

УДК 532.526

НОВАЯ ПАРАБОЛИЗОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. В. Петров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

На основе оценок для критического слоя получена система уравнений устойчивости сжимаемого пограничного слоя, параболическая по форме и свободная от известного ограничения на шаг маршевой схемы, связанного с неустранимой в рамках прежнего способа параболизации эллиптичностью. Описана численная схема, представлены результаты расчетов для пограничного слоя на теплоизолированной пластине.

При выводе параболизированных уравнений устойчивости пограничного слоя (см., например, [1]) ранее использовались асимптотические оценки по целым степеням $R = \sqrt{\text{Re}}$, где Re — число Рейнольдса по расстоянию x от кромки пластины. Сохраняются члены уравнений порядка R^{-1} (здесь и ниже оценки членов уравнений берутся относительно главных членов). Однако известно, что возмущения скорости и вязких напряжений достигают наибольших значений в критическом слое, где справедливы иные оценки, включающие дробные степени R . Членами же порядка R^{-1} в работе [2] пренебрегается даже вне критического и пристенного слоев, где тем самым признаются достаточно точными уравнения невязкой параллельной теории устойчивости. Из уравнений для критического слоя в [2] учитывались лишь главные члены, тогда как по предварительной оценке член, содержащий производную по x от амплитудной функции продольной составляющей возмущения скорости, имеет порядок $R^{-1/3}$. В данной работе пренебрегается только членами порядка R^{-1} , содержащими возмущения вязких напряжений или производные по x от амплитудных функций возмущений.

Уравнения динамики вязкой сжимаемой жидкости в произвольной ортогональной системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) [3] представляются в виде

$$d_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho d_t v_i + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^3 [H_{im}(\rho v_i v_m - \tau_{im}) - H_{mi}(\rho v_m^2 - \tau_{mm})] = -\partial_i p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\rho d_t H = \partial_t p + \operatorname{div} \mathbf{q},$$

где \mathbf{v} — скорость; ρ — плотность; p — давление; H — полная энтальпия;

$$d_t = \partial_t + \sum_{k=1}^3 v_k \partial_k; \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \partial_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}; \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = \sum_{k=1}^3 (\partial_k + h_k) a_k;$$

$$h_k = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 H_{mk}; \quad H_{mk} = \partial_k \ln H_m; \quad H_m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_m}\right)^2};$$

$$\tau_{ik} = \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k - H_{ik} v_i - H_{ki} v_k); \quad \tau_{ii} = 2\mu \left(\partial_i v_i + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^3 H_{im} v_m - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right);$$

$\boldsymbol{\tau}_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3})$; $q_k = \lambda \partial_k T + \boldsymbol{\tau}_k \mathbf{v}$; t — время; x, y, z — декартовы координаты; T — температура; μ — вязкость; λ — теплопроводность.

Линеаризованная система уравнений для возмущений \hat{a} параметров течения a ($a \Rightarrow a + \hat{a}$) имеет вид

$$(d_t + \operatorname{div} \mathbf{v}) \hat{\rho} + \sum_{k=1}^3 (\partial_k \rho) \hat{v}_k + \rho \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0,$$

$$\rho \left[d_t \hat{v}_i + \sum_{k=1}^3 (\partial_k v_i) \hat{v}_k \right] + \left(\sum_{k=1}^3 v_k \partial_k v_i \right) \hat{\rho} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^3 [H_{im} (v_i v_m \hat{\rho} + \rho v_i \hat{v}_m + \rho v_m \hat{v}_i - \hat{\tau}_{im}) - H_{mi} (v_m^2 \hat{\rho} + 2\rho v_m \hat{v}_m - \hat{\tau}_{mm})] = -\partial_i \hat{p} + \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\tau}}_i,$$

$$\hat{\tau}_{ik} = \mu [(\partial_k - H_{ik}) \hat{v}_i + (\partial_i - H_{ki}) \hat{v}_k] + \tau_{ik} \frac{\hat{\mu}}{\mu}, \quad \hat{\tau}_{ii} = 2\mu \left(\partial_i \hat{v}_i + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^3 H_{im} \hat{v}_m - \frac{1}{3} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} \right) + \tau_{ii} \frac{\hat{\mu}}{\mu},$$

$$\rho d_t \hat{H} + \sum_{k=1}^3 (\partial_k H) (\rho \hat{v}_k + v_k \hat{\rho}) = \partial_t \hat{p} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}, \quad \hat{q}_k = \lambda \partial_k \hat{T} + (\partial_k T) \hat{\lambda} + \boldsymbol{\tau}_k \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \hat{\boldsymbol{\tau}}_k.$$

Далее будем рассматривать плоскую задачу, используя систему координат (ξ, ψ) , где ψ — функция тока основного течения. Тогда $H_2 = 1/(\rho u)$, $h_1 = -\partial_1 \ln(\rho u)$, $h_2 = \partial_2 \ln H_1$ — кривизна линии тока; u — стационарная скорость. Естественно положить на стенке $\psi = 0$,

а коэффициент Ламе H_1 определить через кривизну интегралом $H_1 = \exp \int_0^\psi h_2 H_2 d\psi$; при этом ξ на стенке — расстояние вдоль нее.

Рассмотрим возмущение вида монохроматической волны с угловой частотой ω :

$$\hat{a}(\xi, \psi, t) = \tilde{a}(\xi, \psi) \exp \left\{ i \left[\int k(\xi) d\xi - \omega t \right] \right\}.$$

Заменяя обозначения амплитудных функций компонент возмущения скорости \hat{v}_1, \hat{v}_2 (вдоль линий тока и по нормали к ним) на \tilde{u}, \tilde{v} , получим

$$\begin{aligned} (\partial_2 + h_2) \tilde{v} + (h_1 + i\alpha + \partial_1) \tilde{u} - \tilde{e} &= 0, \\ \partial_2 (\tilde{p} - \tilde{\tau}_{22}) + \rho (h_1 u + d_t) \tilde{v} - h_2 u (2\rho \tilde{u} + u \tilde{\rho}) - i\alpha \tilde{\tau}_{12} &= (2h_1 + \partial_1) \tilde{\tau}_{12} + h_2 (\tilde{\tau}_{22} - \tilde{\tau}_{11}), \\ (\partial_2 + 2h_2) \tilde{\tau}_{12} - (i\alpha + \partial_1) \tilde{p} - \rho (\partial_2 u + h_2 u) \tilde{v} - \rho (\partial_1 u + d_t) \tilde{u} - (u \partial_1 u) \tilde{\rho} + i\alpha \tilde{\tau}_{11} &= -(h_1 + \partial_1) \tilde{\tau}_{11} + h_1 \tilde{\tau}_{22}, \\ (\partial_2 - h_2) \tilde{u} + (i\alpha - h_1) \tilde{v} + \tau_{12} \tilde{\mu} / \mu^2 - \tilde{\tau}_{12} / \mu &= -\partial_1 \tilde{v}, \\ (\partial_2 + h_2) \tilde{q}_2 - i\omega \tilde{p} - (\rho \partial_2 H) \tilde{v} - (\rho \partial_1 H) \tilde{u} - \rho d_t \tilde{H} - (u \partial_1 H) \tilde{\rho} + i\alpha \tilde{q}_1 &= -(h_1 + \partial_1) \tilde{q}_1, \\ \lambda \partial_2 \tilde{T} + \tau_{12} \tilde{u} + u \tilde{\tau}_{12} + (\partial_2 T) \tilde{\lambda} - \tilde{q}_2 &= -\tau_{22} \tilde{v}, \\ \tilde{\tau}_{11} - 2\mu (i\alpha \tilde{u} - \tilde{e} / 3) = 2\mu (h_2 \tilde{v} + \partial_1 \tilde{u}) + \tau_{11} \tilde{\mu} / \mu, \quad \tilde{\tau}_{22} - 2\mu (\partial_2 \tilde{v} - \tilde{e} / 3) &= 2\mu h_1 \tilde{u} + \tau_{22} \tilde{\mu} / \mu, \\ \tilde{q}_1 - \tau_{12} \tilde{v} - i\alpha \lambda \tilde{T} - u \tilde{\tau}_{11} = \tau_{11} \tilde{u} + \lambda \partial_1 \tilde{T} + (\partial_1 T) \tilde{\lambda}, \quad \rho \tilde{e} = -(\partial_2 \rho) \tilde{v} - (\partial_1 \rho) \tilde{u} - (e + d_t) \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (1)$$

Показатели степени b , определяющие порядок $O(R^b)$
величин и операторов для возмущений в критическом слое

Порядок	Параметры и операторы					
	δ_c, \tilde{p}	$\partial_1, \tilde{\tau}_{12}, \tilde{q}_2$	∂_2	$\tilde{\tau}_{11}, \tilde{\tau}_{22}, \tilde{q}_1$	$\tilde{v}, \tilde{e}, u_c$	\tilde{l}_k
$O(1)$	-1/3	-2/3	1/3	-1	-1/3	-1
$O(R^{-1/2})$	-1/6	-5/6	1/6	-3/2	-2/3	-4/3
$O(R^{-1})$	0	-1	0	-2	-1	-2

где $d_t = u_c + u\partial_1$; $u_c = i(u\alpha - \omega)$; $\alpha = k/H_1$; $e = (\partial_1 + h_1)u$; $\tau_{12} = \mu(\partial_2 - h_2)u$; $\tau_{11} = 2\mu(\partial_1 u - e/3)$; $\tau_{22} = 2\mu(h_1 u - e/3)$.

По аналогии с работой [2] проведем оценку членов уравнений системы (1) при $R \rightarrow \infty$ в критическом слое толщины δ_c , расположенном в окрестности точки $u_c = 0$. В качестве масштаба расстояния примем толщину пограничного слоя δ ; $R = u_e \delta / \nu_e$, где $\nu_e = \mu_e / \rho_e$, индекс e соответствует значению на границе пограничного слоя. Тогда $\xi = O(R)$; для основного течения $\partial_1 = O(R^{-1})$, $\partial_2 = O(1)$ (∂_1, ∂_2 приближенно равны производным по обычным координатам пограничного слоя), $\mu, \lambda = O(R^{-1})$. Вязкий $\mu \partial_2^2 \tilde{u}$ и невязкий $\rho u_c \tilde{u}$ члены в уравнении второго порядка, эквивалентном 3-му и 4-му уравнениям системы (1), должны быть одного порядка, откуда при учете оценки $u_c = O(\alpha \delta_c)$ следует, что $\delta_c = O((\alpha R)^{-1/3})$.

В [2] предполагается, что $\alpha = O(1)$, тогда $\delta = O(R^{-1/3})$. Это справедливо для высших мод, но для нейтральных возмущений первой моды $\alpha = O(R^{-1})$. Показатели степени b , определяющие порядок $O(R^b)$ величин и операторов для возмущений в критическом слое, даны в таблице. Кроме предельных случаев $\alpha = O(1)$ и $\alpha = O(R^{-1})$ в ней приведены данные для промежуточного случая $\alpha = O(R^{-1/2})$. Примем (линейное возмущение определяется с точностью до произвольного множителя), что $\tilde{u}, \tilde{H}, \tilde{T}, \tilde{\rho}$ имеют порядок $O(1)$. Оценки для \tilde{v}, \tilde{p} получаются из требования, чтобы они содержались в главных частях 1-го и 3-го уравнений системы (1).

Правые части первых шести уравнений состоят из членов, имеющих порядок R^b ($b < -1$), и поэтому отбрасываются. В следующих трех уравнениях, определяющих $\tilde{\tau}_{11}, \tilde{\tau}_{22}, \tilde{q}_1$, также достаточно сохранить только левые части, для того чтобы в предыдущих уравнениях содержались все члены порядка R^{-1} . Используя затем приближенные соотношения $\partial_2 \tilde{v} = -i\alpha \tilde{u} - (\partial_2 \ln \rho) \tilde{v} - (u_c / \rho) \tilde{\rho}$, $\partial_2 \tilde{u} = \tilde{\tau}_{12} / \mu - \tau_{12} \tilde{\mu} / \mu^2$, получим

$$\partial_2 \tilde{v} = -(\partial_2 \ln \rho + h_2) \tilde{v} + (\partial_1 \ln u - i\alpha - \partial_1) \tilde{u} - (1/\rho)(u_c - u\partial_1 \ln \rho + u\partial_1) \tilde{\rho},$$

$$\partial_2 \tilde{p} = -\rho(u_c + h_1 u) \tilde{v} + h_2 u(2\rho \tilde{u} + u\tilde{\rho}) - i\alpha \tilde{\tau} - \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2,$$

$$\partial_2 \tilde{\tau} = (i\alpha + \partial_1) \tilde{p} + \rho(\partial_2 u + h_2 u) \tilde{v} + (\rho \partial_1 u + 2\alpha^2 \mu + \rho u_c + \rho u \partial_1) \tilde{u} + (u \partial_1 u) \tilde{\rho} - 2h_2 \tilde{\tau} - \tilde{l}_3, \quad (2)$$

$$\partial_2 \tilde{u} = (h_1 - i\alpha) \tilde{v} + h_2 \tilde{u} - (\partial_2 u / \mu) \tilde{\mu} + \tilde{\tau} / \mu,$$

$$\partial_2 \tilde{q} = i\omega \tilde{p} + (\rho \partial_2 H) \tilde{v} + (\rho \partial_1 H + 2\alpha^2 \mu u) \tilde{u} + \rho(u_c + u\partial_1) \tilde{H} + \alpha^2 \lambda \tilde{T} + (u \partial_1 H) \tilde{\rho} - h_2 \tilde{q} - \tilde{l}_4,$$

$$\lambda \partial_2 \tilde{T} = -(\mu \partial_2 u) \tilde{u} - u \tilde{\tau} - (\partial_2 T) \tilde{\lambda} + \tilde{q},$$

где $\tilde{\tau}, \tilde{q}$ соответствуют $\tilde{\tau}_{12}, \tilde{q}_2$ в (1);

$$\tilde{l}_1 = \rho u \partial_1 \tilde{v}; \quad \tilde{l}_2 = 2i\alpha[(\partial_2 \mu - 2\mu \partial_2 \ln(\rho)/3) \tilde{u} - (\partial_2 u) \tilde{\mu}] + (4\mu u_c / (3\rho)) \partial_2 \tilde{\rho}; \quad (3)$$

$$\tilde{l}_3 = (2i\alpha \mu / 3)[(\partial_2 \ln \rho) \tilde{v} + (u_c / \rho) \tilde{\rho}]; \quad \tilde{l}_4 = u \tilde{l}_3 + i\alpha \mu (\partial_2 u) \tilde{v}.$$

Из оценок, приведенных в таблице, следует, что \tilde{l}_k достигают порядка R^{-1} . Эти члены содержат только возмущения вязких напряжений или производные по ξ от амплитудных функций и в соответствии со сказанным выше должны быть отброшены:

$$\tilde{l}_k = 0, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (4)$$

Система (2), (4) не содержит $\partial\tilde{v}/\partial\xi$ и с учетом линеаризованных уравнений состояния газа может быть приведена к канонической параболической форме $\partial Z/\partial\xi = A\partial^2 Z/\partial\psi^2 + B(Z = (\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{H}))$, A — матрица функций от координат, B — вектор-функция от $\xi, \psi, Z, \partial Z/\partial\psi$, поэтому она свободна от эллиптичности, ограничивающей шаг $\Delta\xi$ устойчивого счета при использовании неявных маршевых схем [1] неравенством

$$|\alpha|\Delta\xi > 1. \quad (5)$$

Параболичность сохраняется после нетензорных преобразований вида $\xi_1 = \xi_1(\xi), \xi_2 = \xi_2(\xi, \psi)$, например при переходе к переменной подобия для пограничного слоя на пластине.

Члены, учитывающие кривизну линий тока, можно исключить, если (в масштабе δ) $h_2R \ll 1$. Учитывая, что $H_1 = 1 + O(h_2)$, достаточно точными оказываются соотношения $\partial_1 = \partial/\partial\xi, \alpha = k$. В рассматриваемом далее случае обтекания пластины $h_2 = O(R^{-2})$.

Используем следующие масштабы: расстояние — ν_e/u_e ; скорость и компоненты ее возмущения — u_e ; $\partial_1, \partial_2, \alpha$ — u_e/ν_e ; ω, u_c — u_e^2/ν_e ; $\psi, \mu, \tilde{\mu}$ — μ_e ; H, \tilde{H} — u_e^2 ; $\rho, \tilde{\rho}$ — ρ_e ; $\tilde{p}, \tilde{\tau}$ — $\rho_e u_e^2$; \tilde{q} — $\rho_e u_e^3$; T, \tilde{T} — T_e ; $\lambda, \tilde{\lambda}$ — $\mu_e u_e^2/T_e$. Величины с индексами e постоянны, для пластины это значения на границе пограничного слоя. Вид уравнений (2), (3) при таких размерностях сохраняется.

Перейдем к переменной подобия $f = \psi/\sqrt{\xi}$, а затем к $R = \sqrt{\xi}, d\eta = df/u$, так что

$$\partial_1 = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{f}{Ru} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \partial_2 = \frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Для совершенного газа с постоянным числом Прандтля Pr справедливо $\lambda = \mu/(\text{Pr} g_{m1}), T = g_{m1}h, \rho = 1/T, \tilde{\rho}/\rho = g_{m1}\tilde{p} - \tilde{T}/T, g_m = \gamma M^2, g_{m1} = (\gamma - 1)M^2$ (M — число Маха набегающего потока; $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей). Уравнения (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}' &= \rho T' \tilde{v} - (i_0 + f_0 T u' + \partial) \tilde{u} - T^2 i_c \tilde{\rho} - g_m u \partial \tilde{p} + \rho (-f_2 T' + u \partial) \tilde{T} - f_1 T \tilde{u}' + f_2 \tilde{T}', \\ \tilde{p}' &= -(i_c + r_h u) \tilde{v} - i_0 \tilde{\tau}, \quad \tilde{\tau}' = (i_0 + \partial) \tilde{p} + \rho u' \tilde{v} + (i_c + f_1 u' + 2a_t + \rho u \partial) \tilde{u} + f_2 u' T \tilde{\rho} + f_2 \tilde{u}', \\ \tilde{u}' &= (r_h T - i_0) \tilde{v} - u' \tilde{\mu}/\mu + \tilde{\tau}/\mu_0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}' &= i\omega R T \tilde{p} + \rho H' \tilde{v} + (f_1 H' + a_t u) \tilde{u} + f_1 H' u T \tilde{\rho} + (i_c + a_t + \rho u \partial) \tilde{H} + a_t (1/\text{Pr} - 1) \tilde{h} + f_2 \tilde{H}', \\ \tilde{h}' &= -\text{Pr} u' \tilde{u} - h' \tilde{\mu}/\mu + (\text{Pr}/\mu_0) (\tilde{q} - u \tilde{\tau}), \quad \tilde{T} = g_{m1} \tilde{h}, \quad \tilde{H} = \tilde{h} + u \tilde{u}, \end{aligned}$$

где $\partial = RT(\partial/\partial\xi) = (T/2)(\partial/\partial R)$; $i_0 = i\alpha RT$; $a_t = \alpha^2 RT\mu$; $i_c = Ru_c = iR(u\alpha - \omega)$; $\mu_0 = \mu/(RT)$; $f_0 = f/(2u^2 R)$; $f_1 = -f_0 u$; $f_2 = f_1 u$; $r_h = Rh_1 = f_0 u' + f_1 \rho T'$; штрихом обозначена производная по η .

Применяя в уравнениях (6) простейшую аппроксимацию производных по R $\partial\tilde{a}/\partial R \approx (\tilde{a} - \tilde{a}_0)/\Delta R$, где $\Delta R = R - R_0$ — шаг маршевой схемы, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая с учетом очевидных подстановок принимает вид $Z' = AZ + B(Z - Z_0)$, где $Z = (\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\tau}, \tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{H})$; A и B — матрицы, составленные из коэффициентов уравнений (6). Здесь и далее индекс 0 обозначает величину, вычисленную на предыдущем шаге по ξ . При заданном α общим решением этой системы уравнений явля-

ется суперпозиция $Z = \sum_{k=1}^6 C_k Z_k + Z_n$ линейно независимых решений однородной системы

$Z' = (A + B)Z$ и произвольного решения неоднородной.

Для вывода условий на внешней границе пограничного слоя вернемся к уравнениям (2), (4), используя прежние обозначения для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пренебрежение членами, содержащими $\partial_1 \tilde{a}$ вне пограничного слоя, означает, что $B = 0$ при $\psi > \psi_e$, т. е. система однородна. В случае обтекания пластины ее общее решение представляет суперпозицию трех затухающих и трех нарастающих при $\psi \rightarrow \infty$ возмущений с известными из параллельной теории предэкспонентами Z_{ke} . Решение в области пограничного слоя, отвечающее требованию затухания возмущений за ее пределами, можно построить из четырех векторов, используя для них граничные условия

$$Z_n = CZ_{3e}, \quad Z_k = Z_{ke}, \quad k = 1, \dots, 3, \quad \eta = \eta_e. \quad (7)$$

В условии для неоднородного уравнения используется невязкий вектор Z_{3e} , но можно использовать любую суперпозицию Z_{ke} .

Четыре вектора определяются одновременным численным интегрированием соответствующих уравнений от внешней границы пограничного слоя до стенки. При этом используются ортогонализации (Z_n ортогонализуется последним, не ортогонализуется по отношению к Z_3 и не нормируется). Константы C_k определяются условиями на стенке $\tilde{v} = \tilde{u} = \tilde{H} = 0$ при $\eta = 0$.

Введение неизвестной функции $\alpha(\xi)$ вносит в уравнения (1) нелинейность и неопределенность. Сделать задачу определенной можно, например, с помощью условия постоянства амплитудной функции любой физической величины на линии максимума амплитуды пульсаций массового расхода $\tilde{m} = \rho\tilde{u} + u\tilde{\rho}$. Эта линия соответствует критическому слою при $R \rightarrow \infty$.

Для вычисления α используется метод Ньютона. Итерационный процесс направляется на выполнение одного из двух условий

$$\tilde{m} - \tilde{m}_0 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_{\max}; \quad (8)$$

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_{\max}, \quad (9)$$

где η_{\max} — точка максимума функции $|\tilde{m}_0(\eta)|$. Эти же условия применимы и в случае обтекания произвольного тела, когда η понимается как любая выбранная для расчета пограничного слоя координата.

Условие (9) при использовании координатной системы (ξ, ψ) соответствует условию $\partial_1 \tilde{p} = 0$ при $\psi = \psi_{\max}$. Дифференцируя по ξ второе уравнение из (2) и ограничиваясь случаем обычного пограничного слоя, когда кривизной h_2 в этом уравнении можно пренебречь, получим оценку $\partial_1 \tilde{p} = O(\delta_c(u_c \partial_1 \tilde{v} + \alpha \partial_1 \tilde{\tau}))$, справедливую во всем критическом слое. Из нее следует, что члены, содержащие $\partial_1 \tilde{p}$ в (2), имеют порядок R^b ($b < -1$) относительно главных и могут быть отброшены (при невыполнении (9) эти члены достигают порядка $R^{-2/3}$). Система (2), (3) параболится так же, как и при отбрасывании $\partial_1 \tilde{v}$. Заметим, что возникает дополнительное требование $\Delta\xi/\xi < O(\delta_c)$: шаг маршевой схемы должен быть достаточно малым, чтобы при выполнении (9) не выходить за пределы критического слоя.

На рис. 1–3 приведены результаты расчетов зависимости от R пространственного инкремента $\alpha_j = 0,5d \ln A/dR$, где A — амплитуда пульсаций массового расхода (или давления (кривая 3 на рис. 2)) при $\eta = \eta_{\max}$. Все результаты, в том числе взятые для сравнения из [1], получены с использованием условия (8), кроме представленных кривыми 2–4 на рис. 2, которые рассчитаны с использованием условия (9). Расчеты выполнены для теплоизолированной стенки, $\text{Pr} = 1$, $\mu = T$.

Данные, представленные на рис. 1, 2, получены при $M = 5$, $\omega = 2 \cdot 10^{-4}$. Результаты расчетов с применением параболитизированной системы уравнений (кривая 1 на рис. 1), предсказывают больший рост возмущений, чем параллельная теория (кривая 2), особенно в диапазоне первой моды ($R < 600$).

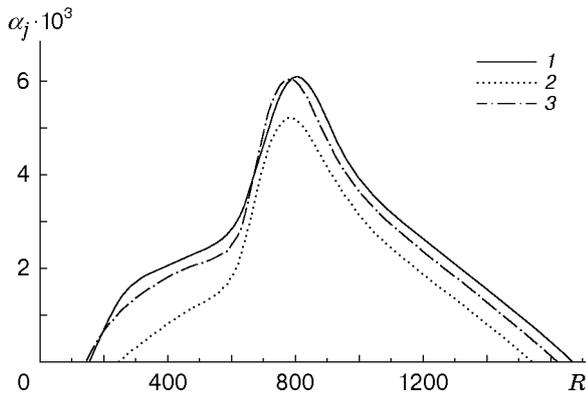


Рис. 1

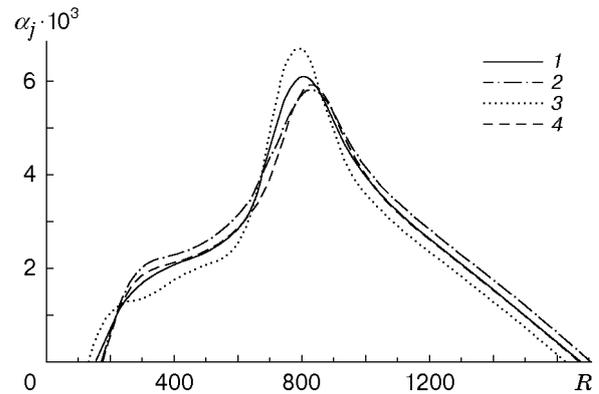


Рис. 2

Для расчетов в рамках локальной модели предлагаются уравнения системы (6) с отброшенными членами, содержащими производные по R от амплитудных функций возмущений. Результаты (кривая 3 на рис. 1) удовлетворительно согласуются с результатами параболической задачи и используются в ней в качестве начальных условий.

Полученные в одном расчете и представленные на рис. 2 результаты для возмущения массового расхода (кривая 2) и возмущения давления (кривая 3) показывают, насколько отличаются инкременты возмущений этих параметров.

Несовпадение результатов для возмущений массового расхода при использовании (8) или (9) (кривые 1 и 2 на рис. 2) объясняется неадекватностью (в пределах погрешности порядка R^{-1}) граничных условий (7) уравнениям (6). Так, Z_{ke} в (7) являются функциями α , но по завершении итерационного процесса с условием (8) или (9) α оказываются разными. В одном случае мнимая часть α связана с α_j соотношением $\alpha_j = -\text{Im}(\alpha R)$ для \tilde{m} (кривая 1), в другом — для \tilde{p} (кривая 3). Максимальный рост амплитуды пульсаций $\ln(A_{\max}/A_{\min}) = 2 \int_{\alpha_j > 0} \alpha_j dR$, соответствующий кривым 1 и 2, равен 8,1 и 8,4. Для

параллельной и локально-непараллельной теорий (кривые 2 и 3 на рис. 1) этот показатель равен 5,5 и 7,4.

Кривая 4 на рис. 2 рассчитана с использованием соотношений (3) и приведена для демонстрации точности уравнений (2), (4).

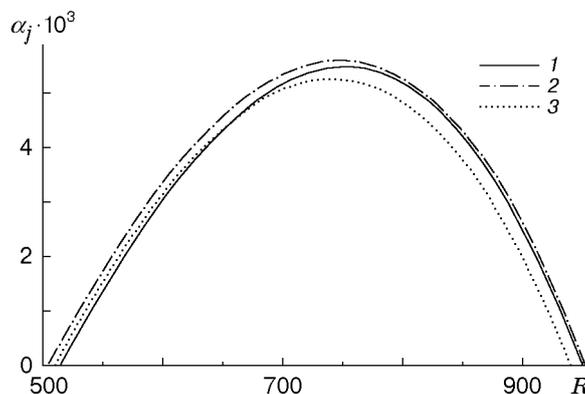


Рис. 3

Удовлетворительная точность достигается при шаге $\Delta R = 20$. Дополнительные расчеты, проведенные с малыми постоянными шагами по ξ , подтвердили, что ограничение (5) на шаг снимается. Счет остается устойчивым при $|\alpha|\Delta\xi = 0,5$, а для $M = 0$ счет устойчив и при 20-кратном уменьшении шага. Результаты для $M = 0$, $\omega = 7 \cdot 10^{-5}$ представлены кривой 1 на рис. 3. Для больших R они согласуются с результатами [1] (кривая 2) и отличаются от результатов, полученных с помощью параллельной теории (кривая 3 на рис. 3).

Проводилось сравнение результатов, полученных как с учетом, так и без учета членов, содержащих $\partial_1 \tilde{p}$, и при использовании условия (9). Различие инкрементов иногда достигает 3%, а максимальный рост амплитуды практически одинаков. Заметим, что отбрасывание $\partial \tilde{p} / \partial \xi$, предлагаемое ранее в [1] для уменьшения минимального шага по ξ , приводит к потере точности, если использовать (8) или иное условие, противоречащее требованию $\tilde{p} = \text{const}$ в критическом слое.

Таким образом, для расчетов устойчивости сжимаемого пограничного слоя рекомендуется система уравнений (2), (4) с отброшенными членами, содержащими $\partial \tilde{p} / \partial \xi$, и с использованием условия (9) для вычисления α . При изучении распространения внешнего возмущения в пограничном слое предлагается использовать систему (2), (4) в полном виде, так как α задано и условия типа (8), (9) не нужны. В этом случае шаг маршевой схемы также не ограничен неравенством (5), так как система не содержит $\partial \tilde{v} / \partial \xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Li F., Malik M. R.** Mathematical nature of parabolized stability equations // Laminar-turbulent transition: IUTAM symp., Sept. 5–9, 1994. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. P. 205–211.
2. **Dunn D. W., Lin C. C.** On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. 1955. V. 22, N 7. P. 455–477.
3. **Гинзбург И. П.** Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1970.

*Поступила в редакцию 7/V 1998 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 1998 г.*