^{-1} \ln \sin(1/2 \pi \eta) \quad (2.7)$$

и не зависит от δ . К этой зависимости $r_{\infty}(\eta)$ стремятся кривые $r(\eta, \delta)$ (1.13) при $\delta \rightarrow \infty$ (фиг. 5). Легко видеть, что для толстых проводников определение контактного сопротивления (1.12) совпадает с определением (0.2), которое в безразмерных обозначениях имеет вид (см. (1.1) и (2.3))

$$r_{\infty} = u_{\infty}(-0) - u_{\infty}(+0) \quad (2.8)$$

Переходя к размерным переменным, из (2.7) имеем

$$R_{\infty} = -\frac{4}{\pi} \frac{a}{\lambda} \ln \sin\left(\frac{1}{2} \pi \eta\right) \quad (2.9)$$

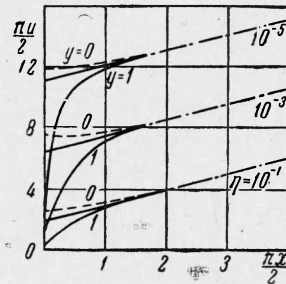
Распространяя полученные результаты на случай n толстых проводников, пропускающих поток q , найдем связь между начальным U_0 и конечным U_n значением величины U в виде

$$U_0 - U_n = q (R_n^{\circ} + R_n) \quad (2.10)$$

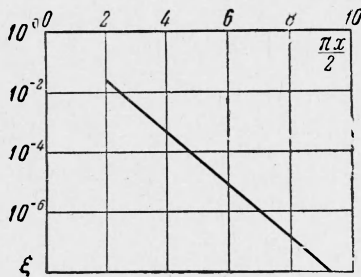
$$R_n^{\circ} = \sum_1^n \frac{l_j}{\lambda_j}, \quad R_n = -\frac{2}{\pi} \sum_1^{n-1} \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{\lambda_j \lambda_{j+1}} a_{j, j+1} \ln \sin\left(\frac{1}{2} \pi \eta_{j, j+1}\right)$$

где λ_j, l_j — коэффициент проводимости и толщина j -го проводника; $a_{j, j+1}, \eta_{j, j+1}$ — параметры контакта двух соседних проводников; R_n — суммарное контактное сопротивление n проводников. При этом проводники считаются толстыми, если для каждого из них выполнено условие

$$\frac{l_j}{a_{j-1, j} + a_{j, j+1}} > \delta^* \quad (2.11)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

где δ^* определено выше. Направление параллельных контактных полос, лежащих в разных контактных плоскостях, может быть различным.

3. В общем случае периодичность контакта позволяет выделить из соприкасающихся проводников призму с поперечным сечением площади S и перпендикулярными к плоскости $X = 0$ гранями, на которых выполняется условие $\partial U / \partial n = 0$. Призма имеет разрез в плоскости $X = 0$, площадь которого равна $S_2 = (1 - \eta) S$. Пусть теперь через этот разрез проходит вторичный поток $Q_2 [U(-0, P), U(+0, P)]$, порожденный разностью значений U в точках $\pm 0, P$ на противоположных сторонах разреза. Тогда суммарный поток $Q = qS$ через площадь S состоит из потока проводимости Q_1 через контактное пятно $S_1 = \eta S$ и вторичного потока Q_2

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (3.1)$$

Разделив обе части (3.1) на $\Delta U = RQ / S$, получим

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \quad (3.2)$$

Учитывая, что $R_2 = \Delta US / Q_2 = RQ / Q_2$, из (3.2) получим

$$R = R_1 \frac{Q_1}{Q} = R_1 \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right) \quad (3.3)$$

В соотношения (3.2) и (3.3) вложена гипотеза независимости потоков, согласно которой обратные величины сопротивлений каждому из потоков суммируются как в случае параллельных проводников. Эта гипотеза была принята в работе [2] при учете потока теплопроводности через среду в полости и оправдалась на опыте вплоть до $Q_2 / Q \sim 1/2$.

Таким образом, согласно (3.3), сопротивление суммарному потоку очень просто связано с сопротивлением потоку проводимости $R_1 = ra/\lambda$ (здесь a — любой характерный размер, например $a = \sqrt{S}$) и функционалом вторичного потока $Q_2 [U(-0, P), U(+0, P)]$, который вычисляется при помощи известного распределения величины U на двух противоположных сторонах разреза

$$U(\mp 0, P) = U_* \pm \frac{a}{\lambda} \frac{Q_1}{S} u(0, P) \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда вторичный поток представляется в виде функционала

$$Q_2 = \int_{S_2} dS \sum_{j=1}^N G_j [U^{m_j}(-0, P) - U^{m_j}(+0, P)] \quad (3.5)$$

где m_j — целые положительные числа, P — точка интегрирования. Такая запись имеет место, например, в случае комбинированной теплопередачи излучением и проводимостью через среду в полости; тогда $m_1 = 4$, $G_1 = \epsilon_{\pm} \sigma_0$, $m_2 = 1$, $G_2 = \lambda_c / \delta_c$, где σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана, ϵ_{\pm} — приведенный коэффициент черноты стенок полости ($X = \pm 0$), λ_c и δ_c — проводимость и приведенная толщина слоя среды. В силу (3.4), в подынтегральном выражении останутся только нечетные степени $u(0, P)$

$$Q_2 = 2S \sum_{j=1}^N G_j U_*^{m_j} \sum_{\mu=1}^{\theta} C_{m_j}^{2\mu-1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right)^{2\mu-1} \int_{S_2} \left(\frac{u(0, P)}{u_*}\right)^{2\mu-1} ds$$

$$u_* = \frac{U_*}{aQ/\lambda S}, \quad ds = \frac{dS}{S}, \quad \left\{ \theta = \begin{array}{ll} 1/2(m_j + 1), & \text{если } m_j \text{ нечетное} \\ 1/2 m_j, & \text{если } m_j \text{ четное} \end{array} \right.$$

Здесь $C_{m_j}^{2\mu-1}$ — биномиальные коэффициенты.

Вводя обозначение

$$\int_{s_2} u^m ds = \langle u^m \rangle (1 - \eta)$$

получим следующее алгебраическое уравнение для определения Q_2 / Q

$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{2(1-\eta)}{q} \sum_{j=1}^N G_j U_*^{m_j} \sum_{\mu=1}^{\theta} C_{m_j}^{2\mu-1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right)^{2\mu-1} \frac{\langle u^{2\mu-1} \rangle}{u_*^{2\mu-1}} \quad (3.6)$$

В двумерном случае $S = a [a]$ ($[a]$ — единица длины), $ds = dy$. На фиг. 8 представлены некоторые коэффициенты $\langle u^m(\eta) \rangle$, где (см. (2.2))

$$u(0, P) = u(0, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ar sh} \left[\left(\frac{\cos^{1/2} \pi y}{\sin^{1/2} \pi \eta} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

В случае малости $\langle u \rangle / u_*$ правая часть уравнения (3.6) будет пропорциональна $(1 - Q_2 / Q) \langle u \rangle / u_*$ с точностью до множителя $1 + O(\langle u \rangle / u_*)^2$. Действительно, можно показать, что кривая $u(0, P)$ вдоль линии тока выпукла (например, в двумерном случае из (3.7) непосредственно следует, что $d^2 u(0, y) / dy^2 < 0$ при $0 < y < 1 - \eta$).

Тогда $u_{\max}(0, P) < 2 \langle u \rangle$, откуда имеем

$$\sum_{\mu=1}^{\theta} C_{m_j}^{2\mu-1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right)^{2\mu-1} \frac{\langle u^{2\mu-1} \rangle}{u_*^{2\mu-1}} = m_j \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right) \frac{\langle u \rangle}{u_*} (1 + \Sigma')$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \frac{1}{m_j} \sum_{\mu=2}^{\theta} C_{m_j}^{2\mu-1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right)^{2(\mu-1)} \frac{\langle u^{2\mu-1} \rangle}{u_*^{2\mu-1}} \frac{u_*}{\langle u \rangle} < \\ &< \frac{1}{m_j} \sum_{\mu=2}^{\theta} C_{m_j}^{2\mu-1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q}\right)^{2(\mu-1)} 2^{2(\mu-1)} \left(\frac{\langle u \rangle}{u_*}\right)^{2(\mu-1)} = O\left(\frac{\langle u \rangle}{u_*}\right)^2 \end{aligned}$$

Пренебрегая этой величиной по сравнению с единицей, из (3.6) имеем

$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{L}{1+L} \quad \left(L = \frac{2(1-\eta)}{q} \frac{\langle u \rangle}{u_*} \sum_{j=1}^N m_j G_j U_*^{m_j} \right) \quad (3.8)$$

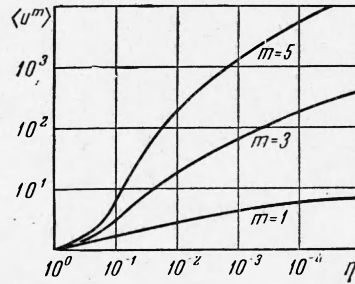
Тогда сопротивление вторичному потоку и суммарное сопротивление равны соответственно

$$R_2 = \frac{R_1}{L}, \quad R = \frac{R_1}{1+L} \quad (3.9)$$

Поступила 4 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Х о л ь м Р. Электрические контакты. Изд. иностр. лит., М., 1961.
2. Ш л ы к о в Ю. П., Г а н и н Е. А. Контактный теплообмен. М.—Л., Энергоиздат, 1963.
3. F e n e c h H., R o h s e n o w W. H. Prediction of Thermal Conductance of Metallic Surfaces in Contact (62—HT—32), J. of Heat Transfer, 1963, v. 85, No. 1.
4. М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, II. Изд. иностр. лит., 1960.
5. А р а в и н В. И., Н у м е р о в С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехтеоретиздат, М., 1953.



Фиг. 8