

СТОКСОВА ЧАСТИЦА В НЕОДНОРОДНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. Е. Шапиро

(Красноярск)

Рассматривается движение малой (стоксовой) частицы, взвешенной в неоднородном турбулентном потоке несжимаемой вязкой среды. Показано, что нелинейная взаимосвязь беспорядочных колебательных и вращательных движений частицы с неоднородным полем турбулентных пульсаций обуславливает значительные систематические смещения частиц и трансформацию турбулентных движений среды в направленные. Произведена оценка эффектов для частицы, взвешенной в среде, поле пульсаций которой стационарно и меняется вдоль одного направления.

Как известно из модельных задач механики [1] и физики плазмы [2], получивших в дальнейшем большое развитие, при движении частицы в поле периодических во времени сил, интенсивность которых зависит от координат, нелинейность вынужденного колебательного движения частицы обуславливает появление средних по периоду колебаний сил, стремящихся вытеснить свободную частицу в область, где понижена интенсивность силового поля. Следует ожидать, что аналогичное действие оказывает на частицу, погруженную в турбулентную жидкость или газ, поле неоднородных турбулентных пульсаций. Заметим, что турбулентный поток всегда неоднороден — таков способ его существования. Резко неоднородно поле пульсаций в пограничных слоях, отделяющих турбулентную зону от зоны спокойного течения или твердых границ, и здесь следует ожидать наиболее заметного систематического смещения частиц. Это видно при быстром запылении лопастей вращающегося вентилятора и в др. случаях. Поскольку с вопросами осаждения частиц в жидких и газовых потоках связан большой круг задач (технических, загрязнения атмосферы и т. д.), целесообразно оценить указанный систематический эффект*.

1. Уравнения движения. Рассмотрим малую сферическую частицу диаметра d и плотности ρ_0 , взвешенную в несжимаемой турбулентной среде плотности ρ и кинематической вязкости ν . При $d \rightarrow 0$ траектория частицы описывается уравнением (см., например, § 5, 7 в [7])

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{r}} + a\dot{\mathbf{r}} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}' + c \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} (\mathbf{u}' - \ddot{\mathbf{r}})_{\tau} + \mathbf{f}_l,$$

где

$$a = (12\nu/d^2)b; \quad b = [3\rho/(2\rho_0 + \rho)]; \quad c = (6b/d)\sqrt{\nu/\pi};$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{u}/dt + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ — невозмущенная скорость и ускорение среды в момент t в месте расположения частицы. Коэффициент a характе-

* По вопросам переноса и осаждения частиц в неоднородных турбулентных потоках выполнено множество исследований (см., например, [3—6] и цитированные там работы). Однако фактор динамической взаимосвязи беспорядочного колебательного движения частицы с ее осредненным поступательным движением освещен в литературе, на наш взгляд, недостаточно.

ризует силу трения Стокса, член bu' обусловлен градиентом давлений в невозмущенном частицей потоке. Третий член есть «сила Бассэ», которой учитывается неравномерность относительного движения частицы; \hat{i}_i — плотность внешних сил, действующих на частицу, включая силу тяжести. Уравнение (1) используют для оценок при $d < l$, где l — внутренний масштаб турбулентности (на расстояниях l перепад скоростей в потоке u_i такой, что $lu_i/\nu \sim 1$), и оно тем точнее, чем меньше отношение d/l .

Поскольку поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ характеризуется целым спектром временных и пространственных масштабов, уравнение (1) фактически является нелинейным стохастическим уравнением. Оно сохраняет нелинейный характер и в случае однородной изотропной турбулентности. И нельзя, например, считать, что действие сил \hat{i}_i дает просто аддитивный вклад в результирующее движение. Обычно (см., например, [8] и § 5, 7 в [7] и цитируемые там источники), анализируя уравнение (1), полагают \mathbf{u} и \mathbf{u}' случайными функциями времени, оставляя вне поля зрения их зависимость от координат. При этом уравнение (1) становится линейным и допускает прямое определение всех корреляционных характеристик движения частицы через характеристики турбулентного потока. В частности, на этой основе традиционно проводят рассмотрение диффузии частиц и обратного влияния частиц на поток.

Понятно, что принципиально важен учет нелинейности в уравнении (1) в задачах, где специально исследуются эффекты, связанные с пространственной неоднородностью поля турбулентных пульсаций.

Уравнением (1) описывается взаимодействие среды с поступательными степенями свободы частицы. В неоднородном потоке имеет место и вращательное относительно среды движение частицы. Возникающие при этом возмущения течения обуславливают отклонения траектории $\mathbf{r}(t)$, дополнительные к учтенным в уравнении (1). Эффект связан с действием сил Кориолиса. При $d \rightarrow 0$ дополнительные отклонения малы, но при рассмотрении осредненного движения частицы учет фактора вращения приводит, как будет показано, к эффектам того же порядка по d/l , что дает и модель (1). На шар, который движется поступательно со скоростью \mathbf{v} и одновременно вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ в покоящейся жидкости, действует поперечная $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$ сила, которая при ползущих течениях вокруг шара равна [9]

$$(2) \quad \mathbf{F}_{\Omega} = k\rho d^3[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}],$$

где $k \approx \pi/8$. Эксперименты (см. например, [10]) показывают применимость формулы (2) и для вращений частицы в неоднородных ламинарных режимах (при течении Куэтта). Естественно полагать справедливость формулы (2) и для частиц в турбулентном потоке, для которых выполняется условие $d < l$, понимая под \mathbf{v} и $\mathbf{\Omega}$ относительные поступательные и вращательные движения частицы, т. е.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} = (1/2) \text{rot } \mathbf{u},$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — угловая скорость вращения частицы. Удобно пересчитать силу \mathbf{F}_{Ω} на единицу массы шара. С учетом присоединенной массы получаем

$$\mathbf{f}_{\Omega} \approx (1/2)b[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}].$$

Силы \mathbf{f}_{Ω} надо включить в правую часть уравнения (1). Для их определения учтем, что момент сил, действующих на неравномерно вращающийся шар в покоящейся жидкости при $d \rightarrow 0$, равен [11]

$$M = -(\pi/12)\rho d^5 \dot{\Omega} - \pi \rho d^3 v \Omega.$$

Момент инерции шара равен $(\pi/60)\rho_0 d^5$. Отсюда для вращательных движений можно записать уравнение, сходное по структуре с уравнением (1),

$$(4) \quad \ddot{\varphi} + \alpha \dot{\varphi} = \alpha \dot{\psi} + \beta \dot{\psi}' + m_b + m_l,$$

где

$$\alpha = (10v/d^2)\beta; \quad \beta = 6\rho/(\rho_0 + 5\rho);$$

$\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi'(\mathbf{r}, t) = d\psi/dt + (\mathbf{u}\nabla)\psi$ — невозмущенные угловые скорость и ускорение среды в месте расположения частицы в момент t ; m_b — вращательный аналог сил Бассэ; m_l — момент внешних сил и сил, связанных с реакцией на силы \mathbf{f}_0 . Поскольку при $d \rightarrow 0$ эффекты взаимодействия поступательного и вращательного движений на временах $\sim 1/\Omega$ малы в сравнении с действием стоксовых ($\sim a, \alpha$) и инерционных ($\sim b, \beta$) сил, то при анализе движений на временах $\sim 1/\Omega$ действие сил \mathbf{f}_0 и их реакции в уравнениях (1), (4) можно не принимать во внимание. Полагая движения независимыми, произведем усреднение правой части (1) и сил (3), их суммарное действие и будем определять систематические смещения частицы. При анализе будем пренебрегать силой Бассэ и моментом m_b . Их учет загромождает изложение, но принципиальных изменений в результаты при малых d не вносит. Положим также $\mathbf{f}_l = 0$ и $m_l = 0$. Обобщение задачи на случай регулярных $\mathbf{f}_l \neq 0$ и $m_l \neq 0$ проводится аналогично и не встречает трудностей.

2. «Массивная» частица. Рассмотрим простейший случай, когда частица слабо увлекается турбулентным движением. Для этого частица должна быть достаточно массивной (малые b), так чтобы период установления $1/a$ намного превышал периоды пульсаций, дающих основной вклад в \mathbf{u} и \mathbf{u}' . Наибольшим периодом обладают крупномасштабные пульсации в потоке, и «массивной» частице соответствует условие $a < \omega_3$, где ω_3 — частота, приходящаяся на максимум спектра турбулентности. Так как сила увлечения малой частицы потоком пропорциональна ее размеру d , а сила инерции — ее объему, т. е. d^3 , то при $d \rightarrow 0$ приближение массивной частицы не может быть выполнено. Это отражается в том, что a возрастает как $1/d^2$ и условие $a < \omega_3$ нарушается. В то же время условием на d сверху является $d < l$. Совмещая оба условия, получаем

$$(5) \quad 12b\sqrt{\text{Re}} < d^2/l^2 < 1,$$

где $\text{Re} = Lu_L/v$ — число Рейнольдса для потока; u_L и L — масштабы скорости и размера наиболее крупных пульсаций.

При получении (5) использованы известные из теории подобия турбулентных пульсаций соотношения $\omega_3 \sim u_L/L$, $L/l \sim \text{Re}^{3/4}$. По условию (5) $\sqrt{\text{Re}} < 1/12b$. Для частицы в воде имеем $b \sim 1 \dots 0,1$, т. е. $1/12b < 1$. Так как режим течения с $\text{Re} < 1$ не является турбулентным, то случай «массивной» частицы в турбулентном потоке воды реализовать нельзя. Применительно к твердой пылинке в воздухе $b \sim 10^{-4}$ и необходимо $\text{Re} < 10^6$. Например, при $\text{Re} = 10^4$ «массивным» частицам соответствует $0,3 < d/l < 1$, т. е. весьма узкий интервал размеров d .

При выполнении условия (5) отношение амплитуды дрожания частицы к амплитуде колебаний жидких частиц (т. е. элементарных объемов

невозмущенной среды) по порядку величины равно a/ω_0 и мало. Поэтому пространственную зависимость правых частей уравнений (1), (4) на расстояниях порядка размаха колебаний $r(t)$ можно считать плавной, что позволяет воспользоваться стандартным для уравнений типа (1) приемом усреднения. Полагая

$$r(t) = R + r_{\sim},$$

где $r_{\sim}(t)$ характеризует осцилляции, а $R(t)$ — среднее по времени $\sim 1/\omega_0$ положение частицы, разлагаем правую часть (1) (далее обозначим ее через f) в ряд по r_{\sim} вблизи осредненной траектории $r = R(t)$. В первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \langle f \rangle + \langle (r_{\sim} \nabla) f \rangle; \\ \ddot{r}_{\sim} + a \dot{r}_{\sim} &\approx \dot{f}_{\sim}; \quad \dot{f}_{\sim} = f - \langle f \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где угловые скобки означают осреднение по времени $\sim 1/\omega_0$ и по множеству реализаций турбулентных пульсаций при фиксированном $r = R$, т. е. выражения в угловых скобках есть эйлеровы характеристики турбулентных пульсаций.

Учтем, что амплитуда пульсаций величины $b u_{\sim} = b(u' - \langle u' \rangle)$ много меньше, чем амплитуда пульсаций $a u_{\sim} = a(u - \langle u \rangle)$. Действительно,

$$\frac{b u_{\sim}}{a u_{\sim}} \sim \frac{d^2}{12\nu} \left(\omega_0 + \frac{u_*}{L_*} \right) \sim \frac{1}{12} \frac{d^2}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{d^2}{l^2} + \frac{\text{Re}_d}{12} \frac{d}{L_*} \ll 1, \quad (7)$$

где u_* и L_* — характерные амплитуды турбулентных пульсаций и размер неоднородной области; $\text{Re}_d = \sim u_* d/\nu$.

В турбулентном пограничном слое величина u_* — порядка динамической скорости («скорости трения»); L_* — характерная толщина слоя ($u_* L_*/\nu \geq 10$). Поэтому можно считать $\dot{f}_{\sim} \approx a \dot{u}_{\sim}$. Из уравнения (6), используя спектральное представление, имеем

$$r_{\sim} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a e^{j\omega t}}{-\omega^2 + ja\omega} Z(R, d\omega),$$

где Z — случайная спектральная амплитуда u_{\sim} интервала $d\omega$. В силу условий стохастичности

$$\langle Z \rangle = 0, \quad \langle Z_i(r, d\omega) Z_k^*(r, d\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') W_{ik}(r, \omega) d\omega d\omega',$$

где $\delta(\omega - \omega')$ — дельта-функция; W_{ik} — спектральный тензор

$$\langle u_{\sim i}(r, t) u_{\sim k}(r, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{ik}(r, \omega) d\omega.$$

При оценках будем полагать, что для всех нужных величин зависимость плотности спектра от ω имеет один и тот же вид

$$W \sim k^4 / (1 + k^2)^3, \quad k = \omega / \omega_0. \quad (8)$$

Такой зависимостью интерполируют (см. § 3, 5 в [7]) спектральную плот-

ность u_{\sim}^2 для изотропной турбулентности в диапазоне от самых крупных вихрей (закон k^4), включающем инерционную подобласть спектра (формула (8) при больших k не слишком сильно отличается от закона $k^{-5/3}$). Учитывая зависимость (8), получаем

$$(9) \quad \langle (\mathbf{r}_{\sim} \nabla) \mathbf{f} \rangle \approx \langle (\mathbf{r}_{\sim} \nabla) \mathbf{a} \mathbf{u}_{\sim} \rangle \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 e^{j(\omega - \omega')t}}{-\omega^2 + j a \omega} \langle \mathbf{Z}(\mathbf{R}, d\omega) \nabla \rangle \times \\ \times \mathbf{Z}^*(\mathbf{R}, d\omega') \rangle = -\kappa^2 \langle \mathbf{u}_{\sim} \nabla \rangle \mathbf{u}_{\sim} \rangle = -\kappa^2 \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle, \quad \kappa^2 = \frac{k_a^2}{3} \frac{1 + 3k_a}{(1 + k_a)^3}, \quad k_a = a/\omega_a.$$

Проведем усреднение силы \mathbf{f}_{Ω} . Имеем

$$(10) \quad \mathbf{f}_{\Omega} = (b/2) \{ [\langle \mathbf{\Omega} \rangle \times \langle \mathbf{v} \rangle] + \langle [(\varphi_{\sim} - \psi_{\sim}) \times (\mathbf{r}_{\sim} - \mathbf{u}_{\sim})] \rangle \}.$$

Величины φ_{\sim} и \mathbf{r}_{\sim} , которые надо подставлять в (10), будем вычислять при фиксированных $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, учет в них малых дрожаний представляет эффект следующего порядка малости по k_a . Принимая также во внимание неравенство (7) и ему подобное $\frac{\beta \dot{\mathbf{r}}_{\sim}}{\alpha \psi_{\sim}} \ll 1$, получаем

$$\mathbf{v}_{\sim} = \dot{\mathbf{r}}_{\sim} - \mathbf{u}_{\sim} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega e^{j\omega t}}{j\omega + a} \mathbf{Z}(\mathbf{R}, d\omega), \\ \mathbf{\Omega}_{\sim} = \varphi_{\sim} - \psi_{\sim} = \frac{1}{2} \text{rot} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega e^{j\omega t}}{j\omega + \alpha} \mathbf{Z}(\mathbf{R}, d\omega) \right].$$

Отсюда при тех же, что и при выводе (9), предположениях и учете векторного тождества $[\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}] = (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla(u^2/2)$ получаем

$$(11) \quad \langle [\mathbf{\Omega}_{\sim} \times \mathbf{v}_{\sim}] \rangle = (\lambda/2) \left(\langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle - \nabla \frac{\langle u_{\sim}^2 \rangle}{2} \right),$$

$$\text{где} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{k_a + k_{\alpha}} \left[\frac{k_a^3 + 3k_a^4}{3(1 + k_a)^3} + \frac{k_{\alpha}^3 + 3k_{\alpha}^4}{3(1 + k_{\alpha})^3} \right], \quad k_{\alpha} = \alpha/\omega_a.$$

В силу сделанных предположений величина $[\langle \mathbf{\Omega} \rangle \times \langle \mathbf{v} \rangle]$ оказывается много меньше выражения (11), и ее выписывать не будем.

В результате приходим к описанию осредненного движения массивной частицы

$$(12) \quad \ddot{\mathbf{R}} + a\dot{\mathbf{R}} \approx a \langle \mathbf{u} \rangle + b \langle \mathbf{u}' \rangle - \kappa^2 \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle - \frac{\lambda b}{4} (\nabla \langle u_{\sim}^2 \rangle / 2 - \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle).$$

Во многих задачах характеристики турбулентности меняются в пространстве относительно плавно в направлении средней скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$. В таком случае $\langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle \approx \langle \mathbf{u}' \rangle$. Для среды, описываемой уравнением Навье — Стокса при $\text{div } \mathbf{u} = 0$, имеем при этом

$$\text{rot } \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle \approx \text{rot } \langle \mathbf{u}' \rangle = \nu \Delta \text{rot } \langle \mathbf{u} \rangle \neq 0.$$

Это означает, что пульсационная сила в (12) в общем случае не может быть представлена в виде градиента от некоего эффективного потенциала.

Коэффициенты b и κ при силах пульсационного происхождения в (12) — малые в сравнении с единицей величины, таковы условия для массивной частицы. Хотя $\kappa/b \approx a/\sqrt{3}b\omega_0 \sim 7\text{Re } l^2/d^2 \gg 1$, но так как κ мало, то возможно $\kappa^2 \ll b$ и $\kappa^2 \gg b$. Условие $\kappa^2 \ll b$ эквивалентно $b \ll \ll (1/50\text{Re})d^4/l^4$, что соответствует сверхмассивной частице. Во втором (более реальном случае), когда $b \gg (1/50\text{Re})d^4/l^4$ (но выполняется неравенство (5)), имеем для силы пульсационного происхождения в (12)

$$\mathbf{f}_\Pi \approx -\kappa^2 \langle \mathbf{u}' \rangle - \frac{\lambda b}{4} \nabla \frac{\langle u^2 \rangle}{2}.$$

Здесь, несмотря на малость b/κ^2 , оставлен второй член, поскольку в неоднородном турбулентном потоке градиент интенсивности пульсаций может намного превышать среднее ускорение.

Следовательно, знание пространственных зависимостей эйлеровых средних $\langle \mathbf{u} \rangle$, $\langle u^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{u}' \rangle$ позволяет на основе уравнения (12) исследовать дрейф массивных частиц.

3. Легкая частица. С ростом a частица сильнее увлекается турбулентным движением, правые части уравнений (1), (4) становятся резко нелинейными и при $a/\omega_0 > 1$ предыдущие результаты должны претерпевать качественные изменения.

Случаю сильного увеличения соответствует $a > \Omega_l$, где Ω_l характеризует частоту, приходящуюся на внутренний масштаб l в лагранжевом спектре турбулентности (т. е. в спектре поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$, где $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{u}$ — скорость жидкой частицы). В эйлеровом спектре турбулентности (т. е. в спектре $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ при $\mathbf{r} = \text{const}$) масштабу l соответствует частота $u_l/l \sim \omega_0 \sqrt{\text{Re}}$. Поскольку $\Omega_l < u_l/l$, то заведомо частицу можно считать увлекаемой («легкой»), если $a > \omega_0 \sqrt{\text{Re}}$, что эквивалентно $d/l < \sqrt{b}$. Очевидно, что под это условие подпадают все достаточно малые частицы. Такие частицы в каждой точке ведут себя, почти как невозмущенные жидкие частицы, и амплитуда осцилляций относительного расстояния между жидкой и примесной частицей много меньше амплитуды колебаний жидких частиц. Используем это обстоятельство для построения приближенного решения.

Рассмотрим поступательное движение частицы на некотором небольшом отрезке времени $(0, \Delta t)$. Положим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \boldsymbol{\xi},$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t)$ — путь невозмущенной жидкой частицы, находившейся в начальный момент в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$. Для легких частиц относительное смещение $\boldsymbol{\xi}(t)$ при небольших Δt носит в основном осцилляционный характер и мало. Используя процедуру осреднения, имеем в первом приближении

$$(13) \quad \bar{\mathbf{f}} = \langle \mathbf{f} \rangle_{\Pi} + \langle (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{f} \rangle_{\Pi},$$

где скобки $\langle \rangle_{\Pi}$ означают средние вдоль пути $\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t)$; траектории $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t)$ в турбулентном потоке случайны, и по их статистическому ансамблю производится осреднение, т. е. скобки $\langle \rangle_{\Pi}$ представляют средние лагранжевы характеристики. Уравнение для $\boldsymbol{\xi}$ имеет вид

$$(14) \quad \ddot{\xi} + a\xi = bu'_\sim(s(t), t) - \frac{d\mathbf{u}_\sim(s(t), t)}{dt},$$

где $\mathbf{u}_\sim = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_{\text{Л}}$. Проинтегрируем (14). Так как на временах $\sim 1/a$, которые для «легких» частиц очень малы, $\mathbf{u}'_\sim \approx \frac{d\mathbf{u}_\sim}{dt}$, то получаем

$$\xi = (b-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{-\omega^2 + ja\omega} \mathbf{Z}(\mathbf{r}_0, d\omega).$$

Для лагранжевых корреляций характерен экспоненциальный спад во времени, поэтому примем для спектральных плотностей зависимость от ω вида

$$W \sim 1/(\omega^2 + \omega_{\text{Л}}^2),$$

где $\omega_{\text{Л}} \sim 1/T_{\text{Л}}$; $T_{\text{Л}}$ — время спада лагранжевых корреляций. Тогда

$$\langle (\xi \nabla) \mathbf{f} \rangle_{\text{Л}} \approx \langle (\xi \nabla) a\mathbf{u}_\sim \rangle_{\text{Л}} = (b-1) \kappa_{\text{Л}}^2 \langle (\mathbf{u}_\sim \nabla) \mathbf{u}_\sim \rangle_{\text{Л}}, \quad \kappa_{\text{Л}}^2 = \frac{a}{a + \omega_{\text{Л}}}.$$

Корреляторы $\langle \rangle_{\text{Л}}$ — функции начального положения частицы \mathbf{r}_0 . Разбивая весь интервал t на небольшие отрезки Δt , на каждом из них будем получать среднюю силу (13) со своим значением \mathbf{r}_0 .

Чтобы продвинуться в анализе дальше, надо ограничиться условием плавности турбулентного поля пульсаций, которое состоит в том, что если в качестве времени Δt выбрать интегральный лагранжев масштаб

$T_{\text{Л}}$, смещение жидких частиц за время $T_{\text{Л}} = \int_t^{t+T_{\text{Л}}} ds$ должно быть в сред-

нем мало в сравнении с расстояниями, на которых существенно меняются характеристики турбулентности. Поскольку по истечении времени $T_{\text{Л}}$ жидкие частицы забывают о своей предыстории, то средние в (13) на каждом интервале $T_{\text{Л}}$ становятся функциями, зависящими от свойств потока в месте среднего расположения частицы, т. е. функциями $\mathbf{R}(t)$. При этом $\langle \mathbf{u} \rangle_{\text{Л}}$ имеет смысл средней скорости смещения центра тяжести частиц, располагаемых в объеме с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, $\langle \mathbf{u}' \rangle$ — имеет смысл их среднего ускорения и так далее*. В пределе однородной изотропной турбулентности эти характеристики совпадают с эйлеровыми средними.

Осредним аналогичным способом силу \mathbf{f}_{Ω} . Имеем

$$\mathbf{v} = (b-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{j\omega + a} \mathbf{Z}(\mathbf{r}_0, d\omega),$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\beta-1}{2} \text{rot} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{j\omega + \alpha} \mathbf{Z}(\mathbf{r}_0, d\omega) \right].$$

* Заметим, что по определению лагранжевых средних $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{Л}} = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$ и $\langle \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{Л}} = \langle \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) \rangle$ для жидких частиц, находящихся в точке \mathbf{r} в момент t . Мы же оперируем с несколько другими характеристиками: скоростью и ускорением жидких частиц, усредненных по начальным положениям в конечном объеме и по конечному времени — характерному периоду пульсаций.

Отсюда

$$\dot{\mathbf{u}}_{\Omega} = -\frac{b(1-b)(1-\beta)}{4} \lambda_{\text{Л}} \left(\nabla \frac{\langle \mathbf{u}_{\sim}^2 \rangle_{\text{Л}}}{2} - \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle_{\text{Л}} \right),$$

где

$$\lambda_{\text{Л}} = \frac{1 + \frac{2}{\omega_{\text{Л}}} \frac{\alpha a}{\alpha + a}}{1 + \frac{\alpha + a}{\omega_{\text{Л}}} + \frac{\alpha a}{\omega_{\text{Л}}^2}} \approx \frac{2\omega_{\text{Л}}}{\alpha + a}.$$

В результате приходим к следующему описанию осредненного движения легкой частицы

$$(15) \quad \dot{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{u} \rangle_{\text{Л}} + \frac{b}{a} \langle \mathbf{u}' \rangle_{\text{Л}} - \frac{1-b}{a} \chi_{\text{Л}}^2 \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle_{\text{Л}} - \frac{b(1-b)(1-\beta)}{4a} \lambda_{\text{Л}} \times \\ \times \left(\nabla \frac{\langle \mathbf{u}_{\sim}^2 \rangle_{\text{Л}}}{2} - \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle_{\text{Л}} \right).$$

Член $\sim \dot{\mathbf{R}}$ опущен, так как $a/\omega_{\text{Л}} \gg 1$. В пределе $a \rightarrow \infty$ (т. е. $d \rightarrow 0$) получаем $\dot{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{u} \rangle_{\text{Л}}$, т. е. средние дрейфы примесных частиц и жидких частиц совпадают, что и должно быть. На фактор плотности b (и β) в (15) в отличие от (12) не налагается условие малости. Заметим, что коэффициент при силе вращательного происхождения по-прежнему относительно мал, так как $\frac{b\lambda_{\text{Л}}}{\chi_{\text{Л}}^2} \sim b \frac{\omega_{\text{Л}}}{a} \ll \frac{\omega_{\text{Л}}}{c} \ll 1$.

Итак, для легких частиц средняя сила со стороны потока выражается через характеристики пульсаций формулой, сходной по структуре с формулой (12) для массивных частиц, но теперь это лагранжевы средние. Об этих характеристиках обычно известно значительно меньше, чем об эйлеровых средних, и это затрудняет количественное рассмотрение вопроса. Одно из существенных различий в движении легких и массивных частиц состоит в том, что средняя скорость $\langle \mathbf{u} \rangle_{\text{Л}}$ в неоднородном турбулентном потоке имеет значительную составляющую в направлении, перпендикулярном осредненной скорости течения $\langle \mathbf{u} \rangle$, что связано с самим способом существования неоднородного турбулентного потока.

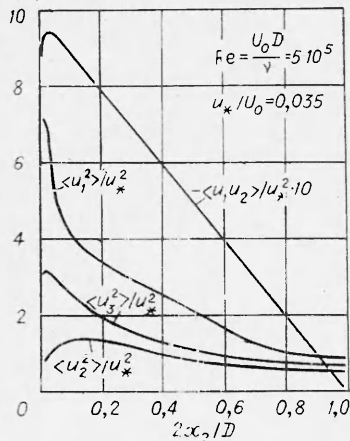
4. Частица в неоднородном турбулентном слое. Применим теорию к случаю частицы в турбулентной несжимаемой среде, характеристики поля \mathbf{u} которой стационарны и меняются только в одном направлении (ось x_2), перпендикулярном средней скорости течения (ось x_1). Такие условия могут служить некоторой идеализацией реальных течений жидкости и газа в трубах, вблизи плоских стенок, в турбулентном следе и других случаях.

Рассмотрим поведение массивной частицы. Ее осредненное движение $\mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$ определяется уравнением (12). Для принятой геометрии

$$\langle \mathbf{u} \rangle = (U, 0, 0), \quad \langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{u}_{\sim}' \rangle = \frac{d}{dx_2} \langle u_2 \mathbf{u}_{\sim} \rangle, \quad \text{причем } \langle u_2 u_3 \rangle = 0, \quad U = U(x_2).$$

Уравнение продольного движения частицы имеет вид

$$(16) \quad \ddot{x}_1 + a(\dot{x}_1 - U) = -(\chi^2 - b - \lambda b/4)d \langle u_1 u_2 \rangle / dx_2,$$



где $u_1 = (u_{\sim})_1$. Величина $\langle u_1 u_2 \rangle$ есть турбулентное напряжение сдвига. Благодаря $\langle u_1 u_2 \rangle$ осуществляется поперечный перенос турбулентных вихрей в потоке, grad $\langle u_1 u_2 \rangle$ направлен в сторону уменьшения пульсаций скорости. Так что $d\langle u_1 u_2 \rangle/dx_2$ равно нулю в зоне максимума турбулентности и имеет разные знаки по обе стороны от этой зоны.

Для конкретности рассмотрим течение в длинной трубе. Профиль $\langle u_1 u_2 \rangle$ приведен на фигуре (по данным Лауфера [7]), где D — диаметр трубы; U_0 — средняя скорость на оси; u_* — скорость трения; ось x_2 направлена от стенки по радиусу; при $x_2 \rightarrow 0$ все кривые спадают до нуля. У стенки $\langle u_1 u_2 \rangle = 0$, затем $\langle u_1 u_2 \rangle$ принимает отрицательные значения, достигает минимума и затем в ядре потока возрастает, спадая по

величине до нуля. В ядре потока $\frac{d}{dx_2} \langle u_1 u_2 \rangle \approx \frac{2u_*^2}{D}$, а наибольшее (отрицательное) значение эта величина имеет в зоне $x_2 u_* / \nu \sim 10 - 15$ и порядка $10^3 \cdot u_*^2 / D \sim U_0^2 / D$. Для воздушного потока ($\nu = 0,15$ см/с), движущегося со скоростью 15 м/с по трубе диаметром 10 см, $Re = 10^5$, $u_* = 75$ см/с, $2u_*^2 / D \approx 10^3$ см/с² $\sim g$, $U_0^2 / D \approx 2 \cdot 10^5$ см/с² $\sim 2 \cdot 10^2 g$, где g — ускорение силы тяжести.

Заметим, что для течения в трубе форма спектра турбулентности W меняется с изменением расстояния до оси и для разных величин W различна. Предположение (8) нарушено, и, строго говоря, уравнение (12) для этого случая неправомерно. Однако спектр турбулентности входит в задачу в заинтегрированном виде, поэтому уравнения мало чувствительны к отклонениям от закона (8). Важно, чтобы во всех точках сечения было мало число Рейнольдса для частицы и ее частота релаксации a была много меньше частот сосредоточения спектра пульсаций u . Но это ограничения на частицу, а не на поток.

Рассмотрим, что дает уравнение (16) для случая частицы в трубе. При $\kappa^2 > b + \lambda b/4$ сила справа в (16) в пристеночном слое положительна и ускоряет частицу*, а в ядре потока сила направлена против средней скорости течения и притормаживает частицу. Частицы же оказывают обратное воздействие на поток: находясь у стенки, они притормаживают течение, а в ядре потока — его ускоряют. Происходит это за счет энергии, приобретаемой частицей от турбулентных пульсаций.

Поясним физическую причину этого интересного поведения. Согласно уравнению Навье — Стокса

$$\left\langle \rho \frac{d}{dt} u_1 \right\rangle = \rho \frac{d}{dx_2} \langle u_1 u_2 \rangle = - \frac{dp}{dx_2} + \rho \nu \frac{d^2}{dx_2^2} U.$$

Справа стоит средняя сила на выделенный объем жидкости со стороны ее окружения, силу обуславливают давление p и вязкость. Величину

* Заметим, что в вязком подслое ($x_2 u_* / \nu \leq 1$) пульсационные силы могут превышать стоксову силу aU , так как при $x_2 u_* / \nu = 1$ $(\kappa^2 a U) d\langle u_1 u_2 \rangle / dx_2 \sim 10^{-3} Re a / \omega_2$.

— $\rho d \langle u_1 u_2 \rangle / dx_2$ можно интерпретировать как силу инерции, она имеет пульсационное происхождение — обусловлена дрожаниями выделенного объема (в среднем он не ускоряется $dU/dt \equiv 0$). Эта сила есть не что иное, как результирующая напряжений Рейнольдса на объем. На примесную частицу действует (с поправкой на эффект присоединенной массы) то же окружение, но инерционная сила отличается от $-\rho d \langle u_1 \times u_2 \rangle / dx_2$. Компенсация обоого рода сил не происходит, в результате чего и появляется дополнительная к силе Стокса сила в (16). Ее часть $b \frac{d^2}{dx_2^2} \langle u_1 u_2 \rangle = b \langle u_1' \rangle$ обусловлена градиентом давления в окружающей жидкости, с инерцией поступательных движений связан член $\sim \kappa^2$, вращательных $\sim \lambda$. При $\kappa^2 < b + \lambda b/4$ частица сверхмассивна, ее пульсации очень малы, и преобладает сила со стороны окружения — имеем обычное направление действия сил. При $\kappa^2 > b + \lambda b/4$ преобладают пульсационные силы, они совпадают с направлением действия — $-\rho d \langle u_1 u_2 \rangle / dx_2$ и вызывают указанный выше эффект.

Рассмотрим поперечный дрейф частицы. Он не зависит от продольного (обратное, как видно из уравнения (16), неверно) и описывается уравнением

$$(17) \quad \ddot{x}_2 + a \dot{x}_2 = - \left(\kappa^2 - b - \frac{\lambda b}{4} \right) \frac{d}{dx_2} \langle u_2^2 \rangle - \frac{\lambda b}{4} \frac{d}{dx_2} u_2^2 = f_2,$$

где $q^2 = \frac{1}{2} \langle u_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \rangle$. Функции $\langle u_2^2 \rangle$ и q^2 вблизи стенки,

как видно из фигуры, имеют разный характер изменения. В вязком подслое $q^2 \sim 0,1 u_*^2 y^2$, $y = x_2 u_* / \nu$, функция $\langle u_2^2 \rangle$ при $x_2 \rightarrow 0$ спадает быстрее y^2 , а следовательно, быстрее q^2 (см. рис. 7.35 в книге [7]), вне вязкого подслоя вклад от $\sim dq^2/dx_2$ в (17) уменьшается и при $\kappa^2 \gg b$

$f_2 = -\kappa^2 \frac{d}{dx_2} \langle u_2^2 \rangle$. Таким образом, при $\kappa^2 \gg b$ в зоне максимума

$\langle u_2^2 \rangle$ f_2 меняет знак, т. е. эта зона — водораздел осредненного поперечного смещения частицы. Ей соответствует $y \sim 5 \cdot 10^2$, при больших y частицы дрейфуют к оси трубы, при меньших — к стенке.

В интервале $1 < y < 5 \cdot 10^2$ функцию $\langle u_2^2 \rangle$ аппроксимируют [5] формулой $\langle u_2^2 \rangle = u_*^2 \left(\frac{y}{y + y_0} \right)^2$, где $y_0 \approx 10$. Уравнение (17) в этой зоне при $\kappa^2 \gg b$ приобретает вид

$$(18) \quad \ddot{y} + a \dot{y} + \frac{1}{\tau_0^2} \frac{\ddot{y}}{(1 + y/y_0)^3} \approx 0,$$

где $\tau_0 = \frac{y_0}{\sqrt{2\kappa}} \frac{\nu}{u_*^2}$. Величина $a \tau_0 \approx y_0 \frac{\nu \omega_2}{u_*^2} \sim \frac{y_0}{\text{Re}} \frac{U^2}{u_*^2}$ не зависит от параметров частицы и в широком интервале $\text{Re} > 10^4$ мала $\left(\frac{y_0}{\text{Re}} \frac{U^2}{u_*^2} \ll 0,1 \right)$.

При $a \tau_0 \ll 1$ дрейф в основном определен временем τ_0 . При малых $a \tau_0$ из (18) получаем оценку времени $\tau(y)$ достижения вязкого слоя частицей, которая при $t = 0$ находилась в точке y и покоилась

$$\tau y = (\pi/2) \tau_0 (1 + y/y_0)^{3/2} + (a \tau_0 / 3) \tau_0 (y/y_0)^3 + \dots$$

Второй член сравнивается с первым при $y \approx y_0 \sqrt{3\pi/2 a \tau_0} \sim 10^2$. При

$y < y_0$, $\tau(y)$ слабо зависит от y и порядка τ_0 . Для частицы плотности $\rho_0 = 10 \text{ г/см}^3$ в воздушном потоке приведенного выше примера имеем $b = 2 \cdot 10^{-4}$, $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$, $l \sim \nu/u_* \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Положим диаметр частицы равным $2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, тогда $a \approx 90 \text{ с}^{-1}$. Получаем $\tau_0 \approx 10^{-1} \text{ с}$, $\tau(y=50) \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Массивная частица, свободно падающая с высоты $y = 50$, летит в потоке в течение времени $\tau_g = \sqrt{(2y/g)(\nu/u_*)} \approx 1,4 \times 10^{-2} \text{ с}$, т. е. значительно дольше.

Обсудим случай легкой частицы. Не располагая нужными сведениями о лагранжевых средних, фигурирующих в уравнении (15), ограничимся лишь несколькими замечаниями. Для рассматриваемой симметрии течения скорость $\langle \mathbf{u} \rangle_{\text{л}}$ имеет и продольную и поперечную составляющие $\langle \mathbf{u} \rangle_{\text{л}} = (U_{\text{л}}, V_{\text{л}}, 0)$. Можно принять $U_{\text{л}} \approx U(x_2)$. Поперечная скорость $V_{\text{л}}$ обусловлена непостоянством dU/dx_2 . В зоне генерации турбулентности (здесь $|dU/dx_2|$ велико) $V_{\text{л}}(x_2)$ таково, что жидкие частицы дрейфуют к слоям относительно спокойного течения. А в этих спокойных зонах $V_{\text{л}}(x_2)$ имеет противоположное направление — отсюда жидкие частицы, погасив свою вихревую энергию, в среднем уходят к зоне генерации. Там они набирают энергию и снова в путь, благодаря такой конвекции и поддерживается стационарный режим турбулентности. Заметим, что относительный снос жидких частиц, т. е. отличие $\langle \mathbf{u} \rangle_{\text{л}}$ от $\langle \mathbf{u} \rangle$, вызывают силы пульсационного происхождения — градиенты напряжений Рейнольдса. Поперечное ускорение жидкой частицы

$$\langle u_2'(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{л}} = \langle u_2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{d}{dx_2} \langle u_2^2 \rangle.$$

Применительно к течению в трубе зоне максимальной генерации турбулентности соответствует $y = y_r \sim 15$. При $y < y_r$ должно быть $V_{\text{л}}(x_2) > 0$. Очевидно, что в вязком подслое $V_{\text{л}}(x_2) = 0$. В области $y \approx 10$, по-видимому, $V_{\text{л}} \sim 0,1 U_*$ (такого порядка оказывается $V_{\text{л}}$ в зоне экстремума $d\langle u_1 u_2 \rangle / dx_2$ свободной турбулентной струи (см. § 5, 6 в [7])). При $y > y_r$ $V_{\text{л}}(x_2) < 0$. Положим в (15) $\langle \mathbf{u}' \rangle_{\text{л}} = \langle \mathbf{u}' \rangle$ (это правомерно лишь для слабонеоднородной турбулентности, поэтому ограничимся качественной картиной движения). Тогда $\langle \mathbf{u}' \rangle_{\text{л}} \approx \langle \mathbf{u}' \rangle - \frac{d}{dx_2} \times$

$\times (V_{\text{л}} \langle \mathbf{u} \rangle_{\text{л}})$ и для продольного движения частицы имеем при малых b

$$\dot{x}_1 - U \approx - \frac{\kappa_{\text{л}}^2}{a} \frac{d}{dx_2} (\langle u_1 u_2 \rangle - UV_{\text{л}}).$$

Из приведенного выше обсуждения следует, что профиль изменения $-UV_{\text{л}}$ примерно подобен профилю $\langle u_1 u_2 \rangle$. Тем самым действие обоих членов в скобках суммируется. Направление действия совпадает с тем, которое имело место для массивных частиц. Аналогичный характер имеет поэтому и обратная реакция частиц на среду. Так как для легких частиц $\kappa_{\text{л}} \sim 1$, то удельная на единицу массы частицы сила теперь значительно больше.

Для поперечного движения имеем при малых b

$$(19) \quad \dot{x}_2 - V_{\text{л}} \approx - \frac{\kappa_{\text{л}}^2}{a} \frac{d}{dx_2} \langle u_2^2 \rangle - \frac{\lambda_{\text{л}} b}{4a} \frac{d}{dx_2} q^2.$$

В уравнении опущены члены, малость которых порядка $V_{\text{л}}^2/q^2$. Существенное отличие этого уравнения от уравнения (17) в наличии члена $V_{\text{л}}$.

При $y \approx 10 V_{\text{д}} \sim 0,1u_*$, а члены справа в (19) по оценкам много меньше этой величины, так что здесь происходит снос мягких частиц вместе с жидкими к ядру потока. Скорость сноса $V_{\text{д}}(x_2)$ с приближением к вязкому подслою падает. Можно показать, что спад $V_{\text{д}}(x_2)$ должен быть быстрее скорости спада напряжений Рейнольдса. Поэтому вблизи стенки роль членов справа в (19) становится преобладающей, здесь $\dot{x}_2 < 0$. При $y \sim 1$ и $b \ll 1$

$$-\dot{x}_2 \approx -\frac{\kappa_{\text{д}}^2}{a} \frac{d}{dx_2} \langle u_2^2 \rangle \approx \frac{2\kappa_{\text{д}}^2}{y_0^2} \frac{u_*^3}{av} \sim 2 \cdot 10^{-2} \frac{u_*^3}{vg} \frac{g}{a},$$

где g/a — скорость гравитационного осаждения частицы. Для приведенного примера с воздушным потоком $2 \cdot 10^{-2} u_*^3/vg \approx 60$, т. е. $|\dot{x}_2| \gg g/a$.

Заметим, что для сравнения с опытом, а опыт, в частности, подтверждает факт ускоренного оседания частиц из турбулентного потока на стенки (см., например, [3—5, 12—15] *), сделанных оценок недостаточно. Дело в том, что в экспериментах наблюдают не отдельные частицы (это сложно), а скорость осаждения на стенки множества частиц или их распределение по сечению потока. И то и другое требует решения задачи диффузии, т. е. решения уравнения диффузии или кинетического уравнения с учетом пульсационных сил и с теми или иными граничными условиями. Эта важная для приложений задача выходит за рамки данной статьи.

Таким образом, показано, что беспорядочные движения частицы, в которые она вовлекается турбулентной средой, приводят к значительным, накапливающимся за много периодов турбулентных пульсаций эффектам. Важную роль при этом играет соотношение между стоковой частотой релаксации частицы в потоке и характерными частотами спектра турбулентности. Исследованы крайние случаи «легких» частиц (сюда относятся все частицы достаточно малых размеров) и частиц «массивных».

Для осредненных движений частиц в обоих случаях получены простые по структуре уравнения (12), (15), в которые входят соответственно эйлеровы и лагранжевы характеристики турбулентности. Уравнения хорошо стыкуются, что позволяет полагать возможной интерполяцию результатов на область параметров, где $a \sim \omega_3 - \omega_{\text{д}}$. Прямой анализ в этой промежуточной области сложен из-за отсутствия в задаче малого параметра. Для этой области характерно возрастание вклада в осредненное движение от беспорядочных вращений частицы. Для легких и массивных частиц фактор вращения надо принимать во внимание лишь в зоне, где турбулентность резко неоднородна.

На основе уравнений (12), (15) был рассмотрен характер дрейфа частиц в турбулентном потоке между параллельными стенками. Теория строилась для слабонеоднородной турбулентности, поэтому ее приложение к данной задаче не гарантирует, как отмечалось, большой точности оценок, однако качественное поведение, видимо, отражено правильно. К общим качественным выводам здесь можно отнести: 1. Значительность сил пульсационного происхождения, их соизмеримость (в пересчете на единицу массы частицы) с величинами характерных ускорений в потоке.

* Хотя рассмотренный механизм явления, по-видимому, достаточно эффективен, он не является единственным. Многие авторы склоняются к тому, что основной механический фактор (есть и другие, например, фактор электризации частиц) состоит в том, что турбулентными порывами частицы иногда выбрасываются из потока и по инерции летят через вязкий слой к стенке.

2. Наличие водораздела для поперечных потоку дрейфовых движений частицы. Существует зона, где плотные (малые b) частицы «притягиваются» к стенке, а достаточно далеко от вязкого слоя ($y \geq 5 \cdot 10^2$) лежит зона, где частицы «отталкиваются» от стенки. 3. Для продольного потока дрейфа частиц (у которых b мало) характерно опережение частицами течения в зоне вблизи вязкого подслоя и отставание от течения в ядре потока. Так как эффект вызывается силами со стороны среды, то существует и обратная реакция на поток. Частицы, оказывающиеся в ядре течения, его ускоряют, а вблизи стенок — притормаживают. Результирующий эффект зависит от распределения частиц по сечению потока. Тем самым наличие малой («пассивной») примеси в неоднородном турбулентном потоке не сводится только, как иногда считают, к изменению вязкости среды. Наряду с этим происходит обратная трансформация турбулентных движений среды в направленные.

Дополнительные пульсационного происхождения силы на частицу в турбулентной среде появляются по той же физической причине, по которой на жидкие частицы (т. е. малые объемы среды) действуют эффективные (иногда их называют фиктивными) силы, выражаемые через напряжения Рейнольдса. Последние собственно и вызывают отличие осредненного движения жидких частиц от эйлерова движения среды. Это обстоятельство учтено при анализе лагранжевых характеристик в п. 4. Развитие этого вопроса позволяет по-новому подойти к описанию неоднородной турбулентности. Однако это — предмет отдельного обсуждения.

Поступила 17 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., «Наука», 1965.
2. Гапонов А. В., Миллер М. А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном эл.-м. поле.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 242.
3. Фукс П. А. Механика аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Aerodynamic capture of particles. Ed by E. G. Richardson. L.— N. Y., 1960.
5. Aerosol Scienc. Ed by C. N. Davies. L — N. Y., 1966.
6. Marble F. E. Dynamics of dusty gases.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 2. Palo Alto, Calif., 1970.
7. Хинце П. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
8. Кучанов С. П., Левич В. Г. Диссипация энергии в турбулентном газе, содержащем взвешенные частицы.—«Докл. АН СССР», 1967, т. 174, с. 763.
9. Rubinow S. J., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid.—«J. Fluid Mech.», 1961, vol. 11, p. 447.
10. Jeffrey R. C., Pearson J. R. A. Particle motion in a laminar vertical tube flow.— «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 22, p. 721.
11. Ламб Г. Гидродинамика. М., ГИТТЛ, 1944.
12. Friedlander S. K., Johnstone H. F. Deposition of suspended particles from turbulent gas streams.—«Industr. and Engng Chem.», 1957, vol. 49, p. 1151.
13. Schneel G. A. Particle deposition from turbulent air flow.—«J. Geophys. Res.», 1970, vol. 75, p. 1766.
14. Montgomery T. L., Corm H. Aerosol deposition in a pipe with turbulent air flow.—«J. Aerosol Sci.», 1970, vol. 1, p. 185.
15. Forhey L. J., Spielman L. A. Deposition of coarse aerosols from turbulent flow.— «J. Aerosol Sci.», 1974, vol. 5, p. 257.