

УДК 536.24.001.57

Гидродинамика и теплообмен при пульсирующем с большими амплитудами ламинарном течении в каналах

Е.П. Валужева, М.С. Пурдин

*Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»*

E-mail: ep.valueva@gmail.com

Исследована теплоотдача при наложении высокочастотных колебаний на ламинарный поток жидкости в плоском и прямоугольных каналах на удалении от входа в обогреваемый участок при граничных условиях на стенках канала первого и второго рода. Для плоского канала использованы полученные аналитические выражения для профилей амплитуды и фазы колебаний продольной скорости в зависимости от безразмерной частоты колебаний в виде функций действительного переменного. Показано, что среднее по периметру канала и периоду колебаний число Нуссельта при больших амплитудах колебаний средней по сечению скорости может существенно превышать его стационарное значение. Найдено предельное значение отношения чисел Нуссельта при пульсирующем и стационарном течениях в области высоких частот колебаний.

Ключевые слова: теплообмен, пульсирующее ламинарное течение, плоский канал, прямоугольные каналы.

Введение

Изучение пульсирующего ламинарного течения в прямоугольных каналах представляется важным для целого ряда практических приложений. Примером использования подобных каналов являются, например, микробиочипы, применяемые в медико-биологических исследованиях, которые представляют собой систему прямоугольных каналов. Теплообменники с прямоугольными каналами используются для охлаждения электронной аппаратуры, в химических реакторах. Наложение пульсаций расхода на ламинарное течение может служить одним из методов интенсификации теплообмена. Большой проблемой всегда являлась очистка стенок каналов от отложений, приводящих к увеличению термического сопротивления, гидравлических потерь и уменьшению коэффициента теплопередачи. К настоящему времени появились работы, в которых с целью повышения степени и скорости очистки каналов использовалось ламинарное пульсирующее течение.

Наложение пульсаций на ламинарное течение в канале может привести к существенным изменениям гидродинамических характеристик потока, что подробно изучено для течения в круглой трубе и плоском канале. Впервые влияние наложенных колебаний средней по сечению скорости на профиль продольной скорости при ламинарном течении в каналах с разной формой поперечного сечения было обнаружено в экспериментах [1]. Был получен так называемый «аннулярный эффект Ричардсона»: при относительно высоких частотах колебаний появляется максимум на профиле колеблющейся составляющей

продольной скорости в узком пристеночном слое, толщина которого уменьшается с увеличением частоты. В остальной части трубы жидкость колеблется как целое в соответствии с колебаниями средней по сечению скорости. Теоретически задача о ламинарном пульсирующем течении в трубе впервые была решена в работе [1]; наиболее полное ее решение для круглой трубы было выполнено позднее в [2]. Сравнительно недавно появилась работа [3], в которой решение указанной задачи выполнялось аналогично решению [2], но при условии, что задавалось не гармоническое колебание средней по сечению скорости, а колебание градиента давления. Выкладки, сделанные в работе [3], по своей сути являются повторением решения [2]. Авторами исследования [3] также проводился эксперимент. Из аналитического решения уравнения движения для пульсирующего течения следует, что при определенных числах Рейнольдса среднего во времени течения и относительно высоких частотах и амплитудах колебаний существуют зоны возвратных (реверсивных) течений вблизи стенки, когда местная продольная скорость направлена против среднего потока. Наличие этих зон было подтверждено экспериментально, причем с очень хорошим совпадением данных теории и эксперимента. Эти же авторы в работе [4] исследовали влияние пульсаций расхода на длину начального гидродинамического участка. Согласно данным [4], длина гидродинамической стабилизации изменяется с течением периода колебаний по квазистационарной зависимости.

Аналитическое решение задачи о ламинарном пульсирующем течении в плоском канале проводилось в публикации [5]. Решение было получено для гармонического изменения давления во времени. Было показано, что качественно закономерности колебаний гидродинамических величин для течения в плоском канале и в круглой трубе совпадают. Авторы работы [6] повторили известное решение уравнения движения для случая колебания градиента давления при течении в круглой трубе и плоском канале. Было получено, что выражения для колеблющихся составляющих продольной скорости и касательного напряжения представляют собой функции комплексных переменных.

Расчетные исследования колеблющегося течения в прямоугольных каналах весьма ограничены. В работах [7, 8] рассматривалось развитое течение, вызванное гармоническими колебаниями градиента давления. После исключения из уравнения движения нестационарного члена задача решалась с помощью разложения в ряд Фурье. В исследовании [9] аналогичная задача нахождения амплитуды и фазы колебаний скорости была сведена к решению двух уравнений Пуассона, выполненному методом конечных разностей. Авторы [9] отметили, что и в прямоугольном канале наблюдается аннулярный эффект Ричардсона.

В работе [10] было выполнено приближенное аналитическое решение уравнения движения с использованием функции Грина для течения в прямоугольных каналах для случая, когда градиент давления изменяется периодически по гармоническому закону. Авторы [10] отметили, что важную роль для улучшения степени очистки стенок канала от отложений играет увеличение касательного напряжения на стенке при пульсирующем течении, а также возникновение в некоторых режимах возвратных течений. Вместе с тем, анализа влияния режимных параметров на указанные процессы в публикации [10] не проведено.

В работе [11] задача о развитом ламинарном пульсирующем течении в круглой трубе, плоском и прямоугольных каналах решалась методом конечных разностей. Здесь были представлены данные по амплитуде и фазе колебаний продольной скорости, коэффициентов сопротивления трения и гидравлического сопротивления в зависимости от амплитуды A и безразмерной частоты колебаний средней по сечению скорости; получены формулы, аппроксимирующие расчетные данные по относительным амплитуде и фазе колебаний градиента давления и касательного напряжения на стенке. Было показано, что при больших амплитудах колебаний и высоких частотах вблизи стенки появляются

возвратные (реверсивные) течения. Также была построена граница возникновения таких течений в зависимости от отношения длин сторон прямоугольного канала.

До недавнего времени теплообмен при пульсирующем течении в прямоугольных каналах расчетным путем не изучался. В работах [12, 13] методом конечных разностей проводилось численное моделирование теплообмена при ламинарном пульсирующем течении в прямоугольных каналах с различным соотношением сторон для граничных условий 1-го и 2-го рода на стенке. При высоких амплитудах колебаний средней по сечению скорости было обнаружено значительное увеличение среднего по периметру канала и во времени числа Нуссельта по сравнению с его стационарным значением вблизи входа в обогреваемый участок, а также на удалении от него. Было установлено, что в области относительно высоких частот колебаний на некотором расстоянии от входа в обогреваемый участок температура остается неизменной не только во времени, но и по длине канала и оказывается равной температуре при стационарном течении. Этот же вывод относится к тепловому потоку на стенке при граничном условии первого рода. Наблюдается тепловая стабилизация — среднее по периметру число Нуссельта перестает изменяться не только во времени, но и по длине канала. Для этих условий можно рассчитать число Нуссельта по уточненной методике, которая позволяет избежать погрешности при вычислении средней массовой температуры жидкости. Проведение таких расчетов и обсуждение их результатов являются целью настоящей работы. В работе не учитывается сжимаемость жидкости. При пульсирующем течении сжимаемость проявляется в достаточно длинных трубах, длина которых соответствует порядку длины звуковой волны: $l \sim 2\pi a/\omega$, где a — скорость звука, ω — круговая частота колебаний. Такие длины не характерны для большинства теплообменных устройств, в которых может использоваться пульсирующее течение.

Процессы теплообмена во многом определяются гидродинамикой потока. При расчете теплообмена в прямоугольных каналах используются данные об амплитуде и фазе колебаний продольной скорости, полученные в работе [11] численным методом. Для пульсирующего течения в плоском канале эти данные можно получить аналитическим путем, причем как в виде функции комплексного переменного, так и в виде суммы гармоник. Последнее представление удобно для применения в практических приложениях. Гидродинамические характеристики при течении в щелевых каналах (с малым отношением длин сторон), которые используются в высокоэффективных планарных теплообменниках, близки к этим характеристикам при течении в плоском канале.

1. Гидродинамика пульсирующего течения в плоском канале

Решается уравнение движения для развитого ламинарного течения жидкости с постоянными свойствами в плоском канале

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где u — скорость вдоль продольной оси x , p — давление, t — время, y — поперечная координата, отсчитываемая от оси канала вдоль его высоты h ; ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости. При решении уравнения (1) используются следующие граничные условия. На стенке канала при $y = h/2$ выполняется условие прилипания: $u = 0$. На оси трубы при $y = 0$ выполняется условие симметрии: $\partial u / \partial y = 0$. Зада-

но, что средняя по сечению скорость $\langle u \rangle = \int_0^h u dy$ изменяется во времени по гармоническому закону

$$\langle u \rangle = \langle \bar{u} \rangle [1 + A \sin(\omega t)], \quad (2)$$

где A — амплитуда колебаний, ω — круговая частота; здесь и далее черта сверху означает осреднение по времени, знак $\langle \rangle$ означает осреднение по сечению или периметру канала.

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду:

$$S^2 \frac{\partial U}{\partial t_\omega} = P + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (3)$$

где $U = u / \langle \bar{u} \rangle$, $t_\omega = \omega t$, $Y = y / (h/2)$, $P = -\frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{h^2}{\rho \langle \bar{u} \rangle^2} \right)$ — безразмерный градиент

давления, $S = \frac{h}{2} \sqrt{\omega / \nu}$ — число Стокса (безразмерная частота колебаний). Уравнение (3)

можно представить как сумму уравнений для скорости колеблющегося и среднего во времени течений: $U(Y, t_\omega) = \bar{U}(Y) + \hat{U}(Y, t_\omega)$, $\hat{U} = \tilde{U}(Y) \exp(i t_\omega)$. Решение для среднего

во времени течения известно: $\bar{U}(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2)$.

Средний коэффициент гидравлического сопротивления $\bar{\xi}^p = -\frac{\overline{dp}}{dx} \left(\frac{4h}{\rho \langle \bar{u} \rangle^2} \right)$, рав-

ный среднему коэффициенту сопротивления трения $\bar{\xi}^\tau = -\frac{8\bar{\tau}_c}{\rho \langle \bar{u} \rangle^2}$

($\tau_c = -\mu(\partial u / \partial y)_{y=h/2}$ — касательное напряжение на стенке), определяется выражением

$\bar{\xi}^p = 96 / \text{Re}$, $\text{Re} = \langle \bar{u} \rangle h / \nu$ — число Рейнольдса среднего во времени течения. Средний

безразмерный градиент давления в (3) $\bar{P} = \bar{\xi}^p \text{Re} / 32 = 3$. Уравнение для колеблющейся составляющей скорости имеет вид

$$\hat{i} S^2 \tilde{U} = \tilde{P} + d^2 \tilde{U} / dY^2, \quad (4)$$

$\tilde{U} = 0$ при $Y = 1$ и $d\tilde{U}/dY = 0$ при $Y = 0$. Исключить колеблющийся градиент давления \tilde{P}

из уравнения (4) можно, положив $\tilde{U} = \tilde{P} U_p$. Тогда $\hat{i} S^2 U_p = 1 + d^2 U_p / dY^2$. Величина \tilde{P}

находится из условия (2): $\tilde{P} = A / \int_0^1 U_p dY$.

В результате получим следующее решение уравнения (4) в виде функции комплексного переменного:

$$\tilde{U}(Y, S) = AS_2 \left\{ 1 - \frac{\text{ch}[(\hat{i} + 1)S_1 Y]}{\text{ch}[(\hat{i} + 1)S_1]} \right\} \frac{M_c}{(\hat{i} - 1)\text{sh}S_2 - (\hat{i} + 1)\sin S_2 + S_2 M_c}, \quad (5)$$

где $S_1 = S / \sqrt{2}$, $S_2 = \sqrt{2}S$, $M_c = \text{ch}S_2 + \cos S_2$. Заметим, что подобным образом (в комплексном виде) в работах [2, 3] представлено решение уравнения движения для случая колебаний градиента давления при течении в круглой трубе. Для удобства практического применения преобразуем выражение (5) в функцию действительного переменного:

$$\tilde{U}(Y, S) = A \tilde{U}_A(Y, S) \exp[-\hat{i} \varphi_u(Y, S)],$$

где \tilde{U}_A и φ_u — амплитудная составляющая колебаний скорости и сдвиг их фазы отно-

сительно фазы средней по сечению скорости; $\tilde{U}_A = S_1 \sqrt{(a_u^2 + b_u^2)}$, $\varphi_u = -\arctg(b_u / a_u)$,

$$a_u = \left(\frac{F_1 F_2}{F_3} + \frac{F_4 F_5}{F_6} \right), \quad b_u = \left(\frac{F_1 F_5}{F_3} + \frac{F_2 F_4}{F_6} \right). \quad \text{Здесь} \quad F_1 = 2(M_s - S_2 M_c), \quad F_2 = M_c - 2(\text{ch} S_1 \cos S_1 \text{ch} S_y \cos S_y + \text{sh} S_1 \sin S_1 \text{sh} S_y \sin S_y),$$

$$F_3 = 2M_c(S_2 + \sin S_2 + \cos S_2 - \text{ch} S_2 - S^2 M_c) + S_2[1 - S_2 + 2\text{sh} S_2(\text{sh} S_2 + \cos S_2)], \quad F_4 = \text{sh} S_2 - \sin S_2, \quad F_5 = \text{sh} S_+ \sin S_- - \text{sh} S_- \sin S_+, \quad F_6 = (\cos S_2 - \text{ch} S_2 - S^2 M_c + S_2 M_s) M_c;$$

$$M_s = \text{sh} S_2 + \sin S_2, \quad S_y = S_1 Y, \quad S_+ = S_1(Y+1), \quad S_- = S_1(Y-1).$$

Запишем изменение продольной скорости во времени в виде суммы гармоник:

$$\hat{U}(Y, t_\omega) = A \tilde{U}_A \sin(t_\omega - \varphi_u) = A S_1 (a_u \sin t_\omega + b_u \cos t_\omega). \quad (6)$$

Представляется интересным сравнить это решение с решением, полученным в работе [5] для случая, когда заданы колебания не средней по сечению скорости, а градиента давления: $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \cos t_\omega \right)$. Работа [5] до недавнего времени являлась, по видимому, единственной, в которой колеблющаяся составляющая скорости представлена как функция действительного переменного:

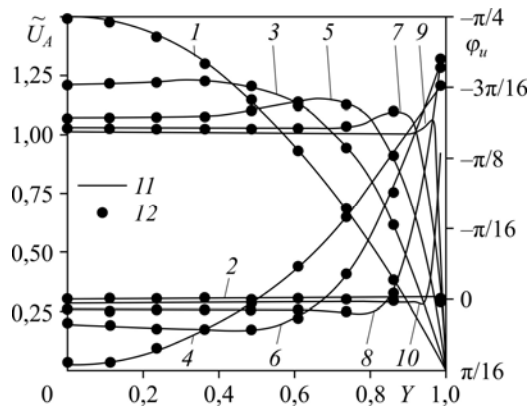
$$\hat{U} = \frac{3\gamma}{2S^2} \left[\left(1 - \frac{M_s \text{sh} S_y \sin S_y + M_c \text{ch} S_y \cos S_y}{M_s^2 + M_c^2} \right) \sin t_\omega + \frac{M_s \text{ch} S_y \cos S_y - M_c \text{sh} S_y \sin S_y}{M_s^2 + M_c^2} \cos t_\omega \right],$$

здесь $M_s = \text{sh} S_1 \sin S_1$, $M_c = \text{ch} S_1 \cos S_1$.

Соотношение (6) удовлетворяет предельным случаям малых и больших значений числа Стокса S . При $S \rightarrow 0$ $\hat{U}(Y, t_\omega) = A \bar{U}(Y) \sin t_\omega$; во всех точках сечения скорость колеблется с одинаковой амплитудой A и без сдвига фазы: относительная амплитуда колебаний $A_u / A = \tilde{U}_A / \bar{U} = 1$, сдвиг фазы $\varphi_u = 0$. При $S \gg 1$ на профиле $\tilde{U}_A(Y)$ в пристеночной области появляется максимум, который с увеличением S смещается к стенке. При $S \rightarrow \infty$ значение амплитудной составляющей колебаний скорости \tilde{U}_A практически по всему сечению приближается к единице, а фаза φ_u — к нулю, то есть наблюдается эффект Ричардсона. Результаты расчета по зависимости (5) представлены на рис. 1. Они с погрешностью менее 1% совпадают с данными, полученными в работе [11] методом численного моделирования.

В работе [11] было обнаружено, что даже при амплитуде колебаний $A < 1$ в области высоких частот наблюдаются возвратные течения у стенки. В этой же работе приведена диаграмма области существования таких режимов. На рис. 2 показано изменение во времени

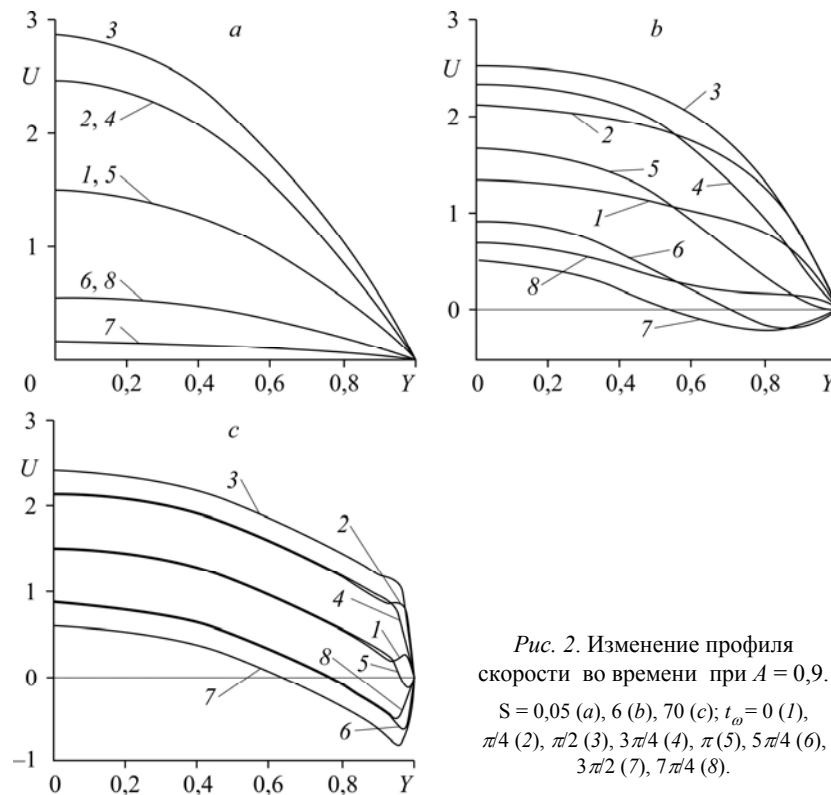
Рис. 1. Профиль амплитуды и фазы колебаний скорости.
1, 3, 5, 7, 9 — \tilde{U}_A ; 2, 4, 6, 8, 10 — φ_u ;
 $S = 0,01$ (1, 2), 5 (3, 4), 10 (5, 6), 25 (7, 8), 70 (9, 10);
11 — аналитическая зависимость,
12 — результаты численного моделирования [11].



профиля скорости, полученное с использованием формулы (6) при достаточно большой амплитуде $A = 0,9$ и разных значениях S . При $S \ll 1$ профиль скорости изменяется во времени в соответствии с квазистационарной зависимостью и в каждый момент времени является параболическим ($U(Y) = \bar{U}(Y)(1 + A \sin t_\omega)$), что видно на рис. 2а. При $S > 1$ в некоторые моменты времени вблизи стенки появляются возвратные течения (см. рис. 2б). При $S \gg 1$ в большей части сечения, кроме узкой пристеночной области, скорость изменяется по закону $U(Y) = \bar{U}(Y) + A \sin t_\omega$. Возвратные течения вблизи стенки существуют на протяжении почти половины периода колебаний (см. рис. 2с).

Результаты расчетов режимов с реверсивными течениями хорошо совпадают с экспериментальными и расчетными данными [3], полученными для пульсирующего течения в круглой трубе при $S = 5,61$, $A = 0,882$ и $A = 1$. Возникает вопрос, не могут ли реверсивные течения привести к появлению пространственных вихревых образований, а также к переходу к турбулентному режиму течения. В эксперименте [3] и некоторых других экспериментах, проведенных с достаточно большими относительными амплитудами колебаний, вихревое движение не наблюдалось. Критерий перехода от ламинарного режима к турбулентному в условиях пульсаций расхода с большими амплитудами колебаний требует дополнительных исследований, прежде всего, экспериментальных, которые к настоящему времени отсутствуют.

Полезными для практического применения, например, для интенсификации и оптимизации процесса очистки поверхности от отложений (см. работы [10, 14]), могут оказаться зависимости от амплитуды и частоты колебаний минимального значения скорости в области реверсивного течения U_{\min} , а также положения этого минимума и момента времени, в котором он достигается. Эти данные представлены на рис. 3. С ростом частоты и амплитуды колебаний U_{\min} увеличивается, а при $S \rightarrow \infty |U_{\min}| \rightarrow A$ (рис. 3а). Видно, что положение минимума с ростом амплитуды колебаний отдалается от стенки. На зависимости $Y_{\min}(S)$ также имеется минимум. При $S \rightarrow \infty Y_{\min} \rightarrow 1$ (рис. 3б). Момент



времени φ_{\min} немонотонно зависит от A и S (рис. 3с). Однако сдвиг фазы, в которой достигается U_{\min} , относительно фазы средней по сечению скорости незначителен; при $S \rightarrow \infty$ $\varphi_{\min} \rightarrow 0$.

Для колеблющейся составляющей градиента давления из решения уравнения (3) получено выражение

$$\tilde{P} = \frac{AS^3 M_c}{\sqrt{2} \left[\hat{i} S_2 M_c - (\hat{i} + 1) \text{sh} S_2 + (1 - \hat{i}) \sin S_2 \right]},$$

которое можно записать как функцию действительного переменного. Представим \tilde{P} в виде

$$\tilde{P} = A\tilde{P}_A \exp(-i\varphi_p),$$

где \tilde{P}_A и φ_p — амплитудная составляющая колебания давления и сдвиг его фазы относительно фазы средней по сечению скорости, которые имеют вид

$$\tilde{P}_A = S^3 M_c \sqrt{(a_p^2 + b_p^2)/2}, \quad \varphi_p = -\text{arctg}(b_p/a_p), \quad a_p = -F_4/F_6, \quad b_p = F_1/F_3,$$

или в виде суммы гармоник

$$\hat{P}(t_\omega) = A\tilde{P}_A \sin(t_\omega - \varphi_p) = AS^3 M_c (a_p \sin t_\omega + b_p \cos t_\omega) / \sqrt{2}.$$

В квазистационарном режиме при $S \rightarrow 0$ $\tilde{P}_A = \bar{P} = 3$. Относительная амплитуда колебаний давления $A_p/A = \tilde{P}_A/\bar{P} = 1$, фаза колебаний $\varphi_p = 0$, $\hat{P} = A\bar{P} \sin t_\omega$. В высокочастотном режиме при $S \rightarrow \infty$ $\tilde{P}_A \rightarrow S^2$ ($\bar{P} = 3$), $\varphi_p = -\pi/2$, то есть колебания давления опережают колебания скорости; $A_p/A = \tilde{P}_A/\bar{P} = S^2/3$, $\hat{P} = AS^2 \cos t_\omega$. Результаты расчетов по приведенным выше зависимостям совпадают с данными, полученными в работе [11] методом численного моделирования.

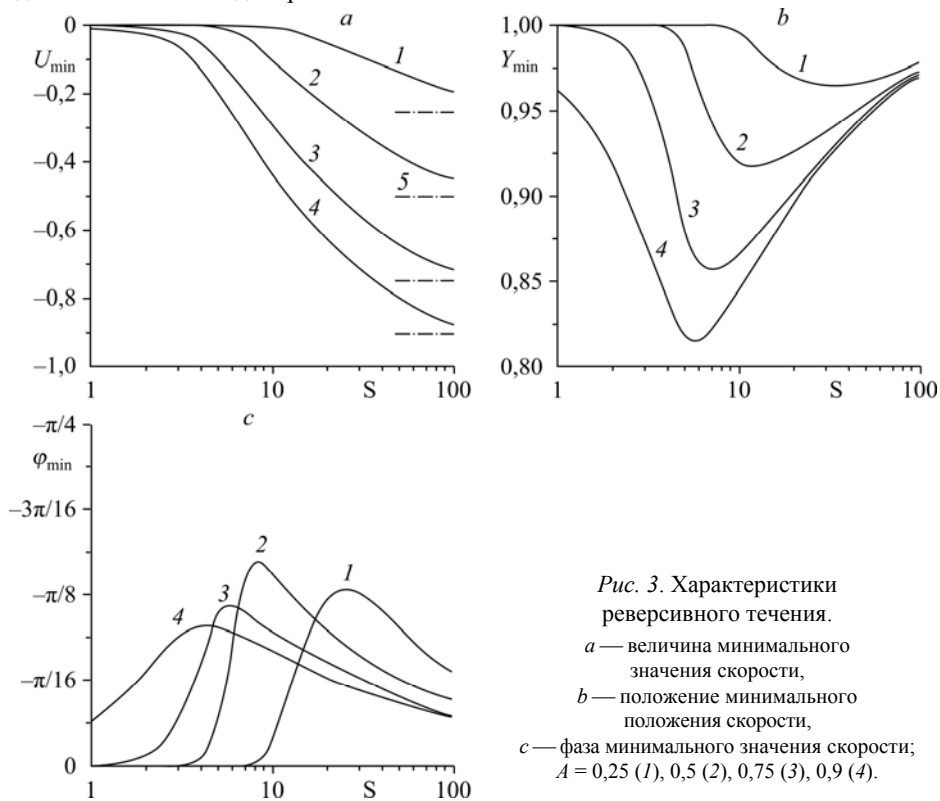


Рис. 3. Характеристики реверсивного течения.

a — величина минимального значения скорости,
 b — положение минимального положения скорости,

c — фаза минимального значения скорости;
 $A = 0,25$ (1), $0,5$ (2), $0,75$ (3), $0,9$ (4).

Из решения уравнения движения получим колеблющуюся составляющую безразмерного касательного напряжения на стенке $-(d\tilde{U}/dY)_{Y=1}$, которой пропорциональна колеблющаяся составляющая коэффициента сопротивления трения $\tilde{\xi}^\tau$. Проще получить выражение для трения на стенке не дифференцируя профиль скорости, а используя баланс импульса:

$$\frac{d\langle \tilde{U} \rangle}{dt_\omega} = \tilde{P} + \left(\frac{d\tilde{U}}{dY} \right)_{Y=1}.$$

В результате получаем

$$\tilde{\xi}^\tau / \bar{\xi}^\tau = A_\tau \exp[-i\hat{\varphi}_\tau],$$

где A_τ и φ_τ — амплитуда и фаза колебания коэффициента сопротивления трения, которые имеют вид $A_\tau = AS^3 M_c \sqrt{(a_\tau^2 + b_\tau^2)}/2/3$, $\varphi_\tau = -\arctg(b_\tau/a_\tau)$, $a_\tau = -a_p$, $b_\tau = AS^2 - b_p$; или $\hat{\xi}^\tau / \bar{\xi}^\tau = A_\tau \sin(t_\omega - \varphi_\tau) = AS^3 M_c (a_\tau \sin t_\omega + b_\tau \cos t_\omega)/(3\sqrt{2})$.

В предельном случае при $S \rightarrow 0$ $\hat{\xi}^\tau / \bar{\xi}^\tau(t_\omega) = A_\tau \sin t_\omega$, $A_\tau = A$, $\varphi_\tau = 0$. При $S \rightarrow \infty$ $A_\tau \rightarrow AS/3$, $\varphi_\tau = -\pi/4$, $\hat{\xi}^\tau = AS(\cos t_\omega - \sin t_\omega)/\sqrt{2}$. Имеется совпадение результатов расчетов, проведенных в работе [11], и выполненных по приведенным выше зависимостям.

2. Теплообмен при пульсирующем течении в плоском канале

При расчете теплообмена на удалении от входа в обогреваемый участок использовались следующие выводы, сделанные на основе анализа результатов расчета теплообмена при пульсирующем течении в плоском и прямоугольных каналах [12, 13]. Во-первых, на некотором удалении от входа в обогреваемый участок профиль температуры перестает изменяться во времени. Во-вторых, этот профиль температуры совпадает с профилем температуры при стационарном течении. Последний вывод не очевиден, поскольку при больших амплитудах колебаний осредненная во времени температура может отличаться от температуры при стационарном течении. Однако, как показали расчеты, этот вывод справедлив, по крайней мере, до $A = 5$.

Известно, что при наложении пульсаций на поток жидкости в канале тепловые характеристики изменяются и во времени, и по длине канала. В работе [15] из приближенного решения осредненного по сечению уравнения энергии с граничным условием второго рода $q_c = \text{const}$ при пульсирующем стержневом течении получено следующее выражение для амплитуды колебаний средней по сечению температуры жидкости: $A_{\theta_{ж}} = 2A \left| \sin(S_T^2 X / 2) \right| / (S_T^2 X)$, где $X = 2x/(hPe)$, x — расстояние от входа в обогреваемый участок, $Pe = RePr$ — число Пекле, $S_T = S\sqrt{Pr}$ — тепловое число Стокса. Из этого выражения следует, что температура жидкости колеблется вдоль X , причем в некоторых точках (узлах) изменения во времени не происходит. С ростом X колебания затухают. Изменением температуры жидкости во времени можно пренебречь при $A_{\theta_{ж}} \ll 1$, т.е. при $X \gg 2A/S_T^2$. Вполне вероятно, что эта оценка справедлива и для других тепловых величин, например, для теплового потока на стенке при граничном условии первого рода ($T_c = \text{const}$). На достаточно большом удалении от входа профиль температуры не изменяется во времени.

Рассмотрим теплообмен при граничном условии $T_c = \text{const}$. При стационарном теплообмене за пределами начального термического участка безразмерную температуру $\theta = (T - T_c)/(T_0 - T_c)$ (T_0 — температура при $X = 0$) можно представить в виде $\theta = \theta_1(Y)\theta_2(X)$, где $\theta_1(Y)$, $\theta_2(X)$ — известные функции [16]. Среднее во времени число Нуссельта определяется как $\overline{Nu} = \overline{q_c} / \overline{\theta_{ж}}$, где $\overline{\theta_{ж}}$ — средняя массовая температура жидкости,

$$\overline{\theta}_ж = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\theta U}{\langle U \rangle} dY dt_\omega. \quad (7)$$

Поскольку профиль температуры совпадает со стационарным профилем, то $\overline{q_c} = q_{cS}$ и отношение среднего во времени числа Нуссельта к его стационарному значению составляет $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty = \theta_{жS}/\overline{\theta}_ж$, где $\theta_{жS} = \int_0^1 \theta_1(Y) \bar{U}(Y) dY = 0,758$. Осредненная по периоду колебаний средняя массовая температура жидкости (точнее, ее часть, не зависящая от X) при пульсирующем течении вычисляется по формуле

$$\overline{\theta}_ж = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\theta_1(Y) \bar{U}(Y) + A \tilde{U}_A(Y, S) \sin(t_\omega - \varphi_u(Y, S))}{1 + A \sin t_\omega} dY dt_\omega. \quad (8)$$

Выражение (8) можно преобразовать к виду

$$\overline{\theta}_ж = f_1(S)[1 - f_2(A)] + f_2(A)\theta_{жS} - f_3(A) \int_0^1 \theta_1(Y) \tilde{U}_A(Y, S) \sin \varphi_u(Y, S) dY,$$

где $f_1(S) = \int_0^1 \theta_1(Y) \tilde{U}_A(Y, S) \cos \varphi_u(Y, S) dY$, $f_2(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt_\omega / (1 + A \sin t_\omega)$, $f_3(A) = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t_\omega dt_\omega}{1 + A \sin t_\omega}$. Интеграл f_2 берется аналитически: $f_2(A) = 1/\sqrt{1-A^2}$ при $A < 1$;

$f_2(A) = 0$ при $A > 1$; $f_3 = 0$. Таким образом, число Нуссельта находится по зависимости $\overline{Nu} = 0,758 Nu_S / \{f_1(S)[1 - f_2(A)] + 0,758 f_2(A)\}$. При вычислении используются данные по профилям амплитудной составляющей $\tilde{U}_A(Y, S)$ и фазы колебаний скорости $\varphi_u(Y, S)$, представленные выше. На рис. 4 показано изменение отношения $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty$ в зависимости от числа Стокса при разных амплитудах колебаний. При $A < 1$ среднее по времени число Нуссельта заметно ниже его стационарного значения, а при $A > 1$ теплоотдача возрастает: $(\overline{Nu})_\infty > (Nu_S)_\infty$. При больших значениях S функция f_1 стремится к средней

по сечению температуре $\langle \theta \rangle_S = \int_0^1 \theta_1(Y) dY = 0,619$. При стационарном течении отношение

средней массовой температуры жидкости к средней по сечению температуре составляет $\theta_{жS} / \langle \theta \rangle_S = 1,22$, поэтому $\overline{Nu}/Nu_S = 1/[0,817 + 0,183 f_2(A)]$. Таким образом, предельное

значение отношения $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty$ в области больших S , приведенное на рис. 3, при $A > 1$ равно 1,22. При $A < 1$ это предельное значение оказывается меньше единицы.

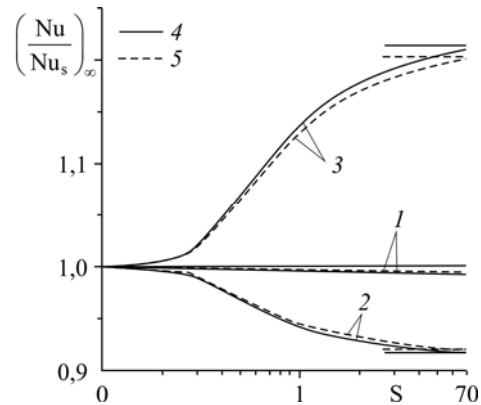


Рис. 4. Отношение числа Нуссельта к его стационарному значению на удалении от входа в обогреваемый участок плоского канала.

$A = 0,25$ (1), $0,75$ (2), $A > 1$ (3);
 $T_c = \text{const}$ (4), $q_c = \text{const}$ (5).

Аналогичным образом рассмотрим граничное условие второго рода. При стационарном теплообмене за пределами начального термического участка безразмерную температуру $\theta = (T - T_0)\lambda / (q_c h)$ (T_0 — температура при $X = 0$) можно представить в виде $\theta = \theta_1(Y) + \theta_2(X)$, где $\theta_1(Y) = -39/560 + 3Y^2/8 - Y^4/16$, $\theta_2(X) = 2X$ [16]. Среднее во времени число Нуссельта определяется как $\overline{Nu} = \overline{q_c} / (\overline{\theta_c} - \overline{\theta_{ж}})$. Отношение этого числа Нуссельта к его стационарному значению составляет $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty = 1/(1 - 4,12\overline{\theta_{ж}})$, здесь $\overline{\theta_{ж}}$ — часть осредненной по периоду колебаний средней массовой температуры жидкости, не зависящая от X . Она вычисляется по приведенной выше формуле (8), в которой зависимость $\theta_1(Y)$ соответствует не граничному условию первого рода, а граничному условию второго рода, и имеет вид

$$\overline{\theta_{ж}} = (1 - f_1) \int_0^1 \theta_1(Y) \tilde{U}_A(Y, S) \cos \varphi_u(Y, S) dY.$$

Таким образом, число Нуссельта находится по формуле

$$(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty = 1/\{1 - 4,12f_1(S)[1 - f_2(A)]\}. \quad (9)$$

При вычислении используются данные по профилям амплитудной составляющей $\tilde{U}_A(Y, S)$ и фазы колебаний скорости $\varphi_u(Y, S)$, представленные выше. На рис. 4 показано изменение отношения $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty$ в зависимости от числа Стокса при разных амплитудах колебаний, которое практически совпадает со значением этого отношения для граничного условия первого рода. При $q_c = \text{const}$ в области больших S функция f_1 стремится к средней по сечению температуре при стационарном течении $\langle \theta \rangle_S = \int_0^1 \theta_1(Y) dY = 0,0429$ и, согласно (9), $(\overline{Nu}/Nu_S)_\infty = 1/[0,824 + 0,176f_2(A)]$.

3. Теплообмен при пульсирующем течении в прямоугольном канале

При пульсирующем течении в прямоугольном канале дополнительным режимным параметром, кроме относительных амплитуды и безразмерной частоты колебаний средней по сечению скорости, является отношение длин его сторон γ . Среднее во времени число Нуссельта определяется по тому же выражению, что и для плоского канала. Плотность теплового потока на стенке при граничном условии первого рода или температура стенки при граничном условии второго рода осредняются по периметру канала.

Средняя массовая температура жидкости на удалении от входа в обогреваемый участок, где температура не изменяется во времени и совпадает со своим стационарным значением, определяется выражением

$$\overline{\theta_{ж}} = f_1(X, \gamma, S)[1 - f_2(A)] + f_2(A)\theta_{жS}(X, \gamma),$$

где $f_1(X, \gamma, S) = \iint_{Y,Z} \theta_S(X, Y, Z, \gamma) \tilde{U}_A(Y, Z, \gamma, S) \cos \varphi_u(Y, Z, \gamma, S) dY dZ$, $f_2(A)$ — приве-

денная выше функция, $\theta_{жS}(X, \gamma) = \iint_{Y,Z} \theta_S(X, Y, Z, \gamma) \bar{U}(Y, Z, \gamma) dY dZ$ — средняя массо-

вая температура жидкости при стационарном течении.

Для прямоугольного канала, в отличие от плоского, отсутствуют аналитические формулы для стационарного распределения температур $\theta_S(X, Y, Z, \gamma)$, а также для амплитудной составляющей колебаний скорости $\tilde{U}_A(Y, Z, \gamma, S)$ и их фазы $\varphi_u(Y, Z, \gamma, S)$. Указанные функции были рассчитаны в работах [17, 11]. Результаты расчетов представлены на рис. 5 для граничных условий $T_c = \text{const}$ и $q_c = \text{const}$. Здесь число Стокса $S = (d_r/2)\sqrt{\omega/\nu}$, d_r — гидравлический диаметр канала. Так же, как и для плоского канала,

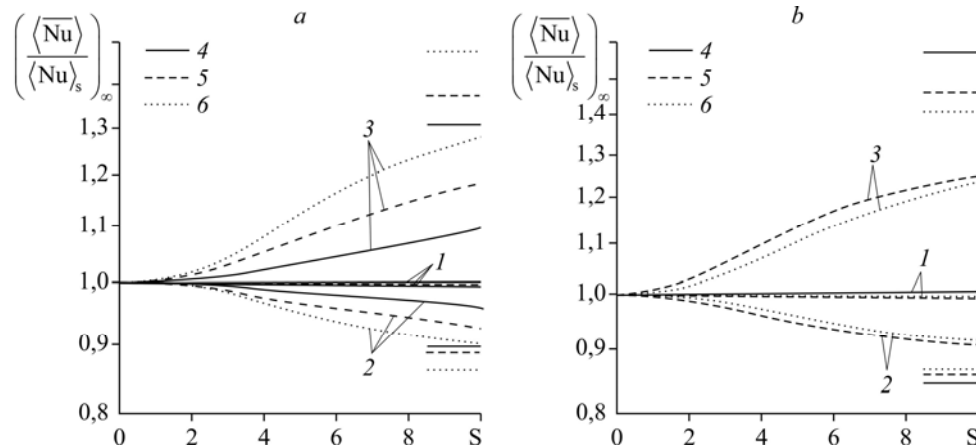


Рис. 5. Отношение числа Нуссельта к его стационарному значению на удалении от входа в обогреваемый участок прямоугольного канала.

$T_c = \text{const}$ (a), $q_c = \text{const}$ (b); $A = 0,25$ (1), $0,75$ (2), $A > 1$ (3); $\gamma = 0,1$ (4), $\gamma = 0,25$ (5), $\gamma = 1$ (6).

различие в средней по периметру и периоду теплоотдаче по отношению к ее стационарному значению для этих двух граничных условий незначительно. При $A < 1$ число Нуссельта меньше его стационарного значения, при $A > 1$ $(\langle \bar{Nu} \rangle / \langle Nu \rangle_s)_\infty > 1$. В области больших чисел Стокса отношение $(\langle \bar{Nu} \rangle / \langle Nu \rangle_s)_\infty$ стремится к некоторому предельному значению, которое показано на рис. 5 горизонтальными линиями. Это предельное значение при $A > 1$ равно отношению двух температурных напоров при стационарном течении: разницы между средней по периметру температурой стенки $\langle T_c \rangle_s$ и средней массовой температурой жидкости $T_{жс}$ к разнице между температурой стенки и средней по сечению температурой $\langle T \rangle_s$: $-T_{жс} / (\langle T_c \rangle_s - \langle T \rangle_s)$. Данный вывод справедлив для обоих граничных условий при течении как в плоском, так и в прямоугольных каналах. Увеличение теплоотдачи при наложении высокочастотных колебаний обусловлено тем, что при стационарном течении средняя по сечению температура выше (ближе к температуре стенки), чем средняя массовая температура жидкости. Как видно на рис. 5, для прямоугольного канала при $T_c = \text{const}$ теплоотдача более существенно увеличивается для квадратного канала по сравнению со щелевым, а при $q_c = \text{const}$ наблюдается обратная тенденция.

Значения частот колебаний $f = \omega / 2\pi$, которые требуется создать для получения определенного значения числа Стокса при течении реальных жидкостей в каналах заданного диаметра, приведены в таблице [13]. Заметим, что в расчетах, выполненных в работах [12, 13], осредненное по периоду колебаний число Нуссельта в области больших тепловых чисел Стокса вдали от начала обогрева оказалось существенно завышенным из-за ошибки, возникающей при нахождении средней массовой температуры непосредственно по формуле (7) путем численного интегрирования.

Заключение

Получено аналитическое решение уравнения движения для развитого ламинарного пульсирующего течения в плоском канале, когда средняя по сечению скорость изменяется во времени по гармоническому закону. Колеблющиеся составляющие продольной скорости, градиента давления, касательного напряжения на стенке представлены в виде

функций действительного переменного, что может быть полезно для практических приложений. Подробно исследована область реверсивных течений, возникающих вблизи стенок канала.

При относительно высоких частотах колебаний вдали от входа в обогреваемый участок для двух видов граничных условий на стенке канала — $T_c = \text{const}$ и $q_c = \text{const}$ — получено выражение для среднего по периметру канала и по периоду колебаний числа Нуссельта $\langle \overline{Nu} \rangle$ по отношению к его значению при стационарном течении $\langle Nu \rangle_S$. Уточнены результаты выполненных ранее расчетов, которые имели погрешность, связанную с вычислением средней массовой температуры жидкости. Показано, что при амплитуде колебаний средней по сечению скорости $A < 1$ отношение $(\langle \overline{Nu} \rangle / \langle Nu \rangle_S)_{\infty} < 1$.

При высоких амплитудах колебаний это отношение всегда превышает единицу, не зависит от амплитуды колебаний A и увеличивается с ростом числа Стокса, а при больших числах Стокса стремится к некоторому предельному значению.

Дана оценка расстоянию от входа в обогреваемый участок, на котором справедлив примененный в работе подход к решению задачи. Проанализировано влияние вида граничных условий на стенке канала и отношения длин его сторон на среднее по периметру и по времени число Нуссельта в рассматриваемой области режимных параметров.

Список литературы

1. Richardson E.G., Tyler E. The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // Proc. Phys. Soc. 1929. Vol. 42, No. 1. P. 7–14.
2. Uchida S. The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe // ZAMP. 1956. Vol. 7, No. 5. P. 403–422.
3. Ünsal B., Ray S., Durst F., Ertuğ Ö. Pulsating laminar pipe flows with sinusoidal mass flux variations // Fluid Dynamics Research. 2005. Vol. 37. P. 317–333.
4. Ray S., Ünsal B., Durst F. Development length of sinusoidally pulsating laminar pipe flows in moderate and high Reynolds number regimes // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2012. Vol. 37. P. 167–176.
5. Зигель Р., Перлмуттер М. Теплоотдача при пульсирующем ламинарном течении в канале // Теплопередача. 1962. № 2. С. 18–32.
6. Wang Ch., Gao P.Z., Tan S.C., Xu C. Theoretical analysis of phase-lag in low frequency laminar pulsating flow // Prog. In Nuclear Energy. 2012. Vol. 58. P. 45–51.
7. Drake D.G. On the flow in a channel due to a periodic pressure gradient // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1965. Vol. 18. P. 1–10.
8. Fan C., Chao B.-T. Unsteady, laminar, incompressible flow through rectangular ducts // ZAMP. 1965. Vol. 16. P. 351–360.
9. Yachot A., Arad M., Ben-Dor G. Numerical investigation of a laminar pulsing flow in a rectangular duct // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1999. Vol. 29. P. 935–950.
10. Qi X.G., Scott D.M., Wilson D.I. Modelling laminar pulsed flow in rectangular microchannels // Chemical Engng Sci. 2008. Vol. 63, No. 10. P. 2682–2689.
11. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 6. С. 761–773.
12. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Исследование теплообмена при пульсирующем ламинарном течении в прямоугольных каналах с граничным условием первого рода // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 4. С. 638–641.
13. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Исследование теплообмена при пульсирующем ламинарном течении в прямоугольных каналах с граничным условием второго рода // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56, № 1. С. 148–151.
14. Gillham C.R., Fryer P.J., Hasting A.P.M., Wilson D.I. Enhanced cleaning of whey protein soils using pulsed flows // J. Food Engng. 2000. Vol. 46. P. 199–209.
15. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Гидродинамика и теплообмен пульсирующего ламинарного потока в каналах // Теплоэнергетика. 2015. № 9. С. 24–33.
16. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
17. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Теплообмен при ламинарном течении в прямоугольных каналах // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 893–904.

Статья поступила в редакцию 10 января 2018 г.,
после доработки — 7 мая 2018 г.