

УДК 539.375

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ С БОКОВЫМ ТРЕЩИНОПОДОБНЫМ ДЕФЕКТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ С ЛИНЕЙНЫМ РАЗМЕРОМ

В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула, Россия  
E-mails: vadim@tsu.tula.ru, len4ic92@gmail.com, markin@tsu.tula.ru

Предложена модель физического разреза, описывающая напряженно-деформированное состояние в упругопластических телах, ослабленных трещинами. Численно решается задача о плоском деформированном и напряженном состоянии тела конечных размеров произвольной геометрии, ослабленного физическим разрезом, которая сводится к решению системы двух вариационных уравнений относительно полей перемещений в частях тела, граничащих со слоем взаимодействия. Для материала со свойствами, близкими к свойствам сплава марки Д16Т, выполнены оценки введенного в модель трещины линейного параметра, проведены расчеты критических состояний тел с боковыми трещинами при нормальном отрыве.

Ключевые слова: трещина, упругопластические деформации, характерный размер, метод конечных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20180614

**Введение.** Напряженно-деформированное состояние поврежденных трещиной тел определяется моделью данного дефекта в твердом теле. С использованием классического представления трещины в виде математического разреза можно достаточно точно прогнозировать прочность конструкций из хрупких материалов в случае, когда область пластического деформирования незначительна и используется концепция квазихрупкого разрушения Ирвина — Орована. При этом процесс перехода от упругого состояния к пластическому и развития пластических зон на стадии предразрушения не учитывается, что обусловлено сингулярностью поля напряжений в концевой зоне трещины. Сингулярность можно устранить путем введения сил сцепления [1], но при этом необходимо задать закон распределения этих сил. В частности, в случае нормального отрыва при плоском напряженном состоянии интенсивность этих сил полагается постоянной и равной пределу текучести материала [2].

Классическим условием начала движения трещины является достижение предельного значения коэффициента интенсивности напряжений — вязкости разрушения. В работе [3] с использованием соотношения размерностей через вязкость разрушения введен линейный параметр для модели математического разреза, в [4] — линейный размер, характеризую-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Тульского государственного университета в рамках научного проекта № 2017-12ПУБЛ.

© Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Маркин А. А., 2018

щий элементарную ячейку разрушения. В работах [5, 6] в случае плоского напряженного состояния параметр структуры ассоциируется с толщиной пластической области в концевой зоне трещины. В [7, 8] линейный размер введен в качестве параметра осреднения сингулярных решений. Заметим, что в указанных работах линейный размер определяется с использованием решения задачи теории упругости для трещины нормального отрыва в виде математического разреза и не является параметром, входящим в уравнения задачи. Таким образом, соответствие найденного параметра структуры критическим состояниям при произвольном нагружении тел с трещиной неочевидно.

Структурный параметр содержится в различных вариантах моментной теории упругости [9–11]. Определению соответствующих материальных постоянных посвящен ряд работ [12–14].

В работе [15] для определения эффективной прочности тел, толщина которых существенно меньше остальных размеров, а свойства и (или) состав изменяются по толщине, предложен способ оценки эффективной прочности ледяного покрова при продольном сжатии.

Исследование различных масштабных уровней [16–19] и микроструктуры материала [20] при образовании трещин показывает, что линейный размер играет важную роль в формировании новых материальных поверхностей. В работе [21] отмечена необходимость определения величины представительного объема для проведения анализа разрушения, а также исследовано влияние размеров образца на возникновение и рост микро- и макродефектов.

В работах [22, 23] рассмотрена модель, в которой явно вводится линейный параметр  $\delta_0$ , ассоциируемый с толщиной слоя взаимодействия и определяющий масштабный уровень, на котором распределение напряжений и деформаций по толщине слоя можно считать постоянным. Определение напряженно-деформированного состояния в теле с трещиноподобным дефектом в виде физического разреза с неопределенной формой его вершины при произвольной внешней нагрузке сводится к решению связанных задач теории упругопластичности для двух частей тела, граничащих со слоем взаимодействия [23]. В эти задачи входит линейный размер. В соответствии с концепцией Нейбера — Новожилова [7, 8] полагается, что критическое состояние соответствует разрушению частицы слоя с площадью сечения  $\delta_0 \times \delta_0$ . При этом основной проблемой является выбор линейного параметра  $\delta_0$ .

В данной работе рассматривается процесс деформирования тела конечных размеров, ослабленного физическим разрезом, под действием внешней нагрузки, симметричной относительно плоскости, по которой происходит разделение тела. Предложена итерационная процедура определения параметра  $\delta_0$  на основе решения обратной задачи при условии, что критическая нагрузка известна.

**1. Постановка задачи.** На рис. 1 показана схема тела с трещиной в виде физического разреза шириной  $\delta_0$ . Процесс нагружения полагаем квазистатическим и изотермическим. Условие равновесия запишем в вариационной форме

$$\iint_{S_{1+2+3}} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \int_L \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где индекс 3 соответствует материальной области, расположенной на продолжении физического разреза, 1, 2 — областям, смежным с областью 3;  $\mathbf{P}$  — внешняя нагрузка на контуре  $L$ ;  $\sigma$  — тензор напряжений;  $\varepsilon$  — тензор деформаций;  $\mathbf{u}$  — поле перемещений.

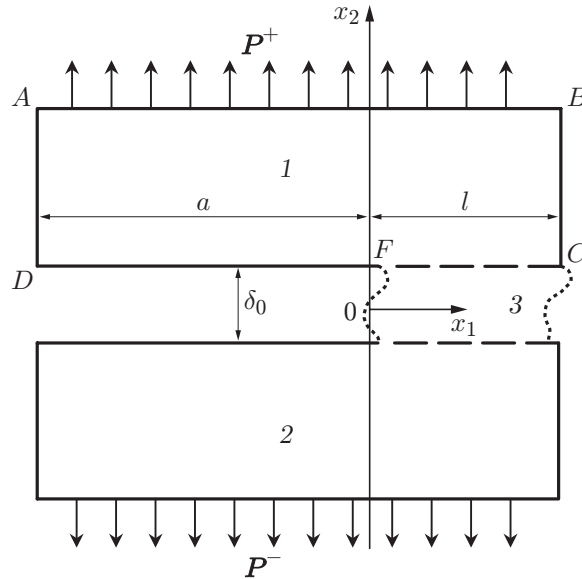


Рис. 1. Схема нагружения тела с трещиноподобным дефектом:  
 1, 2 — области, примыкающие к слою взаимодействия, 3 — слой взаимодействия

В слое 3 средние напряжения, деформации и перемещения определяются через их граничные значения следующим образом [22, 23]:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{\sigma_{21}^- + \sigma_{21}^+}{2}, \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{\sigma_{22}^- + \sigma_{22}^+}{2};$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) &= \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0}, & \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right); \\ \frac{\partial \bar{u}_1(x_1)}{\partial x_2} &= \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0}, & \frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right); \\ \bar{u}_1(x_1) &= (u_1^+(x_1) + u_1^-(x_1))/2, & \bar{u}_2(x_1) &= (u_2^+(x_1) + u_2^-(x_1))/2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{u}^+$ ,  $\mathbf{u}^-$  — векторы перемещения верхней и нижней границ области 3.

Из выражения (3) получаем представление средней сдвиговой деформации вдоль слоя:

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1(x_1)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right).$$

Напряжения  $\sigma_{21}^+$ ,  $\sigma_{21}^-$ ,  $\sigma_{22}^+$ ,  $\sigma_{22}^-$  на границе области 3 связаны со средними напряжениями условиями равновесия

$$\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = \sigma_{21}^- - \sigma_{21}^+, \quad \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1} = \sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+ \quad (4)$$

с учетом симметрии касательных напряжений.

Принимаем, что векторы напряжений на сопряженных границах слоя 3 и векторы напряжений на сопряженных границах тела равны и противоположно направлены. Кроме того, задается жесткое сцепление по границам области 3 и областей 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2), \quad \mathbf{u}^- = \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2), \quad x_1 \in [F, C]. \quad (5)$$

Подставим выражения (2), (4) в (1), рассматривая напряжения на границах слоя в качестве внешней нагрузки для тел 1 и 2. При отсутствии внешних нагрузок на торцах слоя решение задачи о равновесии тела с трещиной сводится к совместному решению двух вариационных уравнений [18]:

— для тела 1

$$\int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dl + \int_l \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dl + \frac{\delta_0}{2} \left( \int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dl + \int_l \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dl \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^+ \cdot \delta \mathbf{u} dl; \quad (6)$$

— для тела 2

$$\int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dl - \int_l \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^- dl + \frac{\delta_0}{2} \left( \int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dl + \int_l \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dl \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^- \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (7)$$

Здесь  $l$  — граница сопряжения слоя 3 со смежными телами 1 и 2;  $L_1, L_2$  — границы приложения внешней нагрузки к телам 1 и 2 соответственно.

Следует отметить, что формулировка (6), (7) дана без ограничения на вид нагружения и форму тела. В данной работе рассматривается случай трещины нормального отрыва. Для этого случая в силу симметрии нагружения в слое выполняются условия  $\bar{\sigma}_{21} \equiv 0$ ,  $u_1^+ = u_1^-$ ,  $u_2^+ = -u_2^-$ . Следовательно, при решении задачи достаточно рассмотреть только тело 1, для которого уравнение равновесия запишем в виде

$$\int_{S_{ABCD}} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dl + \frac{\delta_0}{2} \int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dl = \int_L \mathbf{P}^+ \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (8)$$

где  $L$  — граница, на которой приложена внешняя нагрузка, обеспечивающая напряженное состояние нормального отрыва.

Уравнение (8) необходимо замкнуть определяющими соотношениями, связывающими напряжения и деформации. Поведение материала вне слоя при активном нагружении определяем следующими физическими соотношениями деформационной теории пластичности [24]:

$$\tilde{\sigma} = 2G_c \tilde{\varepsilon}; \quad (9)$$

$$p = 3K\theta. \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{\sigma}$  — девиатор тензора напряжений;  $\tilde{\varepsilon}$  — девиаторная составляющая тензора деформаций;  $\theta = \varepsilon \cdot \varepsilon$ ;  $K$  — модуль объемного сжатия;  $p = \sigma \cdot \varepsilon$ .

Предполагается, что свойства материала характеризуются универсальной зависимостью  $T = T(\gamma)$  — “единой кривой”. На рис. 2 эта зависимость представлена в виде двухзвенной прямой ( $\gamma$  — интенсивность деформации сдвига:  $\gamma = 2\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)}/\sqrt{6}$ ;

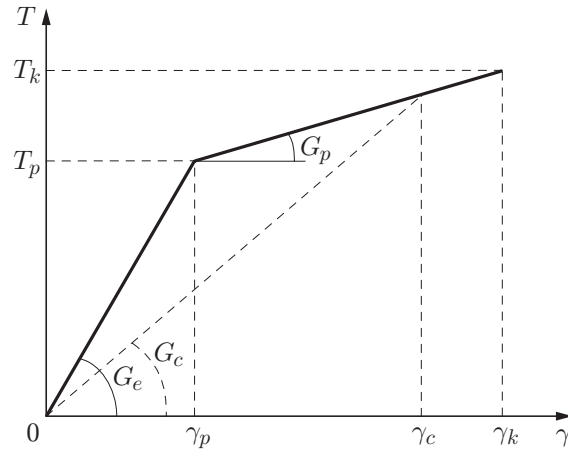


Рис. 2. Модель упругопластического поведения материала

$G$  — сдвиговой модуль ( $G = G_e$  при  $T \leq T_p$ ,  $G = G_p$  при  $T > T_p$ );  $T_p$  — предел текучести;  $T$  — интенсивность касательных напряжений:  $T = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}/\sqrt{6}$ ;  $G_c = T/\gamma$  — секущий модуль сдвига).

Для материала слоя определяющие соотношения считаем справедливыми для средних по толщине слоя характеристик напряженно-деформированного состояния:

$$\bar{\sigma} = 2G_c \bar{\varepsilon}, \quad \bar{p} = 3K\bar{\theta}. \tag{11}$$

Таким образом, решение системы (8)–(11) сводится к определению поля перемещений  $\mathbf{u}(x_1, x_2)$  в прямоугольной области  $ABCD$  (см. рис. 1). При этом на границе сопряжения  $x_1 \in [F, C]$ ,  $x_2 = \delta_0/2$  должно выполняться условие (5), связывающее перемещения границ тела и слоя взаимодействия.

**2. Метод дискретного решения.** Для численного решения системы (8)–(11) можно использовать различные дискретные методы, обеспечивающие численную сходимость процесса при увеличении числа элементов, на которые разбивается область. В частности, для дискретизации задачи будем использовать метод конечных элементов. Следует отметить, что при построении решения формально не накладываются ограничения на размер конечного элемента, который для обеспечения численной сходимости решения может быть меньше параметра  $\delta_0$ . Однако условия разрушения слоя взаимодействия формулируются для элементов слоя размером  $\delta_0 \times \delta_0$  с использованием процедуры осреднения характеристик напряженно-деформированного состояния, полученных в результате решения системы (8)–(11), что обусловлено основным физическим допущением, в соответствии с которым разрушение происходит во всей частице материала с характерным размером  $\delta_0$ . Используем метод конечных элементов с квадратичным распределением поля перемещений. В этом случае в пределах каждого конечного элемента напряжения и деформации распределены по линейному закону. Интегрируя по площади  $S$  конечного элемента компоненты тензора напряжений и деформаций, определяем средние по элементу значения

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} ds, \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{ij} ds. \tag{12}$$

Секущий модуль каждого конечного элемента будем определять с использованием средних компонент (12), считая секущий модуль в пределах конечного элемента постоянным.

В результате решения задачи (8)–(11) получаем распределение поля перемещений в узловых точках тела 1, в том числе на границе со слоем 3. После нахождения соответствующего решения возникает задача определения напряженно-деформированного состояния в слое взаимодействия.

При решении задачи теории упругопластичности будем использовать вариант метода упругих решений А. А. Ильюшина [24]. В работе [25] показано, что данный метод сходится со скоростью, равной скорости схождения геометрической прогрессии.

**3. Оценка введенного линейного размера.** Если для данного материала определен параметр  $\delta_0$ , то для определения критической внешней нагрузки  $P_{cr}$  в рамках модели (8)–(11) необходимо знать характеристики материала, используемые для решения задачи теории упругопластичности с применением деформационной теории. Внешняя нагрузка, соответствующая разрушению торцевого  $\delta$ -элемента, является критической. В частности, принимая энергетическое условие разрушения [26], в соответствии с которым разрушение  $\delta$ -элемента происходит при достижении удельной (отнесенной к объему  $\delta$ -элемента) свободной энергии  $\psi_k$ , получаем

$$\psi_k = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{\tau^2}{4G_e}, \quad (13)$$

где  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ;  $\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$  — свертка девиаторных составляющих тензора напряжений.

Кроме того, будем использовать критерий Ренкина, согласно которому разрушение  $\delta$ -элемента происходит при достижении критического значения максимального главного растягивающего напряжения:  $\sigma^{\max} = \sigma_k$ .

Однако значение  $\delta_0$  априори неизвестно. Покажем возможность определения масштабного параметра, в случае если для образца известна критическая внешняя нагрузка  $P_{cr}$ .

Пусть в образце определена критическая нагрузка  $P_{cr}$ . Из системы уравнений (8)–(11) с данным значением  $P_{cr}$  и некоторым значением  $\delta_0^*$  определяем напряженно-деформированное состояние в теле и слое и вычисляем удельную свободную энергию  $\psi$  в торцевом элементе слоя длиной  $\delta_0^*$ . Сравниваем значение  $\psi$  с критическим значением  $\psi_k$ . Как показывает расчет, при неизменной внешней нагрузке функция  $\psi(\delta_0^*)$  является монотонно убывающей. Определив два значения  $\delta_0^{*1}$ ,  $\delta_0^{*2}$ , таких что  $\psi(\delta_0^{*1}) > \psi_k$ ,  $\psi(\delta_0^{*2}) < \psi_k$ , методом половинного деления можно найти величину  $\delta_0$ , для которой с заданной степенью точности выполняется равенство  $\psi(\delta_0) = \psi_k$ . В настоящей работе погрешность не превышала 0,1 %. Значение  $\delta_0$  в торцевом элементе слоя вычисляется по критерию Ренкина аналогично.

Определим значение  $\delta_0$  для материала, свойства которого близки к свойствам сплава марки Д16(Т), при деформировании пластины с боковой трещиной с использованием решения задачи (8)–(11). Выбраны следующие значения материальных характеристик: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 7,8 \cdot 10^{10}$  Па, предел текучести  $T_p = 3 \cdot 10^8$  Па, предел прочности по напряжениям  $\sigma_k = 4,2 \cdot 10^8$  Па, предел прочности по деформациям  $\varepsilon_b = 0,12$ , вязкость разрушения при плоской деформации  $K_{IC} = 3,5 \cdot 10^7$  Па $\cdot$ м $^{1/2}$ , расчетные модули:  $G_e = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па,  $G_p = 5,2 \cdot 10^8$  Па,  $K = 6 \cdot 10^{10}$  Па, критическая свободная энергия  $\psi_k = 1,2 \cdot 10^6$  Дж/м $^3$ .

С использованием материальных характеристик получим универсальную зависимость  $T(\gamma)$ , а также критическую величину свободной энергии. Критическая величина главного напряжения равна  $\sigma^{\max} = \sigma_b$ . Так как при растяжении  $\sigma = \sigma_2/3$ ,  $\tau^2 = 2\sigma_2^2/3$ , то из (13) получаем

$$\psi_k = \left( \frac{1}{18K} + \frac{1}{6G_e} \right) \sigma_b^2.$$

Вариационное уравнение (8) для области 1 (см. рис. 1) решалось при следующих граничных условиях:  $\sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = P_{cr}$  на границе  $AB$ ;  $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$  на границах  $BC$  и  $AD$ ;  $\sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$  на границе  $DF$ . Граничное условие на границе  $FC$  является естественным краевым условием для уравнения (8).

Рассмотрим два варианта достижения критического состояния  $\delta$ -элемента. В первом варианте вплоть до момента разрушения поведение материала является упругим (квасхрупкое разрушение). При определении  $\delta_0$  во втором варианте на стадии предразрушения образуются области пластичности. Расчет  $\delta_0$  проведем для условий плоского деформированного состояния (ПДС) ( $\varepsilon_{i3} = 0, i = 1, 2, 3$ ). Для нахождения  $\delta_0$  необходимо знать величину критической внешней нагрузки  $P_{cr}$  хотя бы для одной схемы нагружения образца с боковой трещиной. Критическую нагрузку определим по формуле, приведенной в работе [27]:

$$P_{cr} = \frac{K_{IC}(1 - a/l_{AB})}{\sqrt{\pi a}(1,11 + 5(a/l_{AB})^4)}. \quad (14)$$

При использовании данной формулы предполагается, что вязкость разрушения является универсальной при различных значениях ширины образца и длины боковой трещины. При проведении расчетов выбирались следующие схемы с различными размерами образца: 1)  $l_{AB} = 0,4$  м; 2)  $l_{AB} = 0,2$  м; 3)  $l_{AB} = 0,1$  м; 4)  $l_{AB} = 0,05$  м; 5)  $l_{AB} = 0,025$  м. Во всех схемах полагалось  $a = 0,01$  м,  $l_{AB} = l_{BC}$ .

Состояние предразрушения в первом элементе слоя будем определять на основе средних характеристик напряженно-деформированного состояния  $\hat{\sigma}_{ij}^l$  и  $\hat{\varepsilon}_{ij}^l$  в пределах квадрата с длиной стороны  $\delta_0$  в слое по формулам

$$\hat{\sigma}_{ii} = \frac{1}{x_1^k - x_1^i} \int_{x_1^i}^{x_1^k} \bar{\sigma}_{ii} dx_1, \quad \hat{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{x_1^k - x_1^i} \int_{x_1^i}^{x_1^k} \bar{\varepsilon}_{ii} dx_1, \quad i = 1, 2,$$

где  $x_1^k = x_1^i + \delta_0$ . Размер конечного элемента выбирается таким образом, чтобы относительная погрешность определения напряженно-деформированного состояния не превышала 0,1 %.

С использованием предлагаемой процедуры нахождения параметра  $\delta_0$  для схемы 1 в предположении упругого поведения материала вплоть до момента разрушения получены следующие значения:  $\delta_0 = 3,95 \cdot 10^{-3}$  м при выполнении критерия Ренкина и  $\delta_0 = 3,05 \cdot 10^{-3}$  м при выполнении энергетического критерия.

Для найденных толщин слоя в рамках соответствующего критерия разрушения для схем 2–5 определены критические нагрузки при упругом поведении материала. Обозначим через  $P_e^1$  критическую нагрузку при выполнении критерия Ренкина, через  $P_e^2$  — при выполнении энергетического критерия. Отношения вычисленных значений к нагрузке, определяемой по формуле (14), приведены в табл. 1.

Для схемы 1 в предположении упругопластического поведения материала найдены следующие значения толщины слоя:  $\delta_0 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  м при выполнении критерия Ренкина и  $\delta_0 = 2,32 \cdot 10^{-3}$  м при выполнении энергетического критерия. В табл. 2 приведены отношения значений критической нагрузки, полученные в результате решения задачи теории упругопластичности.

На рис. 3 показано распределение зон пластичности в момент достижения критического состояния в соответствии с критерием Ренкина для схем 1, 3, 5 при следующих значениях параметров зоны пластичности:  $l_1 = 2,2 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_3 = 2,2 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_3 = 4,0 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_5 = 2,6 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_5 = 3,8 \cdot 10^{-3}$  м. Видно, что во всех рассмотренных случаях распределение зон пластичности является практически одним и тем же, а их

Таблица 1

Отношение критических нагрузок при упругом поведении материала		
Номер схемы	$P_e^1/P_{cr}$	$P_e^2/P_{cr}$
1	1,000	1,000
2	1,012	1,000
3	1,025	1,009
4	1,005	0,984
5	0,985	0,944

Таблица 2

Отношение критических нагрузок при упругопластическом поведении материала		
Номер схемы	$P_e^1/P_{cr}$	$P_e^2/P_{cr}$
1	1,000	1,000
2	1,005	0,985
3	1,022	1,015
4	1,005	1,004
5	0,948	0,927

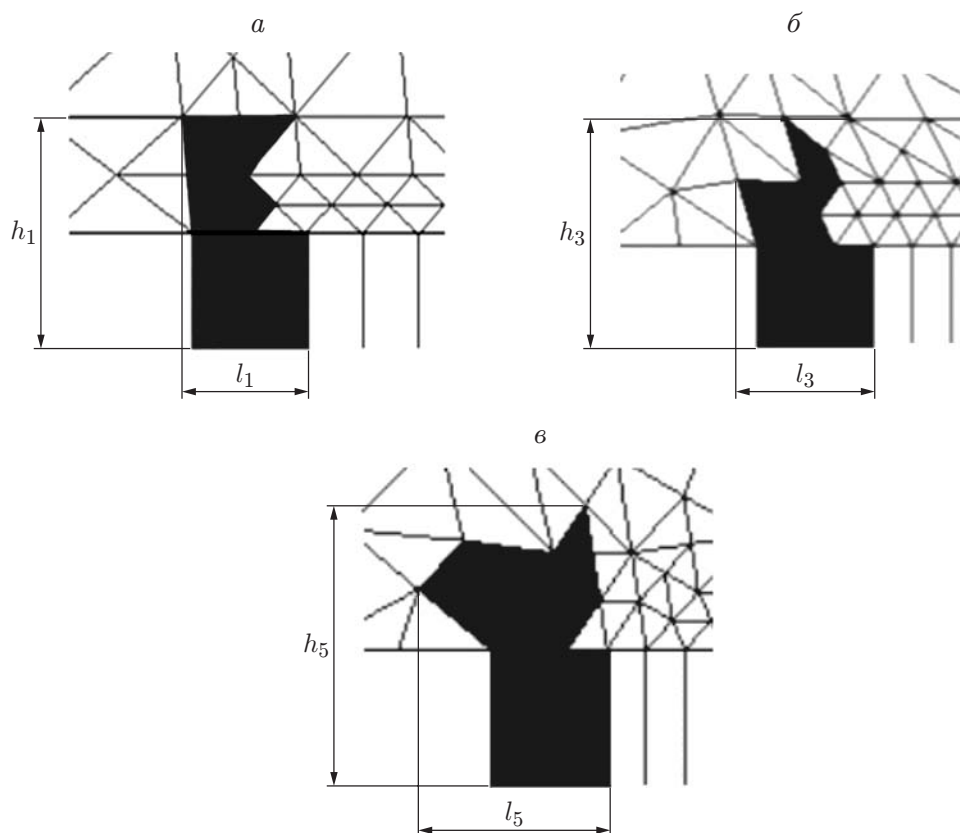


Рис. 3. Зоны пластичности в случае плоской деформации:  
 а — схема 1, б — схема 3, в — схема 5

размер мал по сравнению с длиной трещины. Данный результат подтверждает гипотезу квазихрупкого разрушения в случае ПДС.

**4. Расчет критической нагрузки в случае плоского напряженного состояния.** Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в случае плоского напряженного состояния (ПНС) образец с трещиной выдерживает большую нагрузку, чем в случае ПДС [28]. Постоянное для данного материала значение  $K_{IC}$  достигается при значительной толщине образца, когда напряженно-деформированное состояние близко к плоскому деформированному. При малых толщинах вязкость разрушения изменяется и выбор критерия разрушения на основе асимптотического решения неоднозначен. В этом случае вводится другая критериальная характеристика, такая как вязкость разрушения при плоском напряженном состоянии. Еще одной критериальной величиной при плоском напряженном состоянии является раскрытие трещины. Таким образом, для одного и того же материала



Таблица 3

Номер схемы	Отношение критических нагрузок при плоском напряженном состоянии и плоской деформации	
	$P_2/P_1$	
	$\delta_0 = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м	$\delta_0 = 2,32 \cdot 10^{-3}$ м
1	1,72	1,70
2	1,69	1,70
3	1,63	1,62
4	1,54	1,54
5	1,36	1,36

и конфигурации трещины применяется несколько критериев. Это обусловлено отсутствием учета реального развития пластических областей и как следствие напряженного состояния в концевой зоне трещины. В случае применения предлагаемого подхода при задании линейного размера  $\delta_0$ , используя решение задачи теории упругопластичности, в рамках единого критерия можно проводить расчеты на трещиностойкость. В качестве локальных критериев разрушения выбираются критерий Ренкина по максимальному главному напряжению и энергетический критерий по удельной свободной энергии в элементарном объеме слоя с характерным размером  $\delta_0$ . Рассмотрим задачу определения критической нагрузки при ПНС тел малой толщины, нагружаемых по тем же схемам и с теми же размерами в плане, что и в условиях ПДС.

В табл. 3 представлены результаты решения упругопластической задачи в рамках критерия Ренкина и энергетического критерия при достижении в первом элементе слоя размером  $\delta_0 \times \delta_0$  предела прочности. Приведенные в табл. 3 значения критической нагрузки  $P_1$  определялись из решения задачи при ПДС, значения  $P_2$  — из решения задачи при ПНС. Во второй графе табл. 3 приведены результаты расчета по критерию Ренкина для толщины слоя, равной  $\delta_0 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  м, в третьей — результаты расчета по энергетическому критерию для толщины слоя, равной  $\delta_0 = 2,32 \cdot 10^{-3}$  м.

Результаты анализа табл. 3 показывают, что значения критической нагрузки, рассчитанные по критерию Ренкина и энергетическому критерию, практически совпадают. Данная нагрузка, полученная в соответствии с критерием Ренкина, на  $36 \div 72$  % превышает расчетную критическую нагрузку образца при плоской деформации. Это обусловлено существенным различием зон пластичности в области предразрушения при плоском напряженном состоянии и плоской деформации. Если при ПДС область пластичности локализуется в концевой области трещины с большой гидростатической составляющей тензора напряжений, то при ПНС область пластических деформаций значительно больше, а гидростатическая составляющая тензора напряжений в силу  $\sigma_{33} = 0$  меньше соответствующей компоненты при ПДС.

На рис. 4 приведены области пластического деформирования при достижении критического состояния в соответствии с критерием Ренкина для схем 1, 3, 5 при плоском напряженном состоянии. Получены следующие значения параметров конфигурации зоны пластичности:  $l_1 = 297 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_1 = 214 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_3 = 66 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_3 = 48 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_5 = 11 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_5 = 9 \cdot 10^{-3}$  м;  $l'_5 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $h'_5 = 4 \cdot 10^{-3}$  м. Результаты сравнения областей пластичности в случаях плоского напряженного и плоского деформированного состояний показывают, что размер пластической области, соответствующей ПНС, существенно больше. Распределение зон пластичности в случае ПНС зависит от размеров образца и разреза, поэтому их необходимо учитывать при определении критического состояния [29].

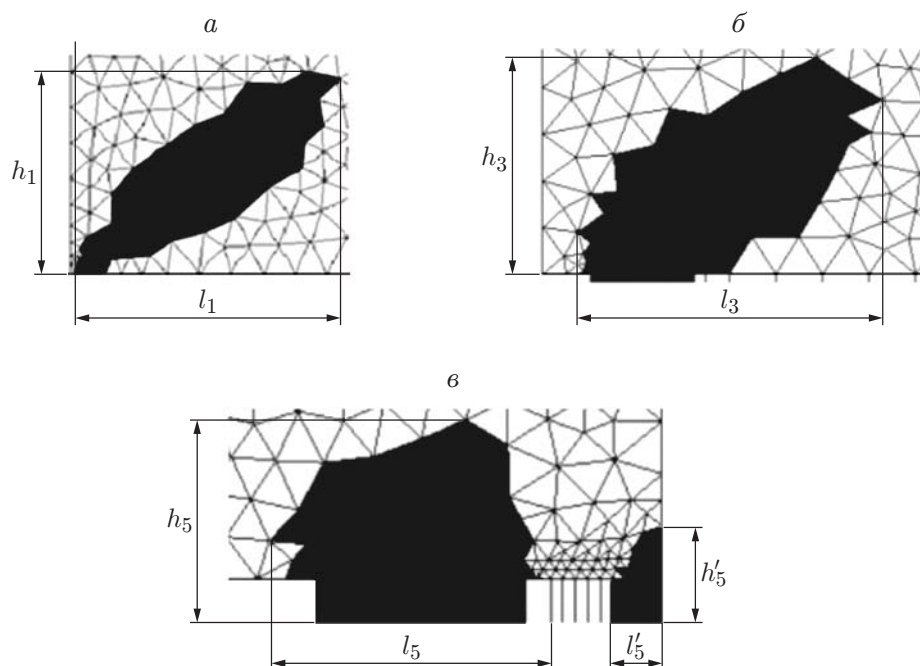


Рис. 4. Зоны пластичности в случае плоского напряженного состояния:  
 а — схема 1, б — схема 3, в — схема 5

Следует отметить, что для схемы 5 пластическая область образуется не только в концевой зоне трещины, но и на краю образца. Для схемы 1, для которой значение отношения критических нагрузок  $P_2/P_1$  является максимальным, линейные размеры пластической области оказались наибольшими.

**Заключение.** В отличие от подходов, основанных на использовании асимптотических представлений полей перемещений и напряжений, предложенная в работе модель физического разреза учитывает зарождение и рост пластических областей при деформировании, предшествующем достижению критической нагрузки.

Предложен итерационный алгоритм определения параметра  $\delta_0$  как физической постоянной материала, основанный на решении обратной упругопластической задачи, в случае если для данной схемы нагружения известна критическая нагрузка. При этом можно использовать известные результаты определения критической нагрузки для схем, в которых длина трещины значительно меньше характерных линейных размеров тела и предположение о квазихрупком разрушении обоснованно.

Проведенные расчеты показали, что критические нагрузки, полученные при одном и том же значении  $\delta_0$  для одной и той же схемы, в случае ПНС больше, чем в случае ПДС.

При решении упругопластических задач трещиностойкости с использованием предлагаемого подхода требуется более подробная информация о свойствах материала, чем при решении задачи в предположении квазихрупкого разрушения. В частности, необходимо не только ввести параметр  $\delta_0$ , но и построить “единую кривую”, связывающую интенсивности напряжений и деформаций, а также задать условия пластичности и прочности для данного материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Engng Fracture Mech. 2003. V. 70, N 14. (Special issue: Cohesive models).
2. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2. P. 100–104.

3. **Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.** Разрушение и формирование структуры // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 4. С. 111–126.
4. **Петров Ю. В.** Квантовая аналогия в механике разрушения // Физика твердого тела. 1996. Т. 38, № 11. С. 3385–3393.
5. **Кургузов В. Д., Астапов Н. С., Астапов И. С.** Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 173–185.
6. **Kornev V. M., Kurguzov V. D.** Multiparametric sufficient criterion of quasi-brittle fracture for complicated stress state // Engng Fracture Mech. 2008. V. 75, N 5. P. 1099–1113.
7. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: ОГИЗ: Гостехтеоретиздат, 1947.
8. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. № 2. С. 212–222.
9. **Савин Г. Н.** Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та, 1965.
10. **Аэро Э. Л.** Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой // Успехи механики. 2002. № 3. С. 130–176.
11. **Победря Б. Е., Омаров С. Е.** Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2007. № 3. С. 56–58.
12. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. Т. 51, № 5. С. 61–67.
13. **Ревуженко А. Ф.** Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 5. С. 45–52.
14. **Омаров С. Е.** Определение материальной константы в задаче о равновесии бесконечной упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. Т. 44, № 5. С. 144–149.
15. **Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.** Об оценке эффективной прочности тел при сжатии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 80–93.
16. **Needleman A., van der Giessen E.** Micromechanics of fracture: connecting physics to engineering // MRS Bull. 2001. V. 26, N 3. P. 211–214.
17. **Панин В. Е.** Структурные уровни пластической деформации и разрушения / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, В. И. Данилов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
18. **Доможиров Л. И., Махутов Н. А.** Иерархия трещин в механике циклического разрушения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 5. С. 17–26.
19. **Баренблатт Г. И., Голицын Г. С.** Критерии подобия и масштабы для кристаллов // Физ. мезомеханика. 2017. Т. 20, № 1. С. 116–119.
20. **Carrol J. D., Abuzaid W. Z., Lambros J., Sehitoglu H.** On the interactions between strain accumulation, microstructure, and fatigue crack behavior // Intern. J. Fracture. 2013. V. 180. P. 223–241.
21. **Волегов П. С., Грибов Д. С., Трусов П. В.** Поврежденность и разрушение: обзор экспериментальных работ // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18, № 3. С. 11–24.
22. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Нахождение предела упругого деформирования в концевой области физического разреза при произвольном нагружении его берегов // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 174–183.
23. **Glagolev V. V., Glagolev L. V., Markin A. A.** Stress-strain state of elastoplastic bodies with crack // Acta Mech. Solida Sinica. 2015. V. 28, N 4. P. 375–383.
24. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.

25. **Ворович И. И., Красовский Ю. П.** О методе упругих решений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 4. С. 740–743.
26. **Хан Х.** Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988.
27. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
28. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
29. **Клевцов Г. В., Ботвина Л. Р.** Микро- и макрозона пластической деформации как критерии предельного состояния материала при разрушении // Пробл. прочности. 1984. № 4. С. 24–28.

*Поступила в редакцию 13/XI 2017 г.,  
в окончательном варианте — 13/II 2018 г.*

---