УДК 517.958, 533.7

СТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ ВИХРЕВАЯ ПОДМОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru

Подмодель идеального газа, инвариантная относительно переносов по времени и по одному пространственному направлению, в случае вихревых движений имеет четыре интеграла. Для функции тока и удельного объема получена система нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с одним произвольным элементом, включающим уравнение состояния и произвольные функции интегралов. Найдены преобразования эквивалентности по произвольному элементу. Решена задача групповой классификации. Получена оптимальная система неподобных подалгебр для алгебр групповой классификации. Рассмотрены примеры инвариантных решений, описывающих вихревые движения газа с переменной энтропией, в том числе точечный источник или сток. С использованием двумерных подалгебр получены аналоги простых волн.

Ключевые слова: вихревые течения газа, групповой анализ, оптимальная система подалгебр, инвариантные решения, простые волны.

DOI: 10.15372/PMTF20210409

Введение. Модель идеальной газовой динамики изучена достаточно хорошо [1–3]: разработаны численные и аналитические методы решения краевых задач [4, 5], для тестирования расчетов и выявления новых особенностей движения газа созданы методы симметрийного анализа [6, 7], классические результаты, полученные для плоских установившихся безвихревых течений [2, 3, 8], обобщены на случай вихревых изоэнтропических течений [9, 10].

В данной работе выводится математическая подмодель вихревых движений с переменной энтропией для произвольного уравнения состояния и произвольных значений интегралов Бернулли, энтропии, завихренности, которые объединены в один произвольный элемент. С использованием методов группового анализа [1, 11–13] получены преобразования эквивалентности модели, изменяющие лишь произвольный элемент.

1. Стационарная двумерная подмодель и преобразования эквивалентности. Уравнения газовой динамики [8]

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \qquad \rho_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,$$
$$S_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla S = 0, \quad p = g(V,S) = -\varepsilon_V(V,S), \quad T = \varepsilon_S, \quad V = \rho^{-1},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10071) и в рамках государственного задания Института механики Уфимского федерального исследовательского центра РАН № 0246-2019-0052.

где ε — удельная внутренняя энергия; $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$ — уравнение состояния; p — давление; ρ — плотность; S — энтропия; T — температура; V — удельный объем, инвариантны относительно переносов по времени t, по пространству $\boldsymbol{x}$, относительно галилеевых переносов (движения системы отсчета с постоянной скоростью) и вращений, а также относительно равномерных растяжений по t и $\boldsymbol{x}$. Преобразования образуют 11-параметрическую группу [1]. Рассмотрим инвариантные движения относительно переносов по t и z в декартовой системе координат $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$. Построим инвариантную стационарную двумерную подмодель [2, 3, 8]

$$\begin{gathered} Du + Vp_x = 0, \quad Dv + Vp_y = 0, \quad Dw = 0, \quad DS = 0, \\ D\rho + \rho(u_x + v_y) = (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $p = g(V, S)$ — уравнение состояния; $D = u\,\partial_x + v\,\partial_y$. Введем функцию тока $\psi(x, y)$ в соответствии с последним уравнением системы (1):

$$u = V\psi_y, \quad v = -V\psi_x, \quad \partial\psi \equiv 0, \quad D = V\,\partial, \quad \partial = \psi_y\,\partial_x - \psi_x\,\partial_y.$$

Система (1) с энтальпией $i = \varepsilon + pV$, $i_V = -V\varepsilon_{VV} = Vg_V$ имеет три интеграла (Бернулли, энтропии и третьей компоненты скорости):

$$V^2(\psi_x^2 + \psi_y^2) + 2i = B^2(\psi), \quad S = S(\psi), \quad w = w(\psi). \tag{2}$$

В результате в системе (1) остается одно уравнение

$$(\partial u)_y = (\partial v)_x,$$

которое с учетом (2) записывается в виде

$$\partial\,[-BB'V^{-1} + S'\varepsilon_S V^{-1} + V\,\Delta\psi + \nabla\psi\cdot\nabla V] = 0.$$

Отсюда следует четвертый интеграл, который вместе с интегралом Бернулли образует уравнения подмодели

$$V\,\Delta\psi + \nabla\psi\cdot\nabla V = K_\psi/2, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 + K_V = 0, \quad K_V \neq 0, \tag{3}$$

где $K = B^2(\psi)V^{-1} - 2\varepsilon V^{-1} - 2P_1(\psi)$ — произвольный элемент, который выражается через уравнение состояния и произвольные функции интегралов $B(\psi)$, $S(\psi)$, $P_1(\psi)$.

С учетом интегралов (2) выражение для вихря скорости инвариантной подмодели записывается в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = (w'\psi_y, -w'\psi_x, \omega), \quad \omega = v_x - u_y.$$

Величина ω в силу (3) равна

$$\omega = -K_\psi/2 = -P_1' - BB'V^{-1} + S'\varepsilon_S V^{-1}$$

и в силу (1), (2) удовлетворяет равенству

$$\partial\omega = -(\omega + S'g_S)V^{-1}\,\partial V.$$

Отсюда получаем интеграл завихренности

$$\omega V = \Omega'(\psi) + S'\varepsilon_S \Rightarrow K = -2P(\psi) - 2V^{-1}\Omega - 2V^{-1}\varepsilon. \tag{4}$$

Выражения для K в (3) и (4) различаются на линейное слагаемое по $\rho = V^{-1}$: $P = P_1$, $\Omega = -B^2/2$.

В случае изоэнтропических течений вихревые движения рассмотрены в [9, 10]. Далее рассматриваются вихревые движения с переменной энтропией.

Для произвольного элемента выполнены равенства

$$K_x = K_y = 0. \tag{5}$$

Преобразования переменных x, y, V, ψ, не меняющие вид уравнений (3), (5), но изменяющие функцию $K(V, \psi)$, называются преобразованиями эквивалентности и образуют группу, алгебра Ли которой задается операторами, продолженными на производные, входящие в уравнения (3), (5) [1, 12]:

$$Y = \xi^x\,\partial_x + \xi^y\,\partial_y + \eta^V\,\partial_V + \eta^\psi\,\partial_\psi + \eta^K\,\partial_K + (\tilde{D}_x\eta^V - V_x\tilde{D}_x\xi^x - V_y\tilde{D}_x\xi^y)\,\partial_{V_x} +$$
$$+ (\tilde{D}_y\eta^V - V_x\tilde{D}_y\xi^x - V_y\tilde{D}_y\xi^y)\,\partial_{V_y} + \zeta^x\,\partial_{\psi_x} + \zeta^y\partial_{\psi_y} + (\tilde{D}_x\zeta^x - \psi_{xx}\tilde{D}_x\xi^x - \psi_{xy}\tilde{D}_x\xi^y)\,\partial_{\psi_{xx}} +$$
$$+(\tilde{D}_y\zeta^y - \psi_{xy}\tilde{D}_y\xi^x - \psi_{yy}\tilde{D}_y\xi^y)\,\partial_{\psi_{yy}} + (D_j\eta^K - K_xD_j\xi^x - K_yD_j\xi^y - K_VD_j\eta^V - K_\psi D_j\eta^\psi)\,\partial_{K_j},$$
$$j = x, y, V, \psi,$$

где

$$\zeta^i = \tilde{D}_i\xi^\psi - \psi_x\tilde{D}_i\xi^x - \psi_y\tilde{D}_i\xi^y, \quad i = x, y, \quad D_j = \partial_j + K_j\,\partial_K,$$
$$\tilde{D}_i = \partial_i + V_i\,\partial_V + \psi_i\,\partial_\psi + (K_i + K_VV_i + K_\psi\psi_i)\,\partial_K +$$
$$+ (K_{ji} + K_{jV}V_i + K_{j\psi}\psi_i)\,\partial_{k_j} + \psi_{xi}\,\partial_{\psi_x} + \psi_{yi}\,\partial_{\psi_y}.$$

Координаты оператора ξ^i, η^l, $l = V, \psi, K$ — функции переменных x, y, V, ψ, K. Условия инвариантности уравнений (3), (5) задают переопределенную систему линейных однородных уравнений для координат оператора Y [1], из решения которой следует

Теорема 1. *Алгебра Ли преобразований эквивалентности бесконечномерна. Базисные операторы имеют вид*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\,\partial_x - x\,\partial_y, \quad X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y + \psi\,\partial_\psi,$$
$$X_5 = \psi\,\partial_\psi + 2K\,\partial_K, \quad \langle\eta\rangle = -V\eta'(\psi)\,\partial_V + \eta(\psi)\,\partial_\psi, \quad \langle\zeta\rangle_0 = \zeta(\psi)\,\partial_K,$$

где $\eta(\psi)$, $\zeta(\psi)$ — произвольные функции.

Замечание 1. Преобразования, не изменяющие функцию $K(\psi, V)$, образуют ядро допускаемых групп $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Замечание 2. Преобразования, изменяющие функцию K, имеют следующий вид:

а) $\tilde{K} = K + \zeta(\psi)$;

б) $\tilde{\psi} = b\psi$, $\tilde{K} = Kb^2$;

в) $\tilde{x} = cx$, $\tilde{y} = cy$, $\tilde{\psi} = c\psi$;

г) $\tilde{V}\eta(\tilde{\psi}) = V\eta(\psi)$, $a = \displaystyle\int\limits_{\tilde{\psi}}^{\psi} \frac{dt}{\eta(t)}$.

Здесь $\zeta(\psi)$ — произвольная функция; $\eta(t)$ — любая фиксированная функция; a, b, c — постоянные групповые параметры.

Если $\eta = A$ — постоянная, то преобразование "г" есть перенос по ψ:

$$\tilde{V} = V, \qquad \tilde{\psi} = \psi - aA.$$

Если $\eta(t) = t$, то преобразование "г" есть растяжение:

$$\tilde{\psi} = \psi\,\mathrm{e}^{-a}, \qquad \tilde{V} = \mathrm{e}^{a}\,V.$$

Замечание 3. Допускается отражение $\psi \to -\psi$.

2. Групповая классификация подмодели. Задача групповой классификации заключается в том, чтобы с точностью до преобразований эквивалентности найти произвольные элементы системы (3), для которых ядро допускаемых групп расширяется.

Оператор алгебры Ли точечных преобразований продолжается на производные, входящие в уравнения системы (3) [1]:

$$X = \xi^x\,\partial_x + \xi^y\,\partial_y + \eta^V\,\partial_V + \eta^\psi\,\partial_\psi + \zeta^x\,\partial_{\psi_x} + \zeta^y\,\partial_{\psi_y} + \\ + (D_x\eta^V - V_xD_x\xi^x - V_yD_x\xi^y)\,\partial_{V_x} + (D_y\eta^V - V_xD_y\xi^x - V_yD_y\xi^y)\,\partial_{V_y} + \\ + (D_x\xi^x - \psi_{xx}D_x\xi^x - \psi_{xy}D_x\xi^y)\,\partial_{\psi_{xx}} + (D_y\xi^y - \psi_{xy}D_y\xi^x - \psi_{yy}D_y\xi^y)\,\partial_{\psi_{yy}}.$$

Здесь $\zeta^i = D_i\eta^\psi - \psi_xD_i\xi^x - \psi_yD_i\xi^y$ $(i = x, y)$; $D_i = \partial_i + V_i\,\partial_V + \psi_i\,\partial_\psi + V_{ij}\,\partial V_j + \psi_{ij}\,\partial_{\psi_j}$ $(j = x, y)$ — операторы полного дифференцирования; операторные координаты ξ^x, ξ^y, η^V, η^ψ — функции переменных x, y, V, ψ.

Условие инвариантности первого уравнения системы (3) определяют координаты оператора

$$\xi^x = Nx + Ey + E_1, \qquad \xi^y = Ny - Ex + E_2,$$
$$\eta^\psi = \eta^\psi(\psi), \qquad \eta^V = V(2N - \eta^\psi_\psi),$$

где E, E_1, E_2, N — постоянные, и два определяющих соотношения

$$\begin{gathered} K_{\psi V}V(2N - \eta^\psi_\psi) + \eta^\psi K_{\psi\psi} = 0, \\ VK_{VV}(2N - \eta^\psi_\psi) + K_{V\psi}\eta^\psi + 2(N - \eta^\psi_\psi)K_V = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Последнее уравнение интегрируется по V, и система (6) принимает вид

$$\begin{gathered} V(2N - \eta^\psi_\psi)K_V + \eta^\psi K_\psi - \eta^\psi_\psi K = \chi(\psi), \\ (VK_V + K)\eta^\psi_{\psi\psi} + \chi'(\psi) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\chi(\psi)$ — произвольная функция.

Определяющие соотношения для функции $K(\psi, V)$ задаются переопределенной системой уравнений

$$\begin{gathered} V(C - b')K_V + b(\psi)K_\psi - b'K = \mu(\psi), \\ (VK_V + K)b'' + \mu' = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

с некоторыми функциями $b(\psi)$, $\mu(\psi)$ и постоянной C.

Требуется найти общее решение системы (8) с точностью до преобразований эквивалентности при различных $b(\psi)$. Если $b'' \neq 0$, то из второго уравнения (8) следует

$$K = -\frac{\mu'}{b''} + \frac{\lambda(\psi)}{V} \to \frac{\lambda(\psi)}{V}.$$

Здесь действует преобразование эквивалентности "a" (см. п. **1**). Из системы (8) с точностью до преобразований эквивалентности следует

$$\mu = 0, \qquad \lambda = \exp\Big(C\int b^{-1}\,d\psi\Big).$$

В результате подстановки функции K в систему (7) определяются функции $\chi(\psi)$, $\eta^\psi(\psi)$, η^V:

$$\chi = 0, \quad \eta^\psi = \eta(\psi), \quad \eta^V = 2NV\lambda\lambda''/\lambda'^2 \quad (C \neq 0),$$

$$\chi = 0, \quad \eta^\psi = \eta(\psi), \quad \eta^V = -V\eta'(\psi) \quad (C = 0),$$

где N — произвольная постоянная; $\eta(\psi)$ — произвольная функция.

Рассмотрим случай $b = B\psi + B_0$.

Из (8) следует, что $\mu = M$ — постоянная и выполняется равенство

$$(C - B)VK_V + (B\psi + B_0)K_\psi = BK + M. \tag{9}$$

Если $B \neq 0$, то с точностью до преобразований эквивалентности “а” и “г” можно считать $B_0 = M = 0$. Общее решение уравнения (9), где $CB^{-1} = m$, имеет вид

$$K = \psi k(I), \qquad I = V^{-1}\psi^{m-1}$$

для любого m и $k \neq 0$. Последнее неравенство следует из физического смысла системы (3). Из уточненных соотношений (7)

$$\chi' = \psi\eta^\psi_{\psi\psi}(Ik_I - k),$$

$$(\eta^\psi_\psi - 2N)\psi Ik_I + \eta^\psi((m-1)Ik_I + k) - \psi\eta^\psi_\psi k = \chi$$

получаем равенство

$$m\eta^\psi_\psi = 2N.$$

Если $m = 0$, то $N = 0$ и

$$(Ik_I - k)(\psi\eta^\psi_\psi - \eta^\psi) = \chi.$$

При $\psi\eta^\psi_\psi = \eta^\psi$ $\chi = 0$, $k(I)$ — произвольная функция,

$$\eta^\psi = B\psi, \qquad \eta^V = -BV.$$

При $\psi\eta^\psi_\psi \neq \eta^\psi$ $k = -n + K_0 I$, $K \to \psi I$, $\eta^\psi = \eta(\psi)$ — произвольная функция, $\eta^V = -V\eta'$.

Пусть $m \neq 0$, тогда $\eta^\psi = (2N/m)\psi + B_0$, $\chi = M$, $B_0((m-1)Ik_I + k) = M$.

Если $B_0 = M = 0$, то $k(I)$ — произвольная функция и выполняются равенства

$$\eta^\psi = (2N/m)\psi, \quad \eta^V = 2N(1 - 1/m)V, \quad K = \psi k(I).$$

При $B_0 \neq 0$ с точностью до преобразований эквивалентности имеем

$$K = V^{1/(m-1)}, \quad \eta^\psi = (2N/m)\psi + B_0, \quad \eta^V = 2N(1 - 1/m)V.$$

В случае $B = 0$ уравнение (9) принимает вид

$$CVK_V + B_0K_\psi = M.$$

С точностью до преобразований эквивалентности можно считать $K = k(I)$, $I = V\,\mathrm{e}^{m\psi}$, $k' < 0$ при $B_0 \neq 0$ и $K = -\ln V$ при $B_0 = 0$. С учетом этих выражений для K из (7) следует

$$(k + Ik')\eta^\psi_{\psi\psi} + \chi' = 0,$$

$$(2N - \eta^\psi_\psi)Ik' + m\eta^\psi Ik' - \eta^\psi_\psi k = \chi \quad \Rightarrow \quad m\eta^\psi_\psi = 0$$

(переменные I, ψ можно полагать независимыми). При $m \neq 0$ отсюда следуют равенства $\eta^\psi = -2N$, $\chi = 0$, $\eta^V = 2NV$. При $m = 0$ $k(V)$ — произвольная функция, $\eta^\psi = B$, $N = 0$, $\chi = 0$, $\eta^V = 0$. В случае $K = -\ln V$ из (7) получаем $\eta^\psi = B$, $\eta^V = 2NV$.

Из сказанного выше следует

Теорема 2. *Система* (3) *с произвольной функцией* $K(\psi, V)$ *допускает ядро* $\{X_1, X_2, X_3\}$, *где* X_1, X_2, X_3 *определены в теореме* 1. *Для специальных функций возможны следующие расширения*:

1) $K = V^{-1}\lambda(\psi)$, $\lambda' \neq 0$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y + (2\lambda/\lambda')\,\partial_\psi + (2\lambda\lambda''/\lambda'^2)V\,\partial_V$;

2) $K = V^{-1}$, $\langle\eta\rangle = \eta(\psi)\,\partial_\psi - \eta'(\psi)V\,\partial_V$;

3) $K = \psi k(V\psi)$, $X_4 = \psi\,\partial_\psi - V\,\partial_V$;

4) $K = \psi k(I)$, $I = V^{-1}\psi^{m-1}$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y + (2/m)\psi\,\partial_\psi + 2(1 - 1/m)V\,\partial_V$;

5) $K = k(I)$, $I = V\,\mathrm{e}^\psi$, $k' < 0$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y - 2\,\partial_\psi + 2V\,\partial_V$;

6) $K = V^{1/(m-1)}$, $m \neq 0$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y + (2\psi/m)\,\partial_\psi + 2(1 - 1/m)V\,\partial_V$, $X_5 = \partial_\psi$;

7) $K = k(V)$, $k' < 0$, $X_5 = \partial_\psi$;

8) $K = -\ln V$, $X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y + 2V\,\partial_V$, $X_5 = \partial_\psi$.

3. Оптимальные системы. Алгебры Ли для расширений в теореме 2 имеют разные размерности и структуры. В случаях 1, 4, 5 алгебра разлагается в полупрямую сумму абелевой подалгебры $\{X_3, X_4\}$ и абелева идеала $\{X_1, X_2\}$

$$L_4 = \{X_1, X_2\} \dot{\oplus} \{X_3, X_4\} \tag{10}$$

в соответствии с коммутаторами базисных операторов

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = -X_2, \qquad [X_1, X_4] = X_1,$$
$$[X_2, X_3] = X_1, \qquad [X_2, X_4] = X_2, \qquad [X_3, X_4] = 0.$$

Внутренние автоморфизмы в L_4 вычисляются по следующему правилу: для каждого базисного оператора линейное преобразование является решением задачи

$$X'_{a_k} = [X_k, X'], \qquad X' = x'_i X_i\big|_{a_k=0} = X = x_i X_i.$$

Для оператора X_k автоморфизм A_k задается преобразованием координат оператора X (неменяющиеся координаты не указаны)

$$A_1\colon\quad x'_1 = x_4 a_1 + x_1, \quad x'_2 = -x_3 a_1 + x_2,$$
$$A_2\colon\quad x'_1 = x_3 a_2 + x_1, \quad x'_2 = x_4 a_2 + x_2,$$
$$A_3\colon\quad x'_1 = x_1 \cos a_3 + x_2 \sin a_3, \quad x'_2 = x_1 \sin a_3 - x_2 \cos a_3,$$
$$A_4\colon\quad x'_1 = x_1\,\mathrm{e}^{-a_4}, \quad x'_2 = x_2\,\mathrm{e}^{-a_4}.$$

Абелева подалгебра разложения (10) имеет подалгебры

$$0, \quad X_3 + \alpha X_4, \quad X_4, \quad \{X_3, X_4\}.$$

К каждой из этих подалгебр добавляем линейную комбинацию элементов из абелева идеала. Некоторые произвольные коэффициенты обнуляем автоморфизмами и проверяем условия подалгебры.

Оптимальная система состоит из следующих неподобных подалгебр:

$$1.1.\ X_1,\quad 1.2.\ X_3+\alpha X_4,\quad 1.3.\ X_4,$$
$$2.1.\ \{X_1,X_2\},\quad 2.2.\ \{X_1,X_4\},\quad 2.3.\ \{X_3,X_4\},$$
$$3.1.\ \{X_1,X_2,X_3+\alpha X_4\},\quad 3.2.\ \{X_1,X_2,X_4\}$$

($k.i$ — номер подалгебры; k — размерность подалгебры; i — порядковый номер подалгебры в данной размерности).

Для случая 2 (см. теорему 2) допускаемая алгебра бесконечномерна. Имеют место внутренние автоморфизмы A_1, A_2, A_3. Алгебра разлагается в прямую сумму двух идеалов

$$\{X_1,X_2,X_3\}\oplus\langle\eta(\psi)\rangle.$$

Подалгебры трехмерного идеала подобны следующим подалгебрам:

$$0,\quad X_3,\quad X_1,\quad \{X_1,X_2,X_3\}.$$

Коммутатор операторов, принадлежащих бесконечному идеалу, равен

$$[\langle\zeta(\psi)\rangle,\langle\eta(\psi)\rangle]=\langle\zeta\eta'-\eta\zeta'\rangle.$$

Внутренний автоморфизм для оператора $\langle\zeta(\psi)\rangle$ удовлетворяет задаче

$$\bar\eta_a=\zeta\bar\eta_\psi-\zeta'\bar\eta,\qquad \bar\eta\big|_{a=0}=\eta(\psi),$$

решение которой имеет вид

$$\bar\eta=\zeta(\psi)G\Big(a+\int\frac{d\psi}{\zeta(\psi)}\Big),\qquad \eta(\psi)=\zeta(\psi)G\Big(\int\frac{d\psi}{\zeta(\psi)}\Big).$$

Введем следующие обозначения: $\mu(\psi)=\displaystyle\int\frac{d\psi}{\zeta(\psi)}$, $\lambda(\psi)$ — функция, обратная μ, т. е. $\lambda(\mu(\psi))=\psi$. Тогда автоморфизм задается равенством

$$\bar\eta=\lambda'(\mu(\psi))\,\frac{\eta(\lambda(a+\mu(\psi)))}{\lambda'(a+\mu(\psi))}.$$

С точностью до этого преобразования вычислим конечномерные подалгебры в бесконечномерном идеале. Для двумерной подалгебры выполняется условие

$$[\langle\eta(\psi)\rangle,\langle\eta_1(\psi)\rangle]=\alpha\langle\eta(\psi)\rangle+\beta\langle\eta_1(\psi)\rangle.$$

Отсюда следует уравнение для $\eta_1(\psi)$

$$\eta\eta_1'=\alpha\eta+(\beta+\eta')\eta_1.$$

Если $\beta\ne0$, то $\eta_1=-\alpha\beta^{-1}\eta+C_0\eta\exp\Big(\beta\displaystyle\int\eta^{-1}\,d\psi\Big)$ и замена базиса приводит к подалгебре

$$\Big\{\langle\eta\rangle,\ \Big\langle\eta\exp\Big(\int\eta^{-1}\,d\psi\Big)\Big\rangle\Big\}. \tag{11}$$

Если $\beta=0$, то $\eta_1=C_0\eta+\alpha\eta\displaystyle\int\eta^{-1}\,d\psi$ и замена базиса приводит к подалгебре

$$\Big\{\langle\eta\rangle,\ \Big\langle\eta\int\eta^{-1}\,d\psi\Big\rangle\Big\}. \tag{12}$$

Получим трехмерные алгебры, используя классификацию Бианки структур над полем действительных чисел [14]. Структуры не должны иметь нулевой коммутатор. Из двух неразрешимых алгебр действительное решение имеет только одна с таблицей коммутаторов из базисных элементов

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2.$$

Если $X_i = \langle \eta_i(\psi) \rangle$, то из этой структуры следует система уравнений

$$\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' = \eta_1, \qquad \eta_2\eta_3' - \eta_3\eta_2' = \eta_3, \qquad \eta_1\eta_3' - \eta_3\eta_1' = 2\eta_2.$$

Общее решение первых двух уравнений имеет вид

$$\eta_1 = C\eta_2 \exp\Big(-\int \eta_2^{-1}\,d\psi\Big), \qquad \eta_3 = D\eta_2 \exp\Big(\int \eta_2^{-1}\,d\psi\Big).$$

Подставляя это решение в третье уравнение, получаем соотношение $CD = 1$.

Таким образом, имеем трехмерную подалгебру

$$\Big\{\Big\langle \eta \exp\Big(-\int \eta^{-1}\,d\psi\Big)\Big\rangle,\ \langle\eta\rangle,\ \Big\langle \eta \exp\Big(\int \eta^{-1}\,d\psi\Big)\Big\rangle\Big\}. \tag{13}$$

Объединение проекций на идеалы дает подалгебры размерности не более трех:

$$\langle\eta\rangle, \quad X_1 + \langle\eta\rangle, \quad X_3 + \langle\eta\rangle,$$

$$\Big\{X_1 + \langle\eta\rangle,\ \Big\langle \eta \exp\Big(\int \eta^{-1}\,d\psi\Big)\Big\rangle\Big\}, \quad \Big\{X_3 + \langle\eta\rangle,\ \Big\langle \eta \exp\Big(\int \eta^{-1}\,d\psi\Big)\Big\rangle\Big\},$$

$$\{X_1,\ X_2,\ X_3 + \langle\eta\rangle\},$$

а также подалгебры (11)–(13).

В случае 6 (см. теорему 2) допускаемая алгебра разлагается в полупрямую сумму идеала $\{X_1, X_2, X_3\}$ и подалгебры $\{X_4, X_5\}$:

$$\{X_1, X_2, X_3\} \dot{\oplus} \{X_4, X_5\}.$$

Автоморфизмы A_1, A_2, A_3 введены выше, автоморфизм A_4 дополняется преобразованием $\bar{x}_5' = x_5\,\mathrm{e}^{-2a_5}$. Появляется дополнительный автоморфизм

$$A_5\colon \quad x_5' = 2x_4a_5 + x_5.$$

Проекции на двумерную подалгебру содержат подалгебры с точностью до внутренних автоморфизмов

$$0, \quad X_4, \quad X_5, \quad \{X_4, X_5\}.$$

Добавляя проекции из идеала, получаем оптимальную систему

$$X_1, \quad X_3 + \alpha X_4, \quad X_3 + \alpha X_5, \quad X_4, X_5 + \beta X_1,$$

$$\{X_3, X_4\}, \quad \{X_2, X_4\}, \quad \{X_3, X_5\}, \quad \{X_1, X_5\},$$

$$\{X_4, X_5 + \beta X_1, \beta(m-2) = 0\}, \quad \{X_3 + \alpha X_4, X_5\},$$

$$\{X_4, X_1, X_2\}, \quad \{X_1, X_2, X_3 + \alpha X_4\}, \quad \{X_1, X_2, X_3 + \alpha X_5\}, \quad \{X_1, X_2, X_5\},$$

$$\{X_3, X_4, X_5\}, \quad \{X_4, X_5 + \alpha X_2, X_1, \beta(m-2) = 0\},$$

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad \{X_1, X_2, X_3, X_5\}, \quad \{X_4 + \alpha X_3, X_5, X_1, X_2\}.$$

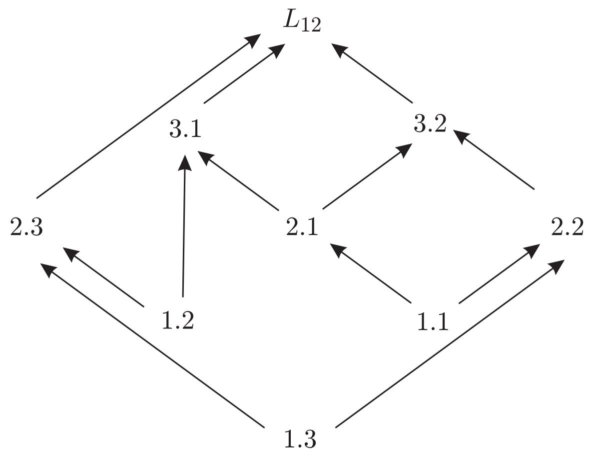

Рис. 1. Граф вложенных подалгебр

В случае 7 (см. теорему 2) четырехмерная алгебра имеет центр X_5. Автоморфизмы A_1, A_2, A_3 создают оптимальную систему

$$X_1 + X_5, \quad X_3 + \alpha X_5, \quad \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1,$$
$$\{X_1, X_2 + \alpha X_5\}, \quad \{X_1, X_5\}, \quad \{X_3, X_5\}, \quad \{X_3 + \alpha X_5, X_1, X_2\}.$$

В случае 8 (см. теорему 2) пятимерная алгебра имеет центр X_5 и автоморфизмы A_1, A_2, A_3, A_4. Оптимальная система подалгебр та же, что и в случае 4, но к ней добавляется центр

$$X_1 + \alpha X_5,\ X_3 + \beta X_4 + \alpha X_5,\ X_4 + \alpha X_5,\ \{X_1 + \alpha X_5, X_2\},\ \{X_1 + \alpha X_5, X_4\},$$
$$\{X_3 + \alpha X_5, X_4 + \beta X_5\},\ \{X_1, X_5\},\ \{X_3, X_5\},\ \{X_4, X_5\},$$
$$\{X_1, X_2, X_3 + \beta X_4 + \alpha X_5\},\ \{X_1, X_2, X_4 + \alpha X_5\},\ \{X_1, X_2, X_5\},\ \{X_1, X_4, X_5\},\ \{X_3, X_4, X_5\},$$
$$\{X_1, X_2, X_3 + \alpha X_5, X_4 + \beta X_5\},\ \{X_1, X_2, X_3 + \alpha X_4, X_5\},\ \{X_1, X_2, X_4, X_5\}.$$

В случае 3 (см. теорему 2) к ядру добавляется центр X_4. Оптимальная система получается из оптимальной системы подалгебр ядра с добавлением центра

$$X_4,\ X_1 + \alpha X_4,\ X_3 + \alpha X_4,\ \{X_1, X_2 + \alpha X_4\},\ \{X_1, X_4\},\ \{X_3, X_4\},\ \{X_1, X_2, X_3 + \alpha X_4\}.$$

Оптимальную систему можно представить в виде графа вложенных подалгебр, например, для алгебры L_4 в случаях 1, 4, 5 (рис. 1).

С помощью графа можно построить систему вложенных подмоделей [15]. Построенные оптимальные системы фактически представляют собой классификацию групповых подмоделей системы (3). Одномерные подалгебры задают инвариантные решения, двумерные подалгебры — частично инвариантные подмодели типа простых волн, подалгебры больших размерностей — дифференциально-инвариантные подмодели с инвариантными дифференциальными связями.

4. Инвариантные подмодели. Рассматриваются инвариантные подмодели на одномерных подалгебрах. Для этого вычисляются три инварианта подалгебры. Инварианты, содержащие функции, принимаются в качестве новых функций инварианта, состоящего из независимых переменных. Это представление решения подставляется в систему (3). Данную процедуру можно выполнить для любого расширения в теореме 2.

Для подалгебры 1.1 представление инвариантного решения имеет вид

$$\psi = \psi(y), \qquad V = V(y),$$

одномерная подмодель задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений для любой функции $K(V,\psi)$:

$$\psi'^2 + K_V = 0, \qquad V\psi'' + \psi' V' = K_\psi/2.$$

С помощью обратной функции $y = y(\psi)$, $V(y(\psi)) = V(\psi)$ подмодель сводится к уравнению

$$(VK_{VV} + 2K_V)V_\psi + VK_{V\psi} + K_\psi = 0.$$

В силу (4) и уравнения состояния $p = g(V,S)$ это уравнение интегрируется:

$$g(V(\psi), S(\psi)) = P(\psi).$$

По известным значениям интегралов $S(\psi)$ и $P(\psi)$ определяется $V(\psi)$ с использованием заданного уравнения состояния $p = g(V,S) = -\varepsilon_V(V,S)$.

Величина ψ' определяется формулой

$$\psi' = V^{-1}(B^2 - 2VP(\psi) - 2\varepsilon(V, S(\psi)))^{1/2} = 1/\Psi'(\psi) \ \Rightarrow\ y = \Psi(\psi).$$

Линия тока $\psi = c$ является прямой $y = \Psi(c)$, параллельной оси x, на которой заданы удельный объем $V(c)$, энтропия $S(c)$, давление $P(c) = g(V(c), S(c))$. Профиль скорости задается равенством

$$u = V(c)(\Psi'(c))^{-1}.$$

В случае если подалгебра содержит оператор вращения X_3, целесообразно проводить вычисления в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Уравнения (3) в полярных координатах принимают вид

$$\begin{gathered}\psi_r^2 + r^{-2}\psi_\varphi^2 + K_V = 0,\\ V(\psi_{rr} + r^{-2}\psi_{\varphi\varphi} + r^{-1}\psi_r) + \psi_r V_r + r^{-2}\psi_\varphi V_\varphi = K_\psi/2.\end{gathered} \tag{14}$$

В случае 1 (см. теорему 2) подалгебра 1.2 задается оператором

$$X_3 + \alpha X_4 = -\partial_\varphi + \alpha(r\,\partial_r + (2\lambda/\lambda')\,\partial_\psi + (2\lambda\lambda''/\lambda'^2)V\,\partial_V),$$

который имеет инварианты

$$s = \ln r + \alpha\varphi, \quad \lambda(\psi)r^{-2}, \quad V/\lambda'.$$

Подставляя представление инвариантного решения

$$\lambda(\psi) = r^2\Lambda(s), \qquad V = \lambda'\vartheta(s)$$

в систему (14), получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}(\Lambda' + 2\Lambda)^2 + \alpha^2\Lambda'^2 = \Lambda\vartheta^{-2},\\ \vartheta'((\alpha^2+1)\Lambda' + 2\Lambda) + \vartheta((\alpha^2+1)\Lambda'' + 4\Lambda' + 4\Lambda) = (2\vartheta)^{-1},\end{gathered} \tag{15}$$

инвариантных относительно переноса по s. Поэтому система допускает понижение порядка, в случае если инварианты Λ', ϑ полагаются функциями другого инварианта Λ:

$$\Lambda' = \Lambda k(\Lambda), \qquad \vartheta^2 = v(\Lambda).$$

Система (15) интегрируется для любой функции $\lambda(\psi)$:

$$\Lambda\vartheta((\alpha^2+1)k^2 + 4k + 4) = 1 \ \Rightarrow\ \vartheta = C(k+2)^{-1},$$

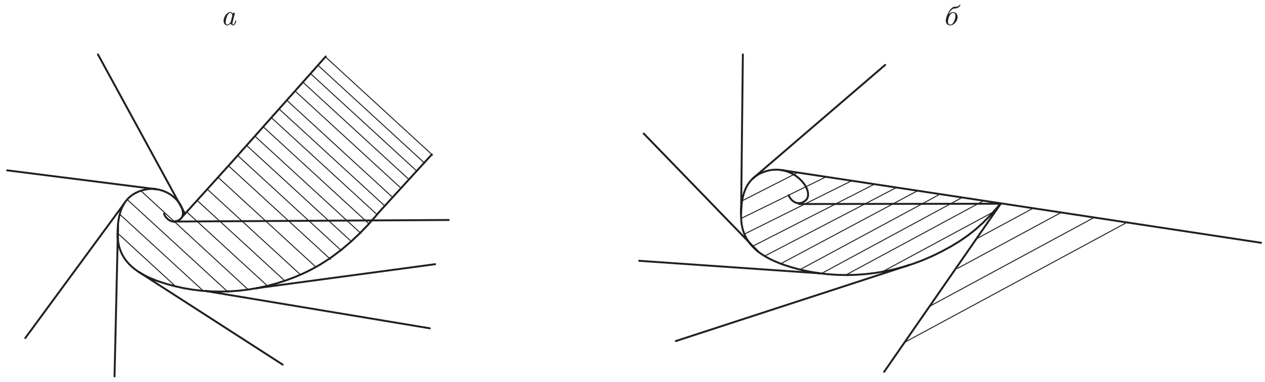

Рис. 2. Два типа источника:
а — точечный источник, обтекающий полуполосу, *б* — неточечный источник, обтекающий угол

$$-\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \frac{4\alpha^2 k\, dk}{(k+2)((\alpha^2+1)k^2+4k+4)} \ \Rightarrow$$

$$C^2\Lambda = \frac{(k+2)^2}{k^2(\alpha^2+1)+4k+4} = \Big(1+\Big(\frac{\alpha k}{k+2}\Big)^2\Big)^{-1},$$

$$ds = \frac{d\Lambda}{\Lambda k} \ \Rightarrow \ Dr\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi} = \Big(1+\Big(\frac{\alpha k}{k+2}\Big)^2\Big)^{1/2} \exp\Big(-\alpha \operatorname{arctg}\frac{(\alpha^2+1)k+2}{2\alpha}\Big),$$

где C, D — постоянные. Линии тока $\psi = \psi_0$ образуют семейство прямых

$$D\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi_0}\, r\sin(\varphi-\varphi_0-\beta) = 1, \quad \operatorname{tg}\beta = \alpha, \quad D^2C^2\lambda(\psi_0) = \mathrm{e}^{-2\alpha\varphi_0}.$$

Огибающая семейства — логарифмическая спираль $Dr\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi} = \sqrt{1+\alpha^2}\,\mathrm{e}^{\alpha\pi/2}$. Угол между радиусом точки огибающей и касательной постоянен и равен $\pi/2-\beta$. Такая огибающая является источником на участке логарифмической спирали, обрезанной радиусом (рис. 2).

В случае 3 (см. теорему 2) при $K = \psi k(I)$, $I = \psi V$ подалгебра 1.2 имеет инварианты

$$r, \qquad \psi V = I, \qquad \psi\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi} = \Psi.$$

Представление инвариантного решения

$$\psi = \mathrm{e}^{-\alpha\varphi}\,\Psi(r), \qquad V = \mathrm{e}^{\alpha\varphi}\, I(r)\Psi(r)^{-1}$$

подставляется в систему (14):

$$\Big(\frac{\Psi'}{\Psi}\Big)^2 = -k' - \alpha^2 r^{-2}, \qquad \Big(\frac{\Psi'}{\Psi}\Big)' + \Big(\frac{I'}{I}+\frac{1}{r}\Big)\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{1}{2}\Big(k'+\frac{k}{I}\Big), \quad k'<0. \qquad (16)$$

Система (16) сводится к одному нелинейному уравнению первого порядка для функции $I(r)$ с заданной функцией $k(I)$.

В предположении $k(I) = I^{-1}$ система (16) имеет интеграл

$$\Psi^{-1}\Psi' I r = C.$$

Решение принимает вид

$$I = \alpha^{-1}\sqrt{r^2-C^2}, \quad r>C, \qquad \Psi = \Psi_0 \exp(-\alpha \arcsin(Cr^{-1})).$$

Линии тока $\psi = \psi_0$ являются прямыми, касательными к окружности $r = C$, на которой плотность бесконечна. При $r\to\infty$ плотность стремится к нулю. Такое решение соответствует разлету частиц из неточечного источника в вакуум.

Если $k=-I$, то решение системы (16)

$$I=\frac{C}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{r^2-\alpha^2}},\qquad \Psi=\Psi_0\exp\Big(\sqrt{r^2-\alpha^2}-2\alpha\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{r-\alpha}{r+\alpha}}\Big)$$

определено вне окружности $r>\alpha$. Окружность $r=\alpha$ есть граница между областью течения и вакуумом. При $r\to\infty$ $I\to 0$, $\Psi\to\infty$, $V\to 0$, $\rho\to\infty$. Это решение соответствует установившемуся вихрю с вакуумом на окружности $r=\alpha$. Линия тока подходит к окружности вертикально:

$$(r-\alpha)^{3/2}\sim\sqrt{2}\,\alpha^{3/2}(\varphi-\varphi_0).$$

В случае 1 (см. теорему 2) при $K=V^{-1}\lambda(\psi)$ подалгебра 1.3 задает представление инвариантного решения

$$\lambda(\psi)=r^2\Lambda(\varphi),\qquad V=\lambda'(\psi)\vartheta(\varphi).$$

Подставляя это представление в систему (14), получаем подмодель

$$\vartheta^2=\Lambda(\Lambda'^2+4\Lambda^2)^{-1},\qquad 2\Lambda\Lambda''=\Lambda'^2-4\Lambda^2.$$

Общее решение уравнений подмодели имеет вид

$$\Lambda=C^2\cos^2(\varphi-\varphi_0),\quad \vartheta=(2C)^{-1},$$

где C, φ_0 — постоянные. Линии тока $\psi=\psi_0$ являются прямыми:

$$r\cos(\varphi-\varphi_0)=C^{-1}\sqrt{\lambda(\psi_0)}.$$

Вдоль линии тока выполняются равенства $V=\lambda'(\psi_0)C^{-1}/2$ (плотность постоянна), $\omega=-K_\psi/2=-C$ (вихрь постоянен). Решение описывает неточечный источник или сток.

На той же подалгебре в случае 5 (см. теорему 2) при $K=k(I)$, $I=V\,\mathrm{e}^{\psi}$ представление инвариантного решения

$$\psi=-2\ln r+\ln\Psi(\varphi),\qquad V=r^2I(\varphi)\Psi^{-1}$$

задает подмодель

$$\Big(\frac{\Psi'}{\Psi}\Big)^2+4=-\Psi k'(I),\qquad \frac{\Psi''}{\Psi'}-\frac{3}{2}\,\frac{\Psi'}{\Psi}+\frac{I'}{I}=2\,\frac{\Psi}{\Psi'},$$

которая допускает перенос по φ. Следовательно, порядок системы можно понизить путем замены переменных, выраженной через инварианты.

Общее решение последней системы уравнений выражается квадратурами

$$\Psi=-8(Ik)''^{-1},\qquad k'<0,\quad k''>0,$$

$$-I'(Ik)'''=\pm(Ik)''(8k'(Ik)''^{-1}-4)^{1/2}.$$

Например, при $k=I^{-\nu}$, $0<\nu<1$ решение имеет вид

$$I=I_0\exp\Big(\pm\frac{2\varphi}{\sqrt{1-\nu^2}}\Big),\qquad \Psi=\frac{8I_0^{\nu-1}}{\nu(1-\nu)}\exp\Big(\pm 2\varphi\sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\Big).$$

Линии тока $\psi=\psi_0$ представляют собой логарифмические спирали:

$$r=r_0\exp\Big(\pm\sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\,(\varphi-\varphi_0)\Big).$$

При $\varphi\to\infty$ (знак "$-$" в решении) $r\to 0$, $V\to 0$, $\rho\to\infty$. Это решение соответствует точечному спиральному вихрю (рис. 3).

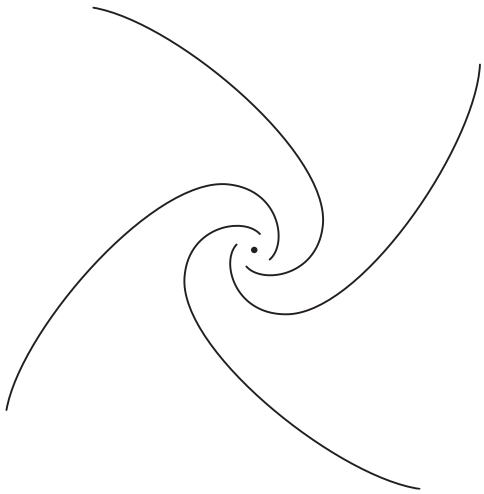

Рис. 3. Точечный источник логарифмических траекторий

5. Простые волны. На двумерных подалгебрах рассматриваются частично инвариантные решения дефекта 1 ранга 1 (простые волны) [1].

Подалгебра 2.1 имеет инварианты V и ψ. Представление решения имеет вид $V = V(\psi)$. В случае 1 (см. теорему 2) при $K = V^{-1}\lambda(\psi)$ система (3) становится переопределенной:

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = \lambda V^{-2} = \mu > 0,$$

$$\Delta\psi = (\lambda V^{-2})'/2 = \mu'/2.$$

Продифференцировав первое уравнение, определяем все вторые производные:

$$\psi_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu'}{\mu}\,\psi_x\psi_y, \qquad \psi_{xx} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu'}{\mu}\,\psi_x^2, \qquad \psi_{yy} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu'}{\mu}\,\psi_y^2.$$

Отсюда следует соотношение

$$\cos\varphi_0\psi_y = \sin\varphi_0\psi_x \;\Rightarrow\; \psi = \psi(s), \qquad s = x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0,$$

где φ_0 — постоянная. Подмодель простых волн сводится к уравнению

$$V^2\psi'^2 = \lambda$$

с произвольной функцией $\psi(s)$ и заданной функцией $\lambda(\psi)$. Линия тока $\psi = \psi_0$ — прямая, уравнение которой имеет вид

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = \chi(\psi_0).$$

Эта прямая касается окружности радиусом $\chi(\psi_0)$, χ — функция, обратная $\psi(s)$. Плотность и завихренность вычисляются по формулам

$$\rho = \frac{\psi'}{\sqrt{\lambda(\psi)}}, \qquad \omega = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\psi''}{\psi'}\sqrt{\lambda} + \lambda'\,\frac{\psi'}{2\sqrt{\lambda}}\Big).$$

В случае 3 (см. теорему 2) $K = \psi k(I)$, $I = V\psi$, $V = V(\psi)$. При этом система (3) принимает вид

$$\begin{gathered} \psi_x^2 + \psi_y^2 = -\psi^2 k' = A^2, \qquad k' < 0, \\ \Delta\psi = \psi^2\,\frac{I'}{I}\,k' + \frac{1}{2}\,\psi\Big(\frac{k}{I} - k'\Big) = B. \end{gathered} \tag{17}$$

Из первого уравнения (17) следует $\psi_x = A\cos\vartheta$, $\psi_y = A\sin\vartheta$. Из условий совместности получаем уравнение для $\vartheta(x,y)$

$$\vartheta_x\cos\vartheta + \vartheta_y\sin\vartheta = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = \lambda(\vartheta), \tag{18}$$

где $\lambda(\vartheta)$ — произвольная функция.

Второе уравнение (17) принимает вид

$$(B/A - A')(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - \lambda') = 1. \tag{19}$$

Продифференцировав (18) по x и y, с учетом (19) получаем

$$\vartheta_x = -(B/A - A')\sin\vartheta, \qquad \vartheta_y = (B/A - A')\cos\vartheta.$$

Из условия совместности последней системы уравнений следует уравнение подмодели

$$\Big(\frac{B}{A} - A'\Big)'A + \Big(\frac{B}{A} - A'\Big)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{B}{A} = A' + \Big(C + \int A^{-1}\,d\psi\Big)^{-1},$$

где C — постоянная.

Подставляя A и B из определения в (17), получаем интегродифференциальное уравнение для функции $I(\psi)$ с заданной функцией $k(I)$:

$$\psi I_\psi (Ik)'' + (Ik)' = 2I\sqrt{-k'}\Big(C + \int\frac{d\psi}{\psi\sqrt{-k'}}\Big)^{-1}. \tag{20}$$

Для любого решения уравнения (20) функция тока ψ определяется из равенств (18), (19), где ϑ — параметр.

Пусть $k(I) = -I$. Тогда уравнение (20) принимает вид

$$\psi I^{-1}I_\psi + 1 + (C + \ln|\psi|)^{-1} = 0 \ \Rightarrow\ I = \frac{D}{\psi(C + \ln|\psi|)},$$

где D — постоянная.

В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ равенства (18), (19) имеют вид

$$r\cos(\vartheta - \varphi) = \lambda'(\vartheta) + C + \ln|\psi|, \qquad r\sin(\vartheta - \varphi) = \lambda(\vartheta)$$

и задают общее решение системы (17) в параметрическом виде с произвольной функцией $\lambda(\vartheta)$ (простая волна).

Если $\lambda = \lambda_0$ — постоянная, то линия тока $\psi = \psi_0$ представляет собой окружность, уравнение которой записывается в виде

$$r^2 = \lambda_0^2 + (C + \ln|\psi_0|)^2.$$

Если $\lambda(\vartheta) = \vartheta$, то линии тока заданы параметрически:

$$\varphi = \vartheta - \operatorname{arctg}(\vartheta/\sigma_0), \qquad r = \sqrt{\vartheta^2 + \sigma_0^2}, \qquad \sigma_0 = 1 + C + \ln|\psi_0|.$$

Пусть β — угол между касательной к окружности радиусом r и касательной к кривой $r = r(\varphi)$ в некоторой ее точке:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{\vartheta}{\vartheta^2 + \sigma_0^2 - \sigma_0}.$$

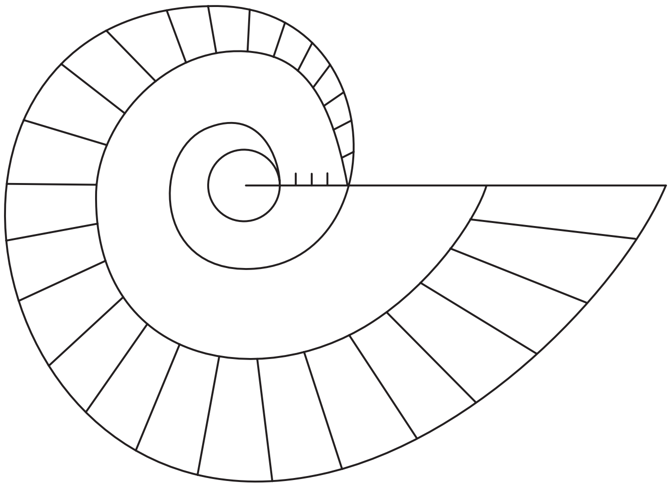

Рис. 4. Спиралевидный канал

Если $\sigma_0 > 1$, то при $\vartheta = \vartheta_k \geqslant 0$, $2\pi k = \vartheta_k - \operatorname{arctg}(\vartheta_k/\sigma_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ линия тока пересекает окружности $r_k = \sqrt{\vartheta_k^2 + \sigma_0^2}$ в точках $\varphi_k = 2\pi k$ под углами

$$\beta_k > 0, \qquad \operatorname{tg}\beta_k = \frac{\vartheta_k}{\vartheta_k^2 + \sigma_0^2 - \sigma_0}, \qquad \beta_0 = 0.$$

Точка с координатами $r_1, \varphi_1 = 2\pi$ — вершина спиралевидного канала, из которой выходит другая линия тока $\psi = \psi_1$. В области течения между линиями тока $\psi = \psi_0$ и $\psi = \psi_1$ функция тока принимает значения $\psi_0 \leqslant \psi \leqslant \psi_1$ (рис. 4).

В случае 5 (см. теорему 2) при $K = k(I)$, $I = V\,\mathrm{e}^{\psi}$ подалгебра 2.3 имеет инварианты

$$Vr^{-2}, \qquad \psi + 2\ln r.$$

Частично инвариантное решение представляется в виде

$$V = r^2 F(\Psi), \qquad \psi = -2\ln r + \Psi(r,\varphi), \qquad I = F\,\mathrm{e}^{\Psi}.$$

Система (14) принимает вид

$$\begin{gathered} (\Psi_{r_1} - 2)^2 + \Psi_\varphi^2 = -k'\,\mathrm{e}^{\Psi} = A^2 > 0, \\ \Psi_{r_1 r_1} + \Psi_{\varphi\varphi} + 2\,\frac{I'}{I}\,\Psi_{r_1} = 4\,\frac{I'}{I} - A^2\Big(\frac{I'}{I} - \frac{1}{2}\Big), \end{gathered} \tag{21}$$

где $r_1 = \ln r$. Решение системы (21) будем искать в виде

$$\Psi_{r_1} = 2 + A\cos\vartheta, \qquad \Psi_\varphi = A\sin\vartheta.$$

Условия совместности и второе уравнение (21) представляют собой систему для функции ϑ

$$\vartheta_{r_1} = \Big(C + 2\,\frac{I'}{I}\cos\vartheta\Big)\sin\vartheta, \qquad \vartheta_\varphi = -2\,\frac{A'}{A} - \Big(C + 2\,\frac{I'}{I}\cos\vartheta\Big)\cos\vartheta,$$

где $C = A' + A(I'I^{-1} - 2^{-1})$. Условие совместности этих уравнений принимает вид

$$4\cos^2\vartheta\Big(\Big(\frac{I'}{I}\Big)^2 + 2\,\frac{I'}{I}\,\frac{A'}{A} - \Big(\frac{I'}{I}\Big)'\Big) + 2\cos\vartheta\Big(C\Big(2\,\frac{I'}{I} + \frac{A'}{A}\Big) - C' - A\Big(\frac{I'}{I} + \frac{A'}{A}\Big)'\Big) + \\ + C^2 - AC' - 4\,\frac{A'}{A}\,\frac{I'}{I} - 4\Big(\frac{A'}{A}\Big)' = 0.$$

Таким образом, либо $\vartheta = \vartheta(\Psi)$, либо все коэффициенты при степенях $\cos\vartheta$ равны нулю. Во втором случае уравнения имеют интегралы

$$A^2 = DI'I^{-2} > 0, \quad \frac{A'}{A} + \frac{I'}{I} - \frac{1}{2} = EI, \quad \frac{A'}{A} + \frac{1}{8}\,ED = HI^{-1},$$

где D, E, H — постоянные. Исключая A^2 из этих уравнений, получаем два уравнения для I. Условие совместности имеет вид $ED = 4$. Уравнение для I интегрируется, а из (21) определяется $k(I)$:

$$\Psi = \int \frac{dI}{EI^2 + I - H}, \qquad k' = 4\,\frac{EI^2 + I - H}{EI^2} \exp\Big(- \int \frac{dI}{EI^2 + I - H}\Big).$$

Для определенных функций $I(\Psi)$, $k(I)$ совместные уравнения подмодели имеют вид

$$\begin{gathered} \Psi_{r_1} = 2 + A\cos\vartheta, \qquad \Psi_\varphi = A\sin\vartheta, \\ \vartheta_{r_1} = 2^{-1}EIA(2 + A\cos\vartheta)\sin\vartheta, \qquad \vartheta_\varphi = 1 - 2HI^{-1} - 2^{-1}EIA(2 + A\cos\vartheta)\cos\vartheta, \end{gathered} \tag{22}$$

причем $I' = EI^2 + I - H$, $EI^2A^2 = 4I'$.

Система (22) интегрируется при $H = 0$. В этом случае $I = \mathrm{e}^{\Psi}(1 - E\,\mathrm{e}^{\Psi})$, $A = 2E^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-\Psi/2}$. Для функции $\chi = E^{1/2}\,\mathrm{e}^{\Psi/2}$ уравнения (22) принимают вид

$$\begin{gathered} \chi_{r_1} = \chi + \cos\vartheta, \qquad \chi_\varphi = \sin\vartheta, \\ \vartheta_{r_1} = \frac{2}{1-\chi^2}\,(\chi + \cos\vartheta)\sin\vartheta, \qquad \vartheta_\varphi = 1 - \frac{2}{1-\chi^2}\,(\chi + \cos\vartheta)\cos\vartheta. \end{gathered} \tag{23}$$

Последние два уравнения в (23) интегрируются:

$$\begin{gathered} \mathrm{e}^{r_1} = J(s)\sin\vartheta, \qquad s = \vartheta - \varphi, \\ 2\Big(\cos\vartheta + \frac{J'}{J}\sin\vartheta\Big)(\chi + \cos\vartheta) + \chi^2 = 1. \end{gathered}$$

Здесь $J(s)$ — произвольная функция. Первые два уравнения в (23) выполняются при условии

$$\Big(\frac{J'}{J}\Big)' = \Big(\frac{J'}{J}\Big)^2 + 1 \;\Rightarrow\; J\cos s = J_0,$$

где J_0 — постоянная. Таким образом, решение системы (23) задается в неявной форме

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \operatorname{ctg}\varphi + \frac{J_0}{r\cos\varphi}, \qquad \chi^2 + \frac{2\cos\varphi}{\cos(\vartheta - \varphi)}\,(\chi + \cos\vartheta) = 1.$$

В случае $\vartheta = \vartheta(\Psi)$ получаем систему уравнений для функций $I(\Psi)$, $\vartheta(\Psi)$ с любой функцией $k(I)$:

$$\begin{gathered} 2\,\frac{A'}{A}\sin\vartheta + 2\vartheta'\cos\vartheta = -\vartheta' A, \\ -2\vartheta'\sin\vartheta + 2\Big(\frac{A'}{A} + \frac{I'}{I}\Big)\cos\vartheta = -A' - A\Big(\frac{I'}{I} - \frac{1}{2}\Big). \end{gathered}$$

При $k = -I$ решение этой системы задается формулами

$$\begin{gathered} (G\sin\vartheta - \cos\vartheta)\,\mathrm{e}^{\Psi/2} = 2, \qquad I = I_0\frac{\sin\vartheta}{G\cos\vartheta + \sin\vartheta}, \\ \int \mathrm{e}^{-\Psi/2}\,\frac{d\Psi}{\sin\vartheta} = G\ln r + \varphi, \end{gathered}$$

где G, I_0 — произвольные постоянные.

Заключение. Проведен симметрийный анализ стационарной двумерной вихревой модели, описывающей течения идеального газа с переменной энтропией. С использованием четырех интегралов подмодель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка для функции тока и удельного объема. В системе имеется одна произвольная функция двух переменных, которая выражается через уравнение состояния и произвольных функций интегралов. Найдены преобразования эквивалентности. Приведены произвольные элементы системы, при которых допускаемая группа расширяется. Построены оптимальные системы подгрупп расширенных групп, которые представляют собой классификацию групповых подмоделей рассматриваемой модели. Приведены примеры инвариантных и частично инвариантных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Крайко А. Н.** Теоретическая газовая динамика. Классика и современность. М.: Торус пресс, 2010.
3. **Черный Г. Г.** Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
4. **Годунов С. К.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. М.: Наука, 1976.
5. **Самарский А. А.** Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. М.: Наука, 1980.
6. **Овсянников Л. В.** Программа “Подмодели”. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
7. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы “Подмодели” для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 349–358.
8. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
9. **Khabirov S. V.** Vortex steady planar entropic flows of ideal gases // J. Math. Sci. 2019. V. 236, N 6. P. 679–686.
10. **Хабиров С. В.** Инвариантные плоские установившиеся изоэнтропические вихревые течения газа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, вып. 3. С. 317–331.
11. **Ibragimov N. H.** Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. Chichester: John Wiley and Sons, 1999.
12. **Чиркунов Ю. А.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2012.
13. **Ибрагимов Н. Х.** Группа преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
14. **Дубровин Б. А.** Современная геометрия / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1979.
15. **Хабиров С. В.** Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1396–1406.

Поступила в редакцию 11/III 2021 г.,
после доработки — 9/IV 2021 г.
Принята к публикации 26/IV 2021 г.