

УДК 534.211

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В СРЕДЕ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Е. Ю. Витохин, М. Б. Бабенков

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
Петра Великого, 195251 Санкт-Петербург, Россия  
E-mails: evitokhin@yandex.ru, babenkov.michail@gmail.com

С учетом конечной скорости распространения тепловых волн и с использованием численного алгоритма на основе метода конечных разностей рассматривается задача термоупругости о лазерном воздействии на металлы и диэлектрики. Полученное численное решение сопоставляется с аналитическим. Задача решается в связанной и несвязанной постановках. Решения гиперболической задачи термоупругости сравниваются с решениями классической задачи. Получены аналитические выражения для скоростей распространения составляющих термоупругой волны. Определены моменты времени, в которые можно экспериментально зафиксировать различия решений гиперболической и классической задач термоупругости.

**Ключевые слова:** гиперболическая задача термоупругости, закон Максвелла — Каттанео, релаксация теплового потока, метод конечных разностей.

DOI: 10.15372/PMTF20160318

**Введение.** В настоящее время при решении задач термоупругости для описания процессов переноса тепла в основном используется параболическое уравнение теплопроводности, получаемое на основе закона Фурье

$$\mathbf{h} = -\lambda \nabla T,$$

где  $\mathbf{h}$  — вектор теплового потока;  $\lambda$  — теплопроводность;  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $T$  — температура. Однако использование данного закона не позволяет учесть конечную скорость распространения тепла [1], необходимую при исследовании некоторых задач [2] или процессов, протекающих с большой скоростью, высокой частотой или на микромасштабах, например при кратковременном лазерном воздействии на материал.

В работах [3–5] предложен обобщенный закон Фурье с учетом времени релаксации теплового потока  $\tau$ :

$$\tau \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} = -\lambda \nabla T. \quad (1)$$

Наличие в этом законе времени релаксации теплового потока означает, что тепло в среде распространяется не мгновенно, а с некоторой задержкой, величину которой этот параметр определяет.

Согласно теоретическим оценкам диапазон значений времени релаксации теплового потока широк, согласно квантово-механическим расчетам время релаксации теплового потока в металлах составляет порядка  $10^{-12}$  с [6]. В работах [7–9] приводятся данные о времени релаксации теплового потока для металлов, сверхпроводников и полупроводников  $\tau = 10^{-6} \div 10^{-12}$  с.

Диапазон значений времени релаксации теплового потока, полученных экспериментально, также широк. В [10] определено время релаксации теплового потока для песка  $\tau = 20$  с, для  $\text{NaHCO}_3$  (сода)  $\tau = 28,7$  с, в работе [11] приведены результаты испытаний для песка  $\tau = 2,26$  с, для  $\text{NaHCO}_3$   $\tau = 0,66$  с. В [12] получены данные для золота при различных типах рассеяния:  $\tau = 12,0; 1,52$  пс соответственно для фонон-фононного и электрон-фононного рассеяния. Согласно экспериментальным данным [13, 14] время релаксации теплового потока для металлов составляет десятки наносекунд.

Таким образом, диапазон значений  $\tau$  очень широк, кроме того, результаты экспериментов плохо согласуются с теоретическими оценками [6]. Этим обусловлен интерес к исследованию зависимости решения гиперболического уравнения теплопроводности от времени релаксации теплового потока.

В случае недеформируемой среды уравнение теплопроводности получается из уравнения баланса энергии:

$$\rho \dot{U} = -\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q, \quad (2)$$

где  $U$  — массовая плотность внутренней энергии;  $\rho$  — плотность;  $q$  — массовая плотность внутренних источников тепла.

При незначительном отклонении температуры от отсчетного (начального) значения выражение для массовой плотности внутренней энергии имеет вид

$$U = c_v \tilde{T}, \quad \tilde{T} = T - T^*, \quad (3)$$

где  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $T^*$  — температура, при которой определены параметры системы.

Подставляя (1), (3) в уравнение баланса энергии (2), получаем уравнение теплопроводности

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v (\dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}}) = \rho (q + \tau \dot{q}), \quad (4)$$

также называемое уравнением Максвелла — Каттанео. Уравнение (4) является гиперболическим и описывает волновой характер распространения тепла в среде.

При решении классической задачи термоупругости часто рассматривается полусвязанная задача, в которой сначала находится решение уравнения теплопроводности, затем найденное значение температуры подставляется в уравнение динамики для определения механических характеристик состояния среды [15]. При воздействиях с малой скоростью использование данного способа позволяет получить удовлетворительные результаты, поскольку в этом случае динамика среды незначительно влияет на распространение тепла. При кратковременных импульсных воздействиях важно учитывать гиперболичность уравнения теплопроводности и взаимовлияние температуры и деформации. В этом случае задачу термоупругости необходимо рассматривать в связанной постановке.

Сформулируем уравнения связанной задачи термоупругости. Представим уравнения движения в локальной форме

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений;  $\mathbf{f}$  — вектор массовой плотности объемных сил;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений. В соответствии с законом Дюамеля — Неймана выражение для напряжений запишем следующим образом:

$$\sigma = (K_{iz} - 2G/3)\varepsilon E + 2Ge - \alpha K_{iz} \tilde{T} E. \quad (6)$$

Здесь  $K_{iz}$  — изотермический модуль объемного сжатия;  $G$  — модуль сдвига;  $\varepsilon$  — след тензора деформаций;  $E$  — единичный тензор;  $\alpha$  — температурный коэффициент объемного расширения;  $e$  — тензор деформаций. Геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon = \text{tr } e = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad e = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2. \quad (7)$$

Подставляя выражение для тензора напряжений (6) в уравнение (5), получаем уравнение движения в перемещениях

$$G \Delta \mathbf{u} + (K_{iz} + G/3) \nabla \varepsilon - \alpha K_{iz} \nabla \tilde{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (8)$$

Вычисляя дивергенцию уравнения (8), находим

$$(K_{iz} + 4G/3) \Delta \varepsilon - \alpha K_{iz} \Delta \tilde{T} = \rho \ddot{\varepsilon}. \quad (9)$$

С учетом деформируемости среды уравнение теплопроводности гиперболического типа принимает вид [16–21]

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v (\dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}}) = \alpha K_{iz} T^* (\dot{\varepsilon} + \tau \ddot{\varepsilon}) + \rho (q + \tau \dot{q}). \quad (10)$$

Уравнения (8), (10), являющиеся уравнениями связанной гиперболической задачи термоупругости, отличаются от классических уравнений наличием вторых производных по времени от температуры и объемной деформации в уравнении теплопроводности (10). Уравнения несвязанной гиперболической задачи термоупругости получаются из (8), (10), если в (10) коэффициент теплового расширения  $\alpha$  положить равным нулю.

При чрезвычайно коротких лазерных импульсах (порядка пикосекунд) на микромасштабах равновесие между электронами и решеткой в металлах нарушается, при этом перенос тепла осуществляется посредством электронного газа. В таких случаях для описания процессов теплопереноса используется закон Фурье для решетки и электронного газа [22]

$$c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T_e) - C(T_e - T_l); \quad (11)$$

$$c_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = C(T_e - T_l), \quad (12)$$

где  $T_e$ ,  $T_l$  — температуры электронного газа и кристаллической решетки соответственно;  $C$  — константа;  $c_e$ ,  $c_l$  — удельные теплоемкости электронного газа и решетки. Из (12), (11) следует

$$\Delta T_l + \frac{c_l}{C} \frac{\partial \Delta T_l}{\partial t} = \frac{c_l + c_e}{\lambda} \frac{\partial T_l}{\partial t} + \frac{c_e c_l}{\lambda C} \frac{\partial^2 T_l}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Полагая в (13) слагаемое с производной от лапласиана температуры и второй производной по времени от температуры равным нулю, получаем классическое уравнение теплопроводности. Если предположить, что в (13) равна нулю только производная от лапласиана температуры, получим уравнение Максвелла — Каттанео (4), если считать равной нулю только вторую производную от температуры, получим уравнение теплопроводности типа уравнения Грина — Нагди [23].

В диэлектриках, в отличие от металлов, процессы теплопереноса на наномасштабах имеют более сложный характер, и проблема применимости уравнения (11) для описания теплопроводности в таких средах не решена. Поэтому в настоящей работе в основном исследуются тепловые эффекты в металлах. Также недостаточно изученным является вопрос о различии решений гиперболической и классической задач термоупругости при различных временах релаксации теплового потока и способах приложения внешней нагрузки. Кроме того, является актуальным вопрос о целесообразности использования решения

несвязанной задачи термоупругости при описании процессов с высокой скоростью нагрева материала.

**1. Численное решение гиперболической задачи термоупругости.** Рассмотрим одномерную задачу, в которой волны распространяются вдоль координаты  $x$ . В этом случае система уравнений (9), (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \alpha K_{iz} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} &= \frac{\rho c_v}{\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2}\right) + \frac{T^* \alpha K_{iz}}{\lambda} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right) + \frac{\rho}{\lambda} \left(q + \tau \frac{\partial q}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Для численного решения (14) используется метод конечных разностей, для реализации которого создана программа в среде Delphi.

Для обеспечения лучшей сходимости систему (14) запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2} - b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + d \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + a \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + d \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}\right) + c \left(q^* + d \frac{\partial q^*}{\partial \theta}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\zeta$ ,  $s$ ,  $\theta$ ,  $q^*$  — температура, координата, время, частота и источниковый член соответственно, записанные в безразмерном виде:

$$\zeta = \alpha \tilde{T}, \quad s = \frac{c_v}{\lambda} \sqrt{\rho \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right)} x, \quad \theta = \frac{c_v}{\lambda} \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right) t,$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — безразмерные коэффициенты:

$$a = \frac{c_p - c_v}{c_v}, \quad b = \frac{1}{1 + (4/3)G/K_{iz}}, \quad c = \frac{\alpha \lambda}{c_v^2 (K_{iz} + 4G/3)}, \quad d = \frac{\tau c_v}{\lambda} \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right).$$

Очевидно, что в случае использования классической теории теплопроводности при  $\tau = 0$  параметр  $d = 0$ .

Система (15) решается с использованием метода конечных разностей и явной схемы интегрирования

$$f' = \frac{f_{i-1} - f_{i+1}}{2w}, \quad f'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{w^2} \quad (16)$$

( $w$  — шаг интегрирования).

Данная схема имеет второй порядок точности. Для повышения точности и улучшения сходимости метода можно также использовать схему четвертого порядка точности

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12w}, \\ f'' &= \frac{1}{w^2} \left(-\frac{1}{12} f_{i-2} + \frac{4}{3} f_{i-1} - \frac{5}{2} f_i + \frac{4}{3} f_{i+1} - \frac{1}{12} f_{i+2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Для аппроксимации производных по времени в системе (15) используются конечные разности вида (16), а для повышения порядка точности производные по пространству аппроксимируются соотношениями (17). Шаг по пространству  $h$  задается фиксированным, шаг по времени  $\Delta t$  находится из условия Куранта

$$\Delta t \ll h/c_{ac}, \quad c_{ac} = \sqrt{(K_{iz} + 4G/3)/\rho}, \quad (18)$$

где  $c_{ac}$  — скорость звука в среде.

**2. Решение тестовой задачи о распространении термоупругих волн в полупространстве.** Оценим погрешность результата численного расчета. Для этого сравним численное решение тестовой задачи с ее аналитическим решением.

Рассмотрим термоупругое полупространство, на границе которого создается гармоническое возмущение и поддерживается постоянная температура  $T^*$  (температура, при которой определены параметры). Граничные условия имеют вид

$$\tilde{T}(0, t) = 0, \quad u(0, t) = u_0 \sin(\Omega t).$$

Подвод тепла от внешних источников отсутствует, распространение термоупругих волн в полупространстве описывается системой (14), в которой  $q = 0$ . Установившееся решение данной задачи имеет вид [15, 24]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 e^{-\gamma_a x} (a_1 \cos(\Omega t - \delta_h x) + a_2 \sin(\Omega t - \delta_h x)) + \\ &\quad + u_0 e^{-\gamma_h x} (a_3 \cos(\Omega t - \delta_a x) + a_4 \sin(\Omega t - \delta_a x)), \\ \tilde{T}(x, t) &= u_0 e^{-\gamma_a x} (b_1 \cos(\Omega t - \delta_h x) + b_2 \sin(\Omega t - \delta_h x)) - \\ &\quad - u_0 e^{-\gamma_h x} (b_2 \cos(\Omega t - \delta_a x) + b_1 \sin(\Omega t - \delta_a x)), \end{aligned} \tag{19}$$

где  $\gamma_a, \gamma_h$  — коэффициенты затухания;  $a_i, b_i, \delta_a, \delta_h$  ( $i = 1, 2$ ) — константы, определенные в [24].

Для численного решения данной задачи полупространство представим в виде бесконечной полосы с произвольными краевыми условиями на правой границе. Начальные условия будем считать однородными.

Проведем сравнение численного решения с аналитическим. Поскольку аналитическое решение (19) является установившимся и получено для полупространства, а численное находится при заданных начальных условиях в полосе конечной ширины, будем рассматривать такие времена расчета, при которых влияние начальных условий несущественно и волны не успевают достигнуть правой границы (рис. 1).

Введем относительную погрешность численного решения

$$P(f_{num}, f_{an}) = \frac{\|f_{an} - f_{num}\|}{\|f_{an}\|} \cdot 100 \%,$$

где  $f_{an}$  — аналитическое решение;  $f_{num}$  — численное решение.

Определим норму  $\|\cdot\|$  функции  $f$  в момент времени  $t$  как евклидову норму вектора, компоненты которого равны значениям функции в узлах сетки:

$$\|f\| = \left( \sum_i f_i^2(x^*, t^*) \right)^{1/2}.$$

На рис. 2 видно, что при численном решении погрешность составляет порядка 2 % при шаге по пространству  $h \approx 10$  нм. Измельчение сетки приводит к уменьшению погрешности лишь до определенного предела. На рис. 2 также видно, что результаты численного и аналитического решений хорошо согласуются. Однако разность фаз оказывается существенной и вносит основной вклад в погрешность. Такое различие обусловлено тем, что аналитическое решение (19) является установившимся, а численное решение при малых временах расчета существенно зависит от начальных условий. Следует отметить, что при увеличении времени расчета разность фаз между аналитическим и численным решениями уменьшается. Таким образом, численный алгоритм позволяет решить связанную гиперболическую задачу термоупругости с достаточной степенью точности.

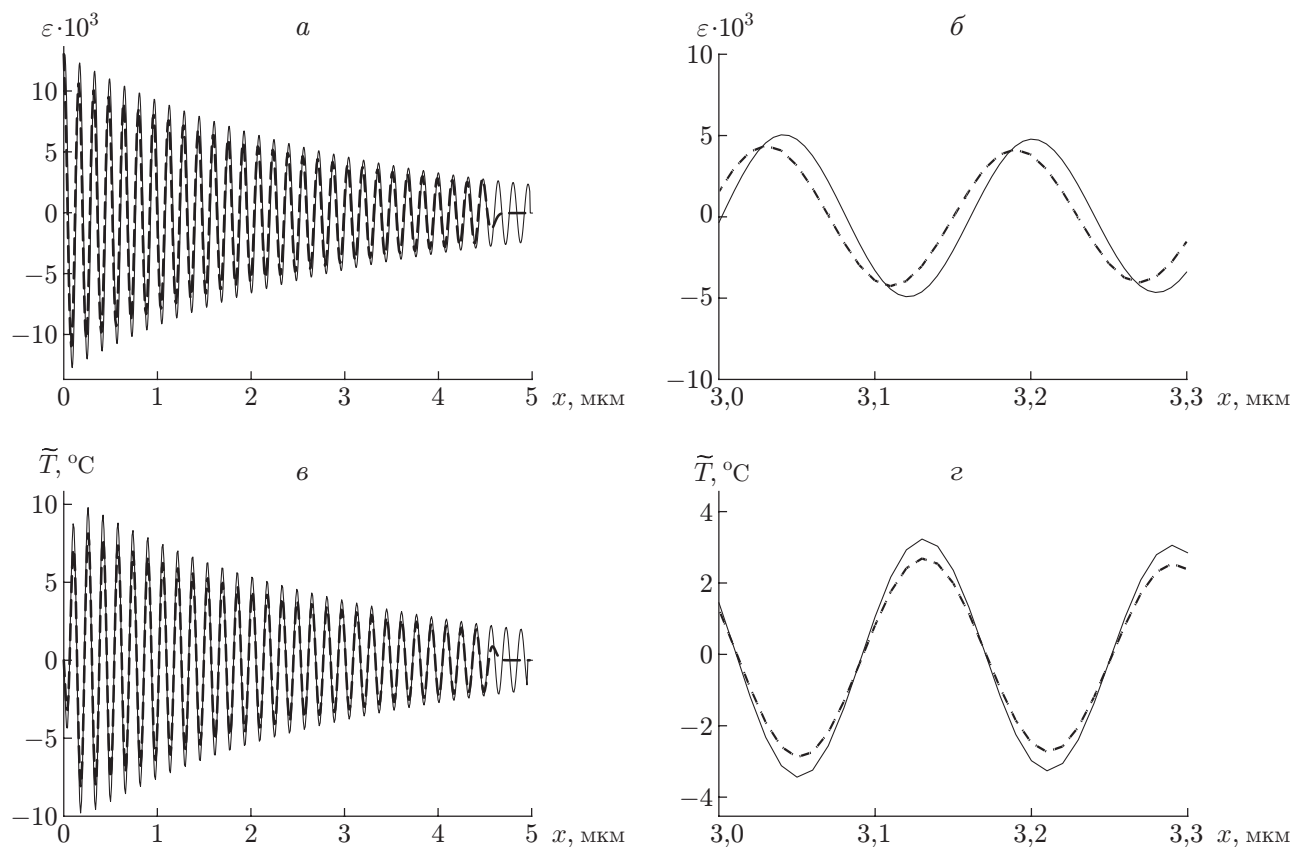


Рис. 1. Распределения деформации (*a*, *б*) и температуры (*в*, *г*) в полосе при  $t = 1$  нс:

*a*, *в* — общий вид, *б*, *г* — фрагмент; штриховая линия — численное решение, сплошная — аналитическое решение

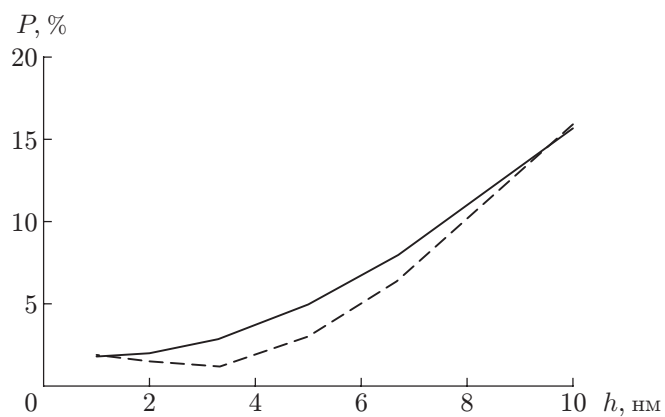


Рис. 2. Зависимости полной относительной погрешности вычисления деформации (сплошная линия) и температуры (штриховая линия) от шага по пространству

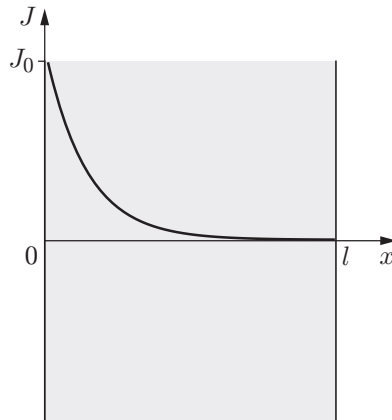


Рис. 3. Зависимость интенсивности лазерного излучения от глубины проникновения для полупрозрачного слоя

**3. Кратковременное лазерное воздействие на материал.** Рассмотрим задачу о лазерном воздействии на слой толщиной  $l$ . На наномасштабном уровне глубина проникновения лазерного излучения в среду может оказаться существенной даже в случае непрозрачных материалов, следовательно, для моделирования поглощения лазерного излучения веществом можно использовать закон Бугера. Согласно этому закону интенсивность параллельного пучка монохроматического света при прохождении через вещество убывает экспоненциально (рис. 3):

$$J(x) = J_0 e^{-\gamma x}.$$

Здесь  $x$  — расстояние от границы слоя;  $J_0$  — интенсивность входящего пучка света;  $\gamma$  — коэффициент поглощения света.

В случае если интенсивность короткого лазерного импульса поглощается средой по закону Бугера, выражение для мощности внутренних источников можно представить в виде

$$q(x, t) = \frac{J_0 \gamma}{\rho} \delta_0 \delta(t) e^{-\gamma x}, \quad E_0 = J_0 \delta_0.$$

Здесь  $\delta_0$  — длительность лазерного воздействия;  $E_0$  — энергия, поглощенная единицей площади поверхности;  $\delta$ -функция аппроксимирует временной профиль короткого лазерного импульса, более точной формой которого является распределение Гаусса. Предполагается, что граница облучается равномерно. Интенсивность поглощенного импульса выбирается таким образом, чтобы отклонение температуры не превышало  $10^\circ\text{C}$  и отклик системы был линейным, коэффициент поглощения — таким образом, чтобы поглощенная часть лазерного импульса полностью затухала при приближении к противоположной границе облучаемого слоя.

Длительность импульса, в гиперболической задаче термоупругости (9), (10) полагаемого коротким, определяется как величина, обратная частоте, на которой дисперсионные кривые [25] близки к асимптотическим. Например, для алюминия при  $\tau = 10^{-11}$  с акустические и тепловые ветви дисперсионных соотношений [24, 25] для коэффициента затухания и фазовых скоростей выходят на асимптотические значения при частоте порядка  $10/\tau = 10^{12}$  Гц, что соответствует длительности импульса  $\tau/10 = 10^{-12}$  с.

Неоднородные уравнения связанной гиперболической задачи термоупругости (9), (10) для температуры и напряжений с учетом распределенных в объеме источников тепла имеют вид

$$\sigma_*'' - \ddot{\sigma}_* - D_1 \ddot{\tilde{T}} = 0; \tag{20}$$

$$\tilde{T}_*'' - (\dot{\sigma}_* + D_3 \ddot{\sigma}_*) - (\dot{\tilde{T}}_* + D_3 \ddot{\tilde{T}}_*) = e^{-\gamma_* x_*} (\delta(t_*) + D_3 \dot{\delta}(t_*)). \tag{21}$$

В уравнениях (20), (21) безразмерные величины  $\sigma_*$ ,  $\tilde{T}_*$ ,  $t_*$ ,  $s_*$  связаны с размерными соотношениями

$$t = k_1 t_*, \quad x = k_2 s_*, \quad \sigma = k_3 \sigma_*, \quad \tilde{T} = k_4 \tilde{T}_*,$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{I\rho^2}{\alpha K_{iz} T_*}}, \quad k_2 = k_1 \sqrt{\frac{K_{iz} + 4G/3}{\rho}}, \quad k_3 = k_2^2, \quad k_4 = \frac{I\rho(K_{iz} + 4G/3)}{3r},$$

$$r = 4c_v \rho G + 3K_{iz}(\alpha^2 K_{iz} T_* + \rho c_v),$$

$$D_1 = \frac{3\alpha^2 K_{iz}^2 T_*}{r}, \quad D_2 = \frac{3\lambda\rho}{k_1 r}, \quad D_3 = \frac{\tau}{k_1}.$$

Начальные условия однородны, на границах слоя, свободных от нагрузок, поддерживается постоянная температура:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_*(0, t_*) = \tilde{T}_*(l_*, t_*) = 0, \quad \sigma_*(0, t_*) = \sigma_*(l_*, t_*) = 0, \\ \tilde{T}_*(s_*, 0) = \dot{\tilde{T}}_*(s_*, 0) = 0, \quad \sigma_*(s_*, 0) = \dot{\sigma}_*(s_*, 0) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

3.1. *Аналитическое решение.* Решая задачу (20)–(22) с использованием метода Гринберга, получаем

$$\tilde{T}_*(s_*, t_*) = \frac{2}{l_*} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_n \sin(s_* \sqrt{\lambda_n}), \quad \sigma_*(s_*, t_*) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{*n} \sin(s_* \sqrt{\lambda_n}). \quad (23)$$

Выражения для трансформант  $\tilde{T}_n(t_*)$ ,  $\sigma_n(t_*)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n &= \frac{\zeta_n H(t_*)}{(D_1 - 1)D_3 D_4} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i (R_i^2 + \lambda_n)(D_3 R_i + 1) \exp(t_* R_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^4 (R_i - R_j)}, \\ \sigma_{*n} &= \frac{D_1 \zeta_n H(t_*)}{(1 - D_1)D_3} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i R_i^2 (D_3 R_i + 1) \exp(t_* R_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^4 (R_i - R_j)}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_n = \pi l_* n (1 - (-1)^n e^{-\gamma_* l_*}) / (\gamma_*^2 l_*^2 + \pi^2 n^2), \quad \lambda_n = \pi^2 n^2 / l_*^2,$$

$R_1, R_2, R_3, R_4$  — корни уравнения четвертой степени:

$$(D_1 - 1)D_3 R^4 + (D_1 - 1)R^3 - (D_3 + D_2)\lambda_n R^2 - \lambda_n R - D_2 \lambda_n^2 = 0.$$

На рис. 4, а–в, 5, а–в представлены решения (23) задачи термоупругости (20)–(22). В случае связанной постановки задачи на зависимости  $\tilde{T}(x)$  (см. рис. 4, а, 5, а) возникает второй минимум, соответствующий квазиакустической составляющей термоупругой волны. При различных значениях параметров задачи в области отрицательных значений  $\tilde{T}$  возможно как наличие минимумов (двух или одного), так и их отсутствие.

Область отрицательных значений  $\tilde{T}$ , соответствующая квазитермической составляющей термоупругой волны, отсутствует, если постоянная релаксации теплового потока меньше некоторого значения  $\tau_2$ . Значение  $\tau_2$  (определяется численно) тем ближе к значению  $\tau_1$ , вычисленному в [26], чем меньше температурный коэффициент  $\alpha$  объемного расширения в среде:

$$\tau_1 = \rho c_v / (4\lambda\gamma^2).$$

Согласно [2] при решении задачи теплопроводности необходимо выбирать область положительных значений отклонения начальной температуры  $\tilde{T}$  от ее отсчетного значения  $T^*$ .



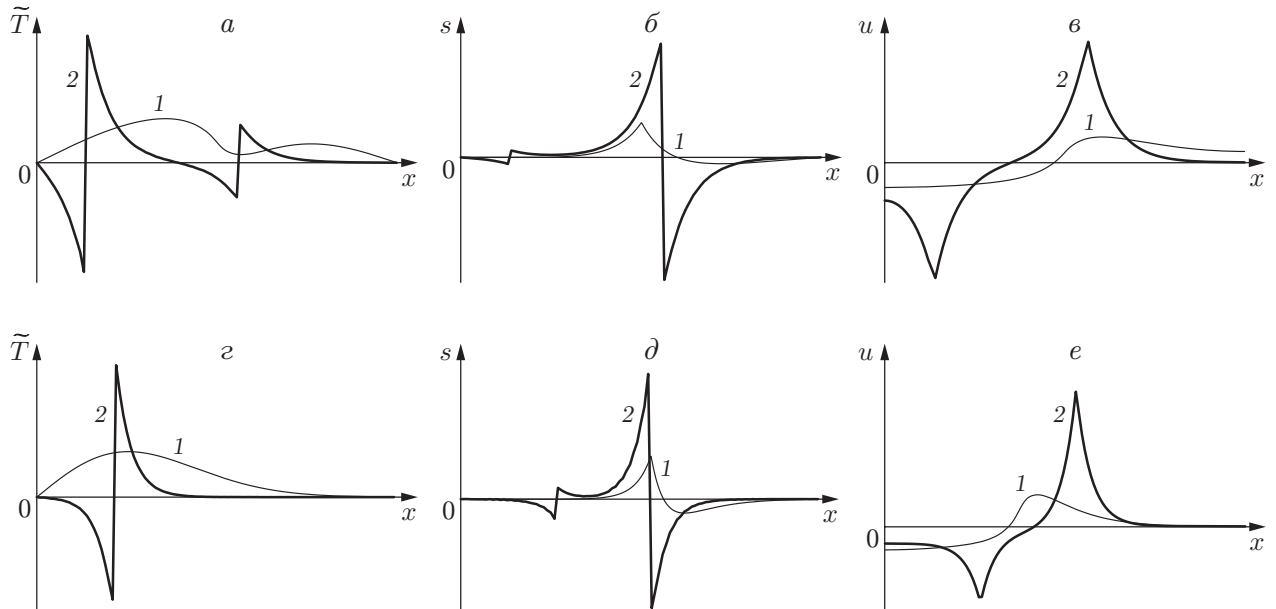


Рис. 4. Зависимости температуры ( $a, г$ ), напряжения ( $б, д$ ) и перемещения ( $в, е$ ) в полосе от координаты  $x$  при  $\tau > \tau_0$ :  
 $a$ - $в$  — задачи термоупругости в связанной постановке,  $г$ - $е$  — задачи в несвязанной постановке; 1 — расчет с помощью классической теории термоупругости, 2 — расчет с помощью гиперболической теории термоупругости

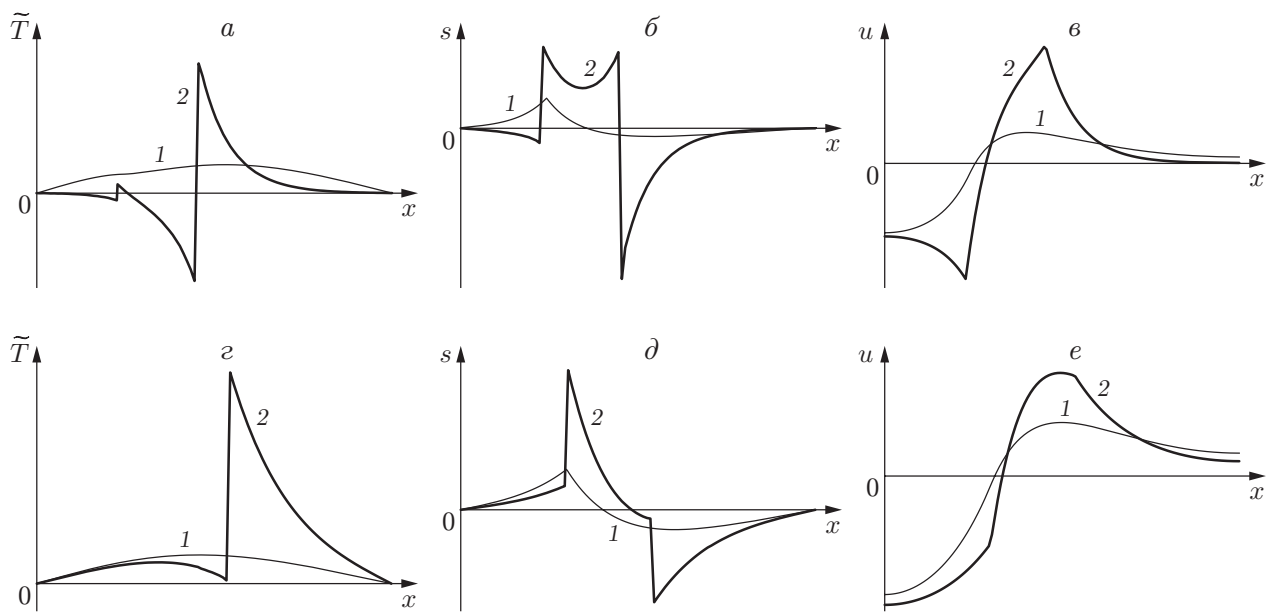


Рис. 5. Зависимости температуры ( $a, г$ ), напряжения ( $б, д$ ) и перемещения ( $в, е$ ) в полосе от координаты  $x$  при  $\tau < \tau_0$  (обозначения те же, что на рис. 4)

Данное требование накладывает ограничение на величину постоянной релаксации теплового потока: в рассмотренной задаче термоупругости  $\tau < \tau_2$ .

Скорости распространения квазитермических и квазиакустических составляющих термоупругой волны в связанной задаче термоупругости находятся следующим образом [24]:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 - a^*}, & C_2 &= \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 + a^*}, \\ a^* &= \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}, \\ A_1 &= \frac{\rho}{K_{iz} + (4/3)G}, & A_3 &= \frac{1}{\lambda} \left( \rho c_v + \frac{\alpha^2 K_{iz} T^*}{1 + (4/3)GK_{iz}^{-1}} \right), \\ A_2 &= \tau A_3, & A_4 &= \frac{1}{1 + \rho c_v (1 + (4/3)GK_{iz}^{-1}) / (\alpha^2 K_{iz} T^*)}. \end{aligned} \quad (24)$$

При этом выполняется соотношение  $C_1 > C_2$ . Значения скорости упругих волн  $c_a$  и скорости тепла  $c_h$  находятся в интервале  $(C_2, C_1)$ .

При  $\tau > \tau_0$ , где величина  $\tau_0$  задается выражением [24]

$$\tau_0 = \frac{\lambda \rho (\rho c_v (K_{iz} + (4/3)G) - \alpha^2 K_{iz}^2 T^*)}{(\rho c_v (K_{iz} + (4/3)G) + \alpha^2 K_{iz}^2 T^*)^2},$$

скорость распространения квазитепловой составляющей термоупругой волны, равная  $C_2$ , меньше скорости распространения квазиакустической составляющей  $C_1$  (см. рис. 4, а-в). При  $\tau < \tau_0$  скорость распространения квазитепловой составляющей термоупругой волны, равная  $C_1$ , больше скорости распространения квазиакустической составляющей термоупругой волны  $C_2$  (см. рис. 5, а-в).

В случае классической теории термоупругости при  $\tau = 0$  значение  $C_1 = \infty$ , а значение  $C_2$  становится равным скорости упругих волн в среде:  $C_2 = c_{ac}$  (см. формулу (18)).

Различие скорости упругих волн  $c_a$  и скорости квазиупругой составляющей термоупругой волны, а также различие скорости тепловых волн  $c_h$  и скорости квазитепловой составляющей термоупругой волны не превышает 2 % (в расчетах использовались термомеханические параметры алюминия как типичного металла; значение постоянной релаксации принималось равным  $\tau = 10^{-11}$  с).

Коэффициенты затухания квазитепловых и квазиакустических составляющих термоупругой волны в связанной задаче (20)–(22) находятся по формулам [24]

$$\gamma_1 = \frac{A_3(a^* - b^*)}{2a^* \sqrt{2(A_1 + A_2 - a^*)}}, \quad \gamma_2 = \frac{A_3(a^* + b^*)}{2a^* \sqrt{2(A_1 + A_2 + a^*)}},$$

где  $a^*$ ,  $b^*$  — константы:

$$a^* = \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}, \quad b^* = A_2 + A_1(2A_4 - 1).$$

При  $\tau < \tau_0$  коэффициенты  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  являются характеристиками затухания квазитермических и квазиакустических составляющих термоупругой волны соответственно, при  $\tau > \tau_0$  — наоборот. В предположении, что температурный коэффициент объемного расширения  $\alpha = 0$ , выполняются соотношения  $\gamma_1 = \gamma^*$ ,  $\gamma_2 = 0$  при  $\tau < \tau_0$  или  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \gamma^*$  при  $\tau > \tau_0$  ( $\gamma^* = \sqrt{c_v \rho / (\lambda \tau)} / 2$  — коэффициент затухания тепловых волн в гиперболической задаче теплопроводности [27]).

**3.2. Численное решение.** Построить временные профили температуры и напряжений, используя аналитическое решение (23), при реальных физических параметрах затруднительно, так как требуется учет большого количества членов ряда. Поэтому анализ результатов решения задачи (20)–(22) при реальных физических параметрах проводился на

Таблица 1

Характеристики квазитермической составляющей температуры  $\tilde{T}$  в меди при  $\gamma = 11,7 \text{ мкм}^{-1}$ ,  $E_0 = 0,15 \text{ Дж/м}^2$  и различных значениях  $t$  и  $\tau$

$t$ , пс	$\tau$ , с	$V_{heat}^{an}$ , м/с	$V_{heat}$ , м/с	$H_{heat}^1$ , °С	$H_{heat}^2$ , °С	$H_p$ , °С
1	$10^{-12}$	10 852	10 960	0,141	0,477	0,349
10	$10^{-11}$	3368	3300	0,052	0,354	0,188
100	$10^{-10}$	1085	1070	-0,110	0,246	0,053
100	$10^{-9}$	343	342	-0,152	0,378	0,053
100	$10^{-8}$	108	111	-0,075	0,463	0,053
100	$10^{-7}$	34	37	-0,030	0,500	0,053
100	$10^{-6}$	11	14	-0,004	0,512	0,053
100	$10^{-2}$	0,1	3	—	0,516	0,053

Примечание.  $V_{heat}$ ,  $V_{heat}^{an}$  — скорости максимумов перемещений, найденные численно и аналитически для случая гиперболической задачи термоупругости,  $H_{heat}^1$ ,  $H_{heat}^2$  — высота первого и второго пиков,  $H_p$  — высота пика для случая параболической задачи термоупругости.

основе численных расчетов для меди и полиэтилена. При  $\tau > \tau_0$  акустический фронт распространяется быстрее теплового, поэтому время расчета и ширина полосы выбирались таким образом, чтобы акустический фронт не успевал достигнуть правой границы расчетной области: ширина полосы  $l = 1 \text{ мкм}$ , время расчета равно  $10^{-10}$  с. В случае если интенсивность лазерного импульса  $E_0 = 0,15 \text{ Дж/м}^2$ , коэффициент затухания сигнала  $\gamma = 11,7 \text{ мкм}^{-1}$ , возбуждающий сигнал полностью затухает при приближении к правой границе полосы.

Используя формулы (24), можно определить скорость распространения волн, возбуждаемых бесконечно коротким импульсом. Поскольку численные расчеты проводились при длительности импульса, приблизительно равной шагу по времени ( $10^{-14}$  с), значения скорости, полученные численно и аналитически, различаются (табл. 1).

Анализ численного решения показывает, что гиперболические характеристики теплопроводности в меди и полиэтилене начинают проявляться при  $\tau \sim 10^{-11}$  с. При данном значении  $\tau$  появляется волновой фронт квазитермической составляющей, а при увеличении  $\tau$  увеличиваются его максимумы. При меньших значениях времени релаксации теплового потока решение гиперболической задачи термоупругости аналогично решению классической задачи термоупругости: вклад вторых производных в уравнение теплопроводности незначителен. В связанной задаче волновой фронт имеет две составляющие: квазитермическую и квазиакустическую (рис. 6, а-в, 7, а-в). При решении задачи термоупругости в несвязанной постановке в температуре отсутствует квазиакустическая компонента, в то время как в напряжениях и деформациях присутствуют обе компоненты. Квазитермическая составляющая температуры достаточно быстро затухает: ее максимальное значение в меди уменьшается в два раза на расстоянии 100 нм от границы, на которой произошло возбуждение. Квазиакустическая составляющая на исследуемом расстоянии 1 мкм затухает незначительно.

При увеличении  $\tau$  уменьшается скорость волнового фронта и увеличиваются максимумы квазитермической составляющей. Данное увеличение обусловлено тем, что при меньшей скорости в один и тот же момент времени волна успевает распространиться на меньшее расстояние и как следствие затухает в меньшей степени. Однако изменение  $\tau$  не оказывает существенного влияния на скорости распространения квазиакустической составляющей и ее затухание. Минимальные и максимальные значения квазиакустиче-

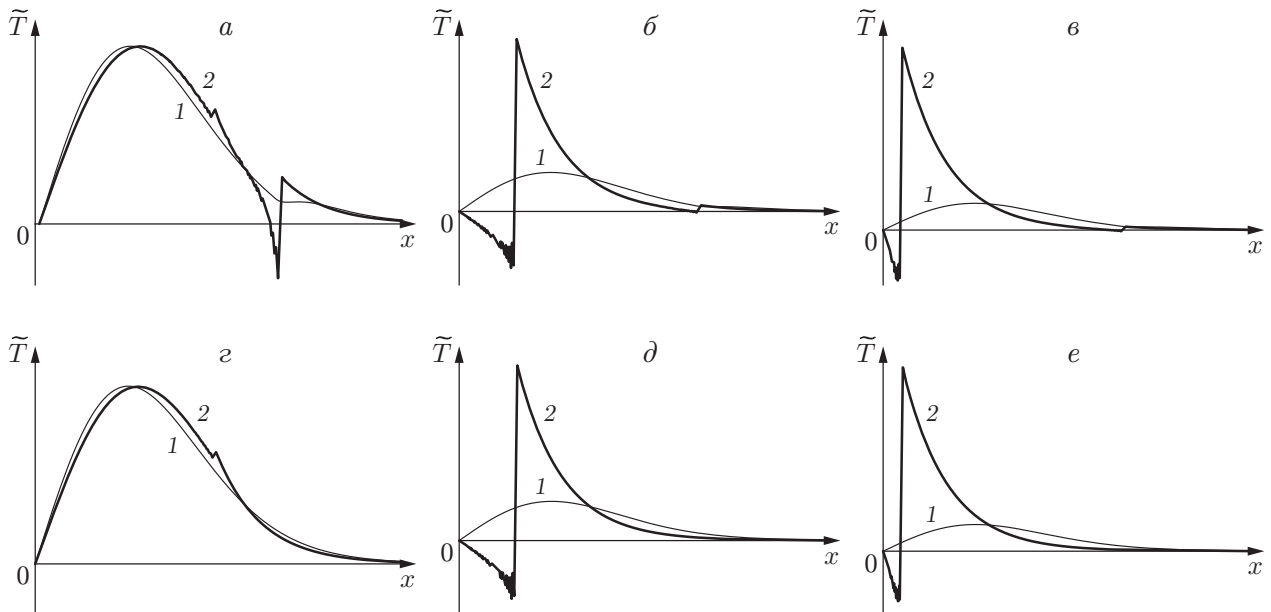


Рис. 6. Зависимости температуры  $\tilde{T}$  в слое меди от координаты  $x \in [0, 10^{-6}]$  м при  $t \approx 10^{-10}$  с,  $\gamma = 11,7$  мкм $^{-1}$ ,  $E_0 = 0,15$  Дж/м $^2$  и различных значениях  $\tau$ : а, г —  $\tau = \tau^*$ , б, д —  $\tau = 10\tau^*$ , в, е —  $\tau = 100\tau^*$  ( $\tau^* = 10^{-11}$  с,  $\tau^* > \tau_0$ , остальные обозначения те же, что на рис. 4)

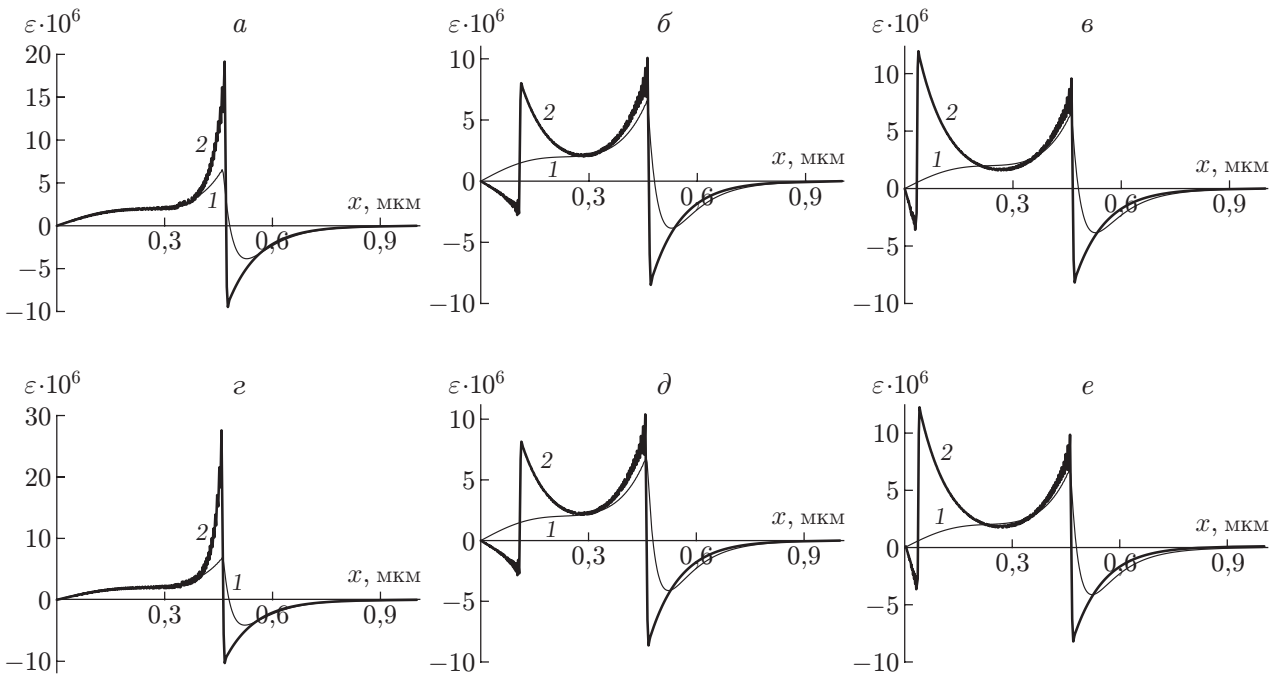


Рис. 7. Зависимости деформации  $\varepsilon$  в слое меди от координаты  $x \in [0, 10^{-6}]$  м при  $t \approx 10^{-10}$  с,  $\gamma = 11,7$  мкм $^{-1}$ ,  $E_0 = 0,15$  Дж/м $^2$  и различных значениях  $\tau$ : а, г —  $\tau = \tau^*$ , б, д —  $\tau = 10\tau^*$ , в, е —  $\tau = 100\tau^*$  ( $\tau^* = 10^{-11}$  с,  $\tau^* > \tau_0$ , остальные обозначения те же, что на рис. 4)

Таблица 2

Характеристики деформации  $\varepsilon$  в меди в случае гиперболической задачи термоупругости при  $t = 10^{-10}$  с,  $\gamma = 11,7$  мкм<sup>-1</sup>,  $E_0 = 0,15$  Дж/м<sup>2</sup> и различных значениях  $\tau$

$\tau$ , с	$H_{heat}^2 \cdot 10^5$	$H_{heat}^1 \cdot 10^6$	$H_{ac}^2 \cdot 10^5$	$H_{ac}^1 \cdot 10^6$
$10^{-11}$	—	—	2,20	-10,1
$10^{-10}$	0,85	-3,71	1,13	-9,0
$10^{-9}$	1,25	-4,99	1,07	-8,7
$10^{-8}$	1,52	-2,44	1,07	-8,7
$10^{-7}$	1,63	-0,99	1,07	-8,7
$10^{-6}$	1,68	-0,13	1,07	-8,7
$10^{-2}$	1,68	—	1,07	-8,7

Примечание.  $H_{heat}^2, H_{heat}^1$  — максимальные и минимальные значения квазитермической составляющей,  $H_{ac}^2, H_{ac}^1$  — максимальные и минимальные значения квазиакустической составляющей.

ской составляющей температуры существенно изменяются при  $\tau \approx 10^{-11}$  с (табл. 2). При  $\tau > 10^{-11}$  с или  $\tau < 10^{-11}$  с зависимость максимумов и минимумов квазиакустической составляющей температуры от времени релаксации теплового потока незначительна.

При малых временах релаксации теплового потока  $\tau < 10^{-11}$  с деформация в меди имеет один четко выраженный волновой фронт — квазиакустический. Квазитермический фронт также присутствует, однако его максимумы значительно меньше, чем у квазиакустической составляющей. Учет механических слагаемых в уравнении теплопроводности не приводит к качественному изменению полей деформаций. При  $\tau < 10^{-11}$  с, когда решение фактически является классическим, максимальные значения квазиакустической составляющей в несвязанной задаче больше приблизительно на 5 %. При больших временах релаксации теплового потока поля деформаций этих двух решений практически идентичны.

В соответствии с законом Дюамеля — Неймана (6) напряжения зависят от деформации и температуры. В полиэтилене при любых  $\tau$  доминирует квазиакустическая составляющая напряжений. В меди картина другая. При  $\tau < 10^{-11}$  с квазитермическая составляющая температуры компенсирует квазитермическую составляющую деформации, вследствие чего в напряжениях в меди и полиэтилене существенна лишь квазиакустическая составляющая. При  $\tau > 10^{-11}$  с квазитермическая составляющая температуры быстро затухает и аналогичная составляющая деформаций ничем не скомпенсирована, вследствие чего напряжения в меди имеют две составляющие: квазиакустическую и квазитермическую.

Метод лазерной термометрии, с помощью которого проводится регистрация нестационарной температуры и теплового потока на поверхности и в объеме образца, позволяет изучать неравновесные процессы теплопереноса с высоким разрешением по времени (порядка  $10^{-12}$  с). При этом разрешающая способность по температуре относительно низкая: 0,3 °С [28].

Проведенное численное исследование показывает, что разность максимумов температуры  $T$  для гиперболической и классической задач термоупругости для меди превышает либо близка к 0,3 °С при всех  $\tau \in [10^{-12}; 10^{-2}]$  с и  $t \approx \tau$  либо  $t < \tau$  (см. табл. 1). Для полиэтилена эта разность значительно меньше 0,3 °С при всех рассмотренных  $\tau$ . Таким образом, учет волновых слагаемых в уравнении теплопроводности приводит к увеличению максимальных значений температуры в меди, которое в указанном диапазоне  $\tau$  может быть зафиксировано современным экспериментальным оборудованием. В полиэтилене такого увеличения не обнаружено.

**Заключение.** Задача гиперболической теплопроводности [26] в бесконечном слое обобщена для связанной гиперболической задачи термоупругости. Установлено, что в отличие от задачи теплопроводности в решении задачи термоупругости могут наблюдаться два участка охлаждения, соответствующие квазитермической и квазиакустической составляющим термоупругого импульса. Скорости распространения каждого из них вычисляются с учетом термомеханических параметров среды по полученным в работе формулам. Измеряя интервал времени между двумя фронтами термоупругой волны, образованной коротким лазерным импульсом, можно оценить коэффициент релаксации теплового потока. Проведено сравнение скоростей волнового фронта составляющих термоупругого импульса для классической связанной модели термоупругости, гиперболической модели теплопроводности и гиперболической несвязанной модели термоупругости.

При исследовании гиперболической задачи теплопроводности для бесконечного слоя, на который воздействует короткий лазерный импульс, при однородных граничных условиях первого рода для температуры вблизи облучаемой поверхности слоя обнаружен участок охлаждения, возникающий только при определенном соотношении постоянной релаксации теплового потока и коэффициента затухания лазерного излучения в среде.

Создана программа, которая позволила найти численное решение гиперболической задачи термоупругости при реальных физических параметрах с помощью метода конечных разностей. Результаты численного решения свидетельствуют о том, что при кратковременном объемном лазерном воздействии в меди разность максимумов температуры для гиперболической и классической задач термоупругости превышает значение  $0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$  при  $t \leq \tau$  и может быть зафиксирована экспериментально. Также установлено, что разность максимумов на волновом фронте квазитермической составляющей также превышает значение  $0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В случае диэлектриков (на примере полиэтилена) такого различия не обнаружено.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Шашков А. Г.** Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. Минск: Наука и техника, 1993.
2. **Жоу Д.** Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.
3. **Cattaneo C.** Sulla coduzione del calone // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1948. N 3. P. 83.
4. **Cattaneo C.** A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1958. V. 247. P. 431–433.
5. **Vernotte P.** Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1958. V. 246. P. 3154–3155.
6. **Chester M.** Second sound in solids // Phys. Rev. 1963. N 131. P. 2013–2015.
7. **Galovic S., Kotoski D.** Photothermal wave propagation in media with thermal memory // J. Appl. Phys. 2003. V. 93, N 5. P. 3063–3070.
8. **Vedavarz A., Kumar S., Moallemi M. K.** Significance of non-Fourier heat waves in conduction // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1994. V. 116, N 1. P. 221–224.
9. **Ozsisik M. N., Tzou D. Y.** On the wave theory in heat conduction // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1994. V. 116, N 3. P. 526–535.
10. **Kaminski W.** Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. V. 112. P. 555–560.
11. **Roetzel W., Putra N., Sarit K.** Das experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // Intern. J. Thermal Sci. 2003. V. 42. P. 541–552.

12. **Poletkin K. V., Gurzadyan G. G., Shang J., Kulish V.** Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films // *Appl. Phys. B*. 2012. V. 107. P. 137–143.
13. **Вовненко Н. В., Зимин Б. А., Судьенков Ю. В.** Неравновесность процесса движения облучаемой поверхности металлов при воздействии лазерных импульсов субмикросекундной длительности // *Журн. техн. физики*. 2010. Т. 80, вып. 7. С. 41–45.
14. **Судьенков Ю. В., Павлишин А. И.** Аномально высокие скорости распространения наносекундных импульсов давления в металлических фольгах // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, вып. 12. С. 14–20.
15. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
16. **Lord H., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1967. N 15. P. 299–309.
17. **Иванов Ц., Энгельбрехт Ю. К.** О моделях термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла // *Инж.-физ. журн.* 1978. № 35. С. 344–351.
18. **Ivanova E. A.** Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component medium // *Acta Mech.* 2010. V. 215, iss. 1–4. P. 261–286.
19. **Ivanova E. A.** On one model of generalised continuum and its thermodynamical interpretation // *Mechanics of generalized continua*. Berlin: Springer, 2011. P. 151–174.
20. **Ivanova E. A.** Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component Cosserat continuum // *Techn. Mech.* 2012. Bd 32, Fasz. 2–5. S. 273–286.
21. **Ivanova E. A.** Description of mechanism of thermal conduction and internal damping by means of two component Cosserat continuum // *Acta Mech.* 2014. V. 225, iss. 3. P. 757–795.
22. **Tzou D. Y.** Macro-to-microscale heat transfer. The lagging behavior. N. Y.: Taylor and Francis, 1997.
23. **Green A. E., Naghdi P. M.** On undamped heat wave in elastic solids // *J. Thermal Stresses*. 1992. V. 15, N 2. P. 253–264.
24. **Бабенков М. Б.** Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // *ПМТФ*. 2013. Т. 54, № 2. С. 126–137.
25. **Бабенков М. Б.** Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока // *ПМТФ*. 2011. Т. 52, № 6. С. 112–121.
26. **Babenkov M. B., Ivanova E. A.** Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problem of the hyperbolic type // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2014. V. 26, N 4. P. 483–502. DOI: 10.1007/s00161-013-0315-8.
27. **Муратиков К. Л.** Об особенностях поведения температурных волн в твердых телах при описании теплопроводности уравнением гиперболического типа // *Письма в ЖТФ*. 1995. Т. 21, № 12. С. 88–94.
28. **Magunov A. N.** Laser thermometry of solids: state of the art and problems // *Measurement Techniques*. 2002. V. 45, N 2. P. 173–181.

*Поступила в редакцию 3/VI 2014 г.,  
в окончательном варианте — 17/III 2015 г.*