



**ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА ПРИ ВНЕДРЕНИИ КЛИНОВИДНОГО
ИНСТРУМЕНТА В ВЕСОМЫЙ МАССИВ ГОРНЫХ ПОРОД**

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹

¹*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: a.i.chanyshhev@gmail.com, i.m.abdulin@mail.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

²*Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия*

Решается задача о внедрении жесткого недеформируемого клиновидного инструмента в весо-мый массив горных пород с условием пластичности Кулона–Мора. При этом соотношения на характеристиках, как следствия дифференциальных уравнений равновесия, получают слагаемые, отождествляющие их с обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. В результате интегрирования уравнений устанавливаются необходимые значения контактных напряжений на границе “инструмент–порода”. Предельная нагрузка зависит как от угла заточки инструмента и физико-механических характеристик породы, так и от глубины проникания.

Жесткий клин, горная порода, условие Кулона–Мора, вес, предельная нагрузка

**ULTIMATE LOAD WHEN PENETRATING A WEIGHTY ROCK MASS
WITH A WEDGE-SHAPED TOOL**

A. I. Chanyshhev^{1,2} and I. M. Abdulin¹

¹*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: a.i.chanyshhev@gmail.com, i.m.abdulin@mail.ru,
Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

²*Novosibirsk State University of Economics and Management,
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia*

The problem of penetrating a weighty rock mass with the Coulomb-Mohr plasticity condition with a rigid nondeformable wedge-shaped tool is being solved. In this case, the relations on the characteristics, as a consequence of differential equilibrium equations, are obtained by the terms that identify them with ordinary linear differential equations of the first order. As a result of equation integration, the required values of contact stresses at the “tool-rock” interface are determined. The ultimate load depends both on the angle of tool sharpening and physical/mechanical rock characteristics, and the depth of penetration.

Rigid wedge, rock, Coulomb-Mohr condition, weight, ultimate load

Задачи, связанные с прониканием инструментов в массивы горных пород, привлекали и продолжают привлекать внимание исследователей [1–6]. Для прочных горных пород, по-видимому, нет необходимости учитывать вес пород из-за того, что перепад высот верхней и нижней точек внедряемого инструмента невелик. Однако в тех случаях, когда прочность пород мала, то здесь есть потребность рассматривать влияние веса пород на значения предельной нагрузки

при внедрении того или иного инструмента. Отметим, что предельные нагрузки находятся при решении задач по схеме жестко-пластического тела [7–9]. Жестко-пластическое деформирование горных пород при условии Кулона-Мора изучалось в [10–12], вес горных пород в схему жестко-пластического тела вводился в [13, 14]. В случае учета веса горных пород соотношения на характеристиках не являются уравнениями в полных дифференциалах, отсюда возникают сложности в их интегрировании. Покажем, как это препятствие преодолевается в задаче о внедрении жесткого недеформируемого клина в жестко-пластическую весомую среду с условием пластичности Кулона–Мора в случае плоской деформации.

Исходные положения. Рассматривается плоская деформация с условием пластичности массива пород в виде условия Кулона–Мора [10–12]:

$$\max_n |\tau_n + \operatorname{tg} \psi \sigma_n| = k, \quad (1)$$

где \vec{n} — нормаль к площадке в системе координат 1, 2, 3, связанной с главными осям тензора напряжений T_σ , ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Исходя из диаграммы Мора (рис. 1), находим эквивалентное (1) условие:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \psi} + \operatorname{tg} \psi \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = k, \quad (2)$$

где ψ — угол наклона прямой (1) к оси абсцисс, точка A — точка касания прямой (2) с большим кругом Мора. Условие (2) переписывается в виде

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \psi = k \cos \psi. \quad (3)$$

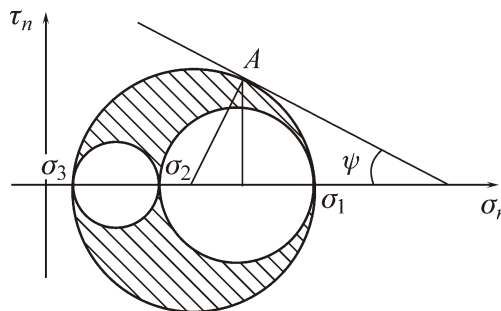


Рис. 1. Диаграмма Мора с главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Заштрихованная область — область допустимых напряженных состояний

Вводятся обозначения

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (4)$$

где $Oxyz$ — прямоугольная декартова система координат, деформации в направлении оси z отсутствуют ($\varepsilon_z = 0, \varepsilon_{zx} = 0, \varepsilon_{zy} = 0$), угол θ устанавливает ориентацию первого главного направления тензора T_σ по отношению к осям x, y , так как $\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2(1, x)$. Вводятся преобразования Леви:

$$\sigma_x = \sigma + \tau \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - \tau \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = \tau \sin 2\theta. \quad (5)$$

Условие пластичности (3) формулируется как

$$\tau = \tau_s - \sigma \sin \psi, \quad (6)$$

где $\tau_s = k \cos \psi$.

Подстановка (5) в уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma_b = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где γ_b — плотность массовых сил ($\gamma_b = \rho g$), дает гиперболическую систему дифференциальных уравнений относительно искомых функций σ, τ, θ с вещественными характеристиками

$$\lambda_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \operatorname{tg}(\theta + \alpha), \quad \lambda_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = \operatorname{tg}(\theta - \alpha), \quad (8)$$

где угол α здесь связан с углом ψ соотношением

$$\cos 2\alpha = -\sin \psi. \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} + \pi m, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

На характеристиках первого семейства $dy/dx = \operatorname{tg}(\theta + \alpha)$ выполняется следующая зависимость между дифференциалами величин θ, σ, y (y — ордината выбранной точки):

$$2d\theta + \frac{\sin 2\alpha d\sigma}{\sigma \cos 2\alpha + \tau_s} - \gamma_b \frac{\cos(\theta - \alpha)}{(\sigma \cos 2\alpha + \tau_s)(\theta + \alpha)} dy = 0. \quad (10)$$

На характеристике второго семейства с уравнением $dy/dx = \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$ выполняется аналогичная связь

$$2d\theta - \frac{\sin 2\alpha d\sigma}{\sigma \cos 2\alpha + \tau_s} - \gamma_b \frac{\cos(\theta + \alpha)}{(\sigma \cos 2\alpha + \tau_s)(\theta - \alpha)} dy = 0. \quad (11)$$

Из (10), (11) следует, что эти выражения не являются полными дифференциалами, т. е. для интегрирования необходимо задавать пути интегрирования. Отметим, что угол α выражается через угол ψ с помощью (9), причем $\alpha \geq \pi/4$ при $m = 0$.

Решение задачи о внедрении жесткого клина в жесткопластическую весомую среду. Исходная ситуация изображена на рис. 2.

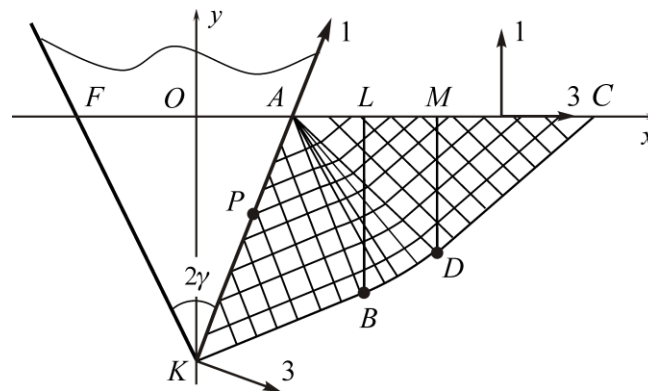


Рис. 2. Жесткий клин с гладкой гранью KA и углом раствора при вершине K , равном 2γ . Области KAB, DAC — области равномерного напряженного состояния, область BAD представляет собой центрированное поле

Здесь представлены жесткий клин, области равномерного напряженного состояния KAB и ADC , центрированное поле BAD . На этом же рисунке расставлены направления главных осей в каждой из областей. На границе AC , свободной от напряжений, $\sigma_n = 0$, поэтому 1-е главное

направление на AC совпадает с направлением нормали \vec{n} , вдоль 3-го главного направления, совпадающего с осью x , напряжение σ_3 — сжимающее ($\sigma_3 < 0$). На границе KA в треугольнике KAB нормальное напряжение σ_n сжимающее и по абсолютной величине должно превосходить сжимающее напряжение вдоль направления KA . Поэтому направление 1 совпадает с направлением KA , направление 3 в треугольнике KAB ортогонально AK . Таким образом значение угла θ в треугольнике ADC равно $\pi/2$, значение θ в треугольнике KAB равно $\pi/2 - \gamma$.

Прежде, чем приступить к решению задачи, приведем несколько формул, которые потребуются в дальнейшем. Рассмотрим рис. 2. Пусть глубина проникания клина $OK = H$, тогда

$$\begin{aligned} AK &= H / \cos \gamma, \quad AP = H / (2 \cos \gamma), \quad AB = AP / \cos \alpha, \\ AB &= H / (2 \cos \alpha \cos \gamma), \quad LB = AB \cos(\alpha - \gamma), \\ OK - LB &= H \cos(\alpha + \gamma) / (2 \cos \alpha \cos \gamma). \end{aligned} \quad (12)$$

Расчеты начнем вести с границы AC полуплоскости $y \leq 0$. За исходную точку возьмем точку C . На границе AC выполняется условие пластичности (6), (9)

$$\tau = \tau_s + \sigma \cos 2\alpha. \quad (13)$$

В точке C $\sigma_1 = 0$, поэтому

$$\tau = -\frac{\sigma_3}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_3}{2}, \quad \sigma_3 = -\frac{\tau_s}{\cos^2 \alpha}. \quad (14)$$

Двигаемся по характеристике CD вниз (ее уравнение совпадает с (8)). Вдоль нее справедливо (11). Полагаем здесь $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$. Тогда

$$d\sigma = -\gamma_b \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha \sin 2\alpha} dy = \gamma_b \frac{dy}{2 \cos^2 \alpha}.$$

Отсюда находим

$$\sigma_D = \sigma_C + \gamma_b \frac{y_D - y_C}{2 \cos^2 \alpha} = -\frac{\tau_s}{\cos^2 \alpha} - \gamma_b \frac{MD}{2 \cos^2 \alpha}, \quad (15)$$

где MD — глубина, на которой находится точка D ($MD \geq 0$). Из (15) устанавливаем, что давление σ в точке D по абсолютной величине больше, чем в точке C .

Дальнейшее движение осуществляется по дуге BD централизованного поля BAD . Для его описания вводятся полярные координаты ρ, χ с полюсом в точке A :

$$x - x_A = \rho \cos \chi, \quad y = \rho \sin \chi. \quad (16)$$

Учитывая, что угол χ на границе AD равен $-(\pi/2 - \alpha)$, значение угла $\theta = \pi/2$, а на границе AB угол $\chi = -(\pi/2 - \alpha) - \gamma$, значение $\theta = \pi/2 - \gamma$, то из этих соображений можно связать значения углов χ и θ соотношением

$$\chi = \theta - \pi + \alpha. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь характеристики (8) и соотношения на них (10), (11) в системе координат (16).

Имеем в соответствии с (16)

$$dx = d\rho \cos \chi - \rho \sin \chi d\chi, \quad dy = d\rho \sin \chi + \rho \cos \chi d\chi. \quad (18)$$

С применением (17), (18) получаем, что характеристики первого семейства (8) вырождаются в уравнения $d\chi = 0$ или $d\theta = 0$ ($\theta = \text{const}$), что соответствует уравнениям лучей на рис. 2 в криволинейном треугольнике BAD . Другое семейство характеристик (8) преобразуется в уравнение

$$\sin 2\alpha d\rho + \rho \cos 2\alpha d\theta = 0,$$

интегралом которого служит выражение

$$\rho = \rho_0 e^{-\text{ctg}2\alpha(\theta-\theta_0)}, \quad (19)$$

где ρ_0 — значение полярного радиуса ρ при $\theta = \theta_0$.

Далее рассматриваем дугу BD в треугольнике BAD . Значение AB согласно (12) равняется следующей величине

$$AB = \frac{H}{2 \cos \gamma \cos \alpha} = \rho_0.$$

При этом угол $\theta_0 = \pi/2 - \gamma$. Если подставить эти значения в (19) и положить $\theta_0 = \pi/2$, то получим значение AD

$$AD = \frac{H}{2 \cos \gamma \cos \alpha} e^{-\gamma \text{ctg}2\alpha}.$$

Видно, что значение AD больше по величине значения AB , потому что $\alpha \geq \pi/4$ ($\text{ctg}2\alpha < 0$).

Рассмотрим теперь соотношение на второй характеристике (8) — соотношение (11). Для его выражения найдем дифференциал dy . Согласно (16), (18), (19) получаем

$$dy = \frac{\rho \sin(\theta - \alpha)}{\sin 2\alpha} d\theta.$$

Тогда соотношение (11) преобразуется в следующее

$$\text{tg}2\alpha \cdot d[\sigma \cos 2\alpha + \tau_s] - 2[\sigma \cos 2\alpha + \tau_s] d\theta + \gamma_b \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin 2\alpha} \rho d\theta = 0, \quad (20)$$

В этом уравнении величину $\sigma \cos 2\alpha + \tau_s$ можно считать функцией параметра θ . Тогда уравнение можно переписать как

$$[\sigma \cos 2\alpha + \tau_s]'_{\theta} - 2\text{ctg}2\alpha[\sigma \cos 2\alpha + \tau_s] + \gamma_b \text{ctg}2\alpha \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin 2\alpha} \rho = 0.$$

Видно, что это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно искомой функции $\sigma \cos 2\alpha + \tau_s$. Решение его ищем в виде

$$\sigma \cos 2\alpha + \tau_s = uv.$$

Тогда v удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{v} = 2\text{ctg}2\alpha d\theta.$$

Отсюда $v = e^{2\theta \text{ctg}2\alpha}$ и для определения u получаем следующее дифференциальное уравнение

$$u' = -\gamma_b \frac{\cos 2\alpha \rho_0 e^{\theta_0 \text{ctg}2\alpha} \cos(\theta + \alpha) e^{-3\theta \text{ctg}2\alpha}}{\sin^2 2\alpha}.$$

Оно интегрируется [15]. Его интегралом служит выражение

$$u = -\gamma_b \frac{\cos 2\alpha \rho_0 e^{\theta_0 \text{ctg}2\alpha} e^{-3\theta \text{ctg}2\alpha}}{\sin^2 2\alpha (1 + 9\text{ctg}^2 2\alpha)} [\sin(\theta + \alpha) - 3\text{ctg}2\alpha \cos(\theta + \alpha)] + C,$$

где C — произвольная постоянная. Поэтому находим

$$\sigma \cos 2\alpha + \tau_s = uv = -\gamma_b \frac{\cos 2\alpha \rho_0 e^{-\text{ctg}2\alpha(\theta-\theta_0)}}{\sin^2 2\alpha + 9\cos^2 2\alpha} [\sin(\theta + \alpha) - 3\text{ctg}2\alpha \cos(\theta + \alpha)] + Ce^{2\text{ctg}2\alpha\theta}. \quad (21)$$

Для определения константы C в (21) используем условие (15), которое трансформируется в

$$\sigma \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sigma_D = -\frac{\tau_s}{\cos^2 \alpha} - \gamma_b \frac{MD}{2\cos^2 \alpha}.$$

Тогда выражение для константы C будет следующим:

$$C = e^{-\pi \operatorname{ctg} 2\alpha} \left[\tau_s \operatorname{tg}^2 \alpha + \gamma_b \frac{\cos 2\alpha AD (\cos \alpha + 3 \operatorname{ctg} 2\alpha \sin \alpha)}{\sin^2 2\alpha + 9 \cos^2 2\alpha} - \gamma_b \frac{MD}{2 \cos^2 \alpha} \right], \quad (22)$$

где AD и MD — отрезки, указанные на рис. 2. Зная константу C из (22), с применением (21) находим значение σ в точке B .

Теперь движемся по отрезку BK на рис. 2. Здесь (как и во всем треугольнике KAB) полагаем $\theta = \pi/2 - \gamma$, т. е. константой. Используем вторую из характеристик (8) — прямую с угловым коэффициентом $\operatorname{ctg}(\gamma + \alpha)$. На этой характеристике при условии $\theta = \pi/2 - \gamma$ из (11) получаем

$$d\sigma \cdot \sin 2\alpha = \gamma_b \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos(\alpha + \gamma)} dy.$$

С учетом этого выражения

$$\sigma_K - \sigma_B = \frac{\gamma_b}{\sin 2\alpha} \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos(\alpha + \gamma)} (y_K - y_B), \quad (23)$$

где $y_K - y_B = -(OK - LB) = -(H \cos(\alpha + \gamma)) / (2 \cos \alpha \cos \gamma)$ согласно (12).

На границе KA предполагаем, что трение отсутствует, т. е. контактная площадка — главная площадка и, кроме того, выполняется условие пластичности (6)

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_s + \cos 2\alpha \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Здесь считается, что $(\sigma_1 + \sigma_3)/2 = \sigma_K$. Отсюда находим выражения σ_1, σ_3 из решения системы

$$\begin{cases} \sigma_1 \sin^2 \alpha - \sigma_3 \cos^2 \alpha = \tau_s, \\ \sigma_1 + \sigma_3 = 2\sigma_K \end{cases}$$

в виде

$$\sigma_1 = \tau_s + 2\sigma_K \cos^2 \alpha, \quad \sigma_3 = -\tau_s + 2\sigma_K \sin^2 \alpha.$$

Напряжение σ_3 — нормальное напряжение на KA . Оно зависит от глубины на которой находится произвольно выбранная промежуточная точка P на грани KA клина, причем, как видно из предыдущих вычислений, это напряжение изменяется линейно с глубиной. Чтобы найти силу, которую требуется приложить к грани KA , надо вычислить интеграл от σ_3 по всей границе KA , т. е. умножить σ_3 на дифференциал длины $dl = dh / \cos \gamma$ и взять интеграл в пределах от $h = 0$ до $h = H$. Величина силы в направлении оси y вычисляется как $2F_3 / \sin \gamma$.

ВЫВОДЫ

Решена задача о внедрении жесткого клина в весомую горную породу. Получено решение предела нагрузки, зависящей от угла при вершине клина, глубины внедрения и параметров горной породы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Anisimov A. N. and Khromov A. I. The Introduction of a Wedge into Half-space Subject to the Coulomb – Mohr Fluidity, Bulletin of the Samara State Technical University, Series: Physics and Mathematics, 2007, no. 1 (14), pp. 44–49. (in Russian) [Анисимов А. Н., Хромов А. И. Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона – Мора // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 1 (14). — С. 44–49.]
2. Davydov D. V. and Myasninkin Yu. M. On the Introduction of Bodies into a Rigid Plastic Medium, Bulletin of Voronezh State University, Series: Physics. Mathematics, 2009, no. 1, pp. 94–100. (in Russian) [Давыдов Д. В., Мяснинкин Ю. М. О внедрении тел в жесткопластическую среду // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 94–100.]

3. **Bukhanko A. A. and Khromov A. I.** Deformation fields during the introduction of wedge-shaped and flat stamps, *Far Eastern Mathematical Journal*, 2002, part 3, no. 2, pp. 311–319. (in Russian) [**Буханько А. А., Хромов А. И.** Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // *Дальневост. матем. журн.* — 2002. — Ч. 3. — № 2. — С. 311–319.]
4. **Karaulov A. M. and Korolev K. V.** On the Determination of the Maximum Earth Pressure on Retaining Walls, *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 2015, vol. 52, no. 4, pp. 175–180. [**Караулов А. М., Королев К. В.** К вопросу определения предельного давления грунта на подпорные стенки // *Основания, фундаменты и механика грунтов.* — 2015. — № 4. — С. 2–5.]
5. **Sher E. N. and Efimov V. P.** 3D modeling of fracture growth in solid under the penetration of rigid wedge, *Journal of Mining Science*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 1108–1112. [**Шер Е. Н., Ефимов В. П.** Трехмерное моделирование развития трещины в твердом теле при внедрении жесткого клина // *ФТПРПИ.* — 2015. — № 6. — С. 43–48.]
6. **Danilov B. B. and Smolyanitsky B. N.** Promising trends in the area of directional drilling devices for hard rocks, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2016, vol. 3, no. 2, pp. 54–59. (in Russian) [**Данилов, Б. Б., Смоляницкий Б. Н.** Перспективные направления создания технических средств для направленного бурения скважин в прочных горных породах // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2016. — Т. 3. — № 2. — С. 54–59.]
7. **Sokolovsky V. V.** *Theory of Plasticity*, Moscow: High School, 1969. (in Russian) [**Соколовский В. В.** Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.]
8. **Thomas Tracy Y.** *Plastic flow and fracture in solids*, New York-London, Acad. press, 1961, 308 pp. [**Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. — М.: Мир, 1964. — 308 с.]
9. **Hill R.** *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, England, Chapter XII, 1950. [**Хилл Р.** Математическая теория пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 407 с.]
10. **Anisimov A. N., Egorova Yu. G., and Khromov A. I.** Rigid-plastic analysis of the cutting problem under the Coulomb-Mohr yield condition, *Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 2, pp. 132–138. (in Russian) [**Анисимов А. Н., Егорова Ю. Г., Хромов А. И.** Жесткопластический анализ задачи о резании при условии текучести Кулона–Мора // *Проблемы прочности и пластичности.* — 2015. — Т. 77. — № 2. — С. 132–138.]
11. **Korolev K. V. and Karaulov L. M.** On the determination of the ultimate load in elastoplastic calculations of pound bases by the finite element method, *Scientific-practical and theoretical problems of geotechnics. Interuniversity thematic collection works*, SPbGASU, SPb, 2007, pp. 201–207. (in Russian) [**Королев К. В., Караулов Л. М.** Об определении предельной нагрузки в упругопластических расчетах фунтовых оснований методом конечных элементов // *Научно-практические и теоретические проблемы геотехники: Межвуз. тематический сб. трудов, СПбГАСУ.* — 2007. — С. 201–207.]
12. **Soloviev Yu. I. and Karaulov A. M.** Ultimate pressure of a road embankment on a weak foundation, *Transport construction*, 1977, no. 7, pp. 42–43. (in Russian) [**Соловьев Ю. И., Караулов А. М.** Предельное давление дорожной насыпи на слабое основание // *Транспортное строительство.* — 1977. — № 7. — С. 42–43.]
13. **Berezantsev V. G.** *Calculation of the Foundations of Structures*, Leningrad, Stroyizdat, 1970, 208 pp. (in Russian) [**Березанцев В. Г.** Расчет оснований сооружений. — Л.: Стройиздат, 1970. — 208 с.]
12. **Berezantsev V. G.** *The Axisymmetric Problem of the Theory of Limit Equilibrium of a Granular Medium*, Moscow, GITL, 1952, 120 pp. (in Russian) [**Березанцев В. Г.** Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. — М.: ГИТЛ, 1952. — 120 с.]
15. **Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M.** *Table of Integrals, Series, and Products*, New York, Academic Press, 1965, 1160 pp. [**Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.]