

Здесь параметры B_2 и B_4 связаны с A_2, A_4 следующим образом:

$$B_2 = 3A_2 \sqrt{G/2m} = 3 \sqrt{G/2m} 1.369, \quad B_4 = \sqrt{G/2m} (10A_2 - 35/4 A_4) = 2 \sqrt{G/2m} 3.063$$

В обозначениях работы [3] те же формулы имеют вид

$$mJ_{ijkl}^{(4)} = -B_1 \rho [14a_{ijkl}^{(4)} - 6a_{mm(ij)\delta_{kl}}^{(4)} + 6a_{(ij)a_{kl}}^{(2)}] + B_3 \rho [35a_{ijkl}^{(4)} - 30a_{mm(ij)\delta_{kl}}^{(4)} + 3a_{nnmm\delta_{(ij)\delta_{kl}}}^{(4)} + 105a_{(ij)a_{kl}}^{(2)} - 60a_{m(i)\delta_{jk}a_{lm}}^{(2)} + 6a_{nm}^{(2)} a_{nm}^{(2)} \delta_{(ij)\delta_{kl}}] \quad (9)$$

$$mJ_{ijklm}^{(5)} = -10B_1 \rho [2a_{ijklm}^{(5)} + a_{(ij)a_{klm}}^{(3)} - a_{nn(ijk)\delta_{lm}}^{(5)}] + 1/2 B_3 \rho [175a_{ijklm}^{(5)} + 350a_{(ij)a_{klm}}^{(3)} - 150a_{nn(ijk)\delta_{lm}}^{(5)} - 300a_{n(i)\delta_{jk}a_{lm}n}^{(3)} + 150a_{nn}^{(3)} a_{jk}^{(2)} \delta_{lm} + 15a_{ppnn(i)\delta_{jk}\delta_{lm}}^{(5)} + 60a_{pn}^{(2)} a_{pn}^{(3)} \delta_{jk}\delta_{lm} - 60a_{ppn}^{(3)} a_n^{(2)} \delta_{jk}\delta_{lm}] \quad (10)$$

Здесь

$$B_1 = 1/2 m A_2 \sqrt{G/2m}, \quad B_3 = 1/16 m A_4 \sqrt{G/2m}$$

Формулы (3) — (7) можно найти в работе [2] (в формуле (6) там допущена ошибка, а коэффициент B_4 вычислен неправильно).

Поступила 18 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases. Phil. Trans. Roy. Soc. London, v. 157, p. 49 (1867).
2. Kenberry E., Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory, I. Journ. Rat. Mech. Anal. v. 5 No. 1, p. 1 (1956).
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math. v. 2, No. 4, p. 331 (1949).

К ОЦЕНКЕ ШИРИНЫ ФРОНТА СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ

Е. В. Ступоченко

(Москва)

В гидродинамике идеальной жидкости ударная волна представляет собой геометрическую поверхность разрыва гидродинамических (и термодинамических) величин. Введение в уравнения гидродинамики вязкости и теплопроводности изменяет как картину возникновения ударной волны, так и ее структуру. Вместо геометрической поверхности разрыва появляется переходный слой конечной ширины (отметим очевидную условность понятия «ширины» переходного слоя, учитывая асимптотический характер изменения состояния среды на его «границах»). В случае ударных волн достаточно малой интенсивности уравнения Навье — Стокса применимы к течению в переходном слое и, таким образом, полностью определяют его структуру (см., например, [1]). Однако в случае сильных ударных волн в газе (понимая под этим ударные волны, в которых разность, например плотностей на границах переходного слоя, есть величина того же порядка, что и значения самих плотностей) оценка ширины Δx ударной волны при помощи уравнений Навье — Стокса приводит к результату

$$\Delta x \approx l_0 \quad (1)$$

где l_0 — длина свободного пробега молекулы газа [1] (при этом используются выражения коэффициентов переноса через молекулярные величины). Уравнения макроскопической газодинамики неприменимы к процессам в таких пространственных областях, и ширина переходного слоя (1) в макроскопическом рассмотрении должна быть приравнена нулю. Поэтому представляет известный интерес оценка ширины ударной волны методами кинетической теории газов. Ниже такая оценка проводится непосредственно при помощи кинетического уравнения Больцмана и его H -теоремы (не прибегая к решению кинетического уравнения).

Итак, в рамках феноменологического описания ударная волна большой интенсивности представляется геометрической поверхностью разрыва, по обе стороны которой поток может описываться уравнениями газодинамики, содержащими коэффициенты вязкости и теплопроводности, но основной вклад в увеличение энтропии среды вносят

диссипативные процессы, локализующиеся в «поверхности» разрыва. С молекулярно-кинетической точки зрения, эти процессы развиваются в тонком слое газа, состояние которого существенно неравновесно. Ограничимся прежде всего случаем ударной волны в одноатомном газе («бесструктурные» частицы). Тогда состояние газа в рассматриваемом слое может быть описано при помощи функции распределения $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)$, где \mathbf{r} — вектор положения молекулы, \mathbf{c} — ее скорость. Выражение $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{c}$ дает число молекул в элементе $d\mathbf{r}$ пространства координат и элементе $d\mathbf{c}$ пространства скоростей в окрестности точек \mathbf{r} и \mathbf{c} соответственно.

В случае сильной ударной волны функция f на ширине слоя меняется существенно. В этих условиях термодинамическое определение энтропии неприменимо ни к слою в целом, ни к его элементам. Неприменимо здесь также понятие возникновения энтропии в том виде, в каком оно вводится в термодинамике необратимых процессов [2], так как при этом предполагается термодинамическое описание неравновесных систем. Однако оба эти понятия обобщаются на системы с неравновесной функцией распределения $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)$ при помощи H -функции Больцмана. Локальное значение обобщенной энтропии H единицы объема определяется следующим равенством (см., например, [3]):

$$H = -k \int \ln f \cdot f d\mathbf{c} \quad (2)$$

где k — постоянная Больцмана и интегрирование производится по всему пространству скоростей¹. Для равновесной функции распределения H совпадает с термодинамической энтропией.

Дифференцирование (2) по времени и подстановка для производной $\partial f / \partial t$ выражения из кинетического уравнения Больцмана (в отсутствие внешних сил)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e \quad (3)$$

приводит к соотношению

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = \sigma \quad (4)$$

Здесь $(\partial f / \partial t)_e$ — интеграл столкновений, представляющий скорость изменения функции распределения вследствие межмолекулярных столкновений, и введены обозначения

$$\mathbf{S} = -k \int \mathbf{c} \ln f \cdot f d\mathbf{c} \quad (5)$$

$$\sigma = -k \int (1 + \ln f) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e d\mathbf{c} \quad (6)$$

Интерпретация уравнения (4) и выражений (5) и (6) очевидна. Вектор \mathbf{S} есть вектор плотности потока обобщенной энтропии, а σ — возникновение энтропии — изменение обобщенной энтропии единицы объема вследствие необратимых процессов в объеме. Больцманом показано, что σ положительно для неравновесных газов и равно нулю в случае статистического равновесия

$$\sigma \geq 0 \quad (7)$$

Определение (2) и соотношения (4) — (7) вместе с вытекающим из них выводом о монотонном возрастании (обобщенной) энтропии изолированной системы составляют содержание H -теоремы Больцмана. Воспользуемся этими результатами для оценки ширины переходного слоя в сильных ударных волнах.

Рассматриваем течение в системе координат, относительно которой ударная волна неподвижна, скорость потока считаем направленной по оси x . Предполагая стационарность течения и интегрируя по x обе части уравнения (4), получаем

$$S_2 - S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma dx \quad (8)$$

где S_1 и S_2 — значения плотности потока энтропии в невозмущенной и возмущенной средах соответственно.

¹ Считаем молекулы классическими частицами. Для квантовых частиц, движение которых квазиклассично

$$H = k \int f \ln \frac{em^3}{fh^3} d\mathbf{c}$$

Здесь h — постоянная Планка, m — масса молекулы, e — основание натуральных логарифмов.

Интеграл в правой части уравнения (8) практически определяется некоторым словом конечной ширины Δx , и уравнение (8) может быть записано в виде

$$S_2 - S_1 = \sigma^* \Delta x \quad (9)$$

где σ^* — некоторое среднее значение возникновения энтропии в слое.

Равенство (9) следует рассматривать как одно из возможных определений ширины ударной волны. Заметим, что Δx зависит от выбора σ^* . Определение Δx можно сделать однозначным, принимая, например, σ^* равным максимальному значению возникновения энтропии в слое (σ , являясь положительной величиной, равно нулю на «границах» слоя). Однако для оценки Δx по порядку величины подобные уточнения несущественны.

Оценим обе части равенства (9) по порядку величины при помощи определений (5) и (6). При этом воспользуемся следующими оценками. Для f можно принять $f \langle c \rangle^3 \approx n$, где $\langle c \rangle$ — некоторая средняя тепловая скорость, n — плотность числа частиц. Предполагаем, что изменения таких величин, как f , $\langle c \rangle$, n и т. д. при переходе через слой являются величинами того же порядка, что и f , $\langle c \rangle$, n и т. д. соответственно (ударная волна «большой» интенсивности). Поэтому левая часть равенства (9) по порядку величины равна

$$S_2 - S_1 \approx k \langle c \rangle \ln f \cdot f \langle c \rangle^3 \quad (10)$$

Интеграл столкновений $(\partial f / \partial t)_e$ имеет вид [3]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e = \iiint |c_1 - c_2| (f'f_1' - ff_1) b db d\varphi dc_1 \quad (11)$$

$$f_1 \equiv f(c_1), \quad f' \equiv f(c), \quad f_1' \equiv f(c_1')$$

Здесь c и c_1 — скорости молекул до соударения, c' и c_1' — скорости после соударения, b — прицельное расстояние, φ — угловой параметр столкновения. При существенном отклонении f от максвелловского распределения из (11) получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e \approx \langle c \rangle \frac{n^2}{\langle c \rangle^6} r_0^2 \langle c \rangle^3 \quad (12)$$

где r_0 — эффективный радиус действия межмолекулярных сил. Поэтому правая часть равенства (9) по порядку величины оказывается равной

$$\approx k \ln f \langle c \rangle \langle c \rangle^3 \frac{n^2}{\langle c \rangle^6} r_0^2 \langle c \rangle^3 \Delta x \quad (13)$$

Подставляя оценки (10) и (13) в равенство (9), получаем

$$nr_0^2 \Delta x \approx 1 \quad (14)$$

Левая часть (14) по порядку величины равна числу соударений, испытываемых молекулой при пролете расстояния Δx . Поэтому из (14) следует, что Δx порядка длины свободного пробега, что согласуется с оценкой (1).

В случае многоатомных газов соотношение (14) дает оценку ширины тонкого переходного слоя с существенным нарушением максвелловского распределения скоростей («фронта» ударной волны, за которым следует относительно широкая зона установления равновесного распределения энергии между внутренними и поступательными степенями свободы). В этом переходном слое газ практически ведет себя как одноатомный. Поэтому здесь применимы все соотношения, приведшие к оценке (14).

Заметим, что время установления равновесия между вращательными и поступательными степенями свободы обычно по порядку величины близко к времени свободного пробега (несколько превышая его). В этом случае оценку ширины соответствующей зоны можно провести при помощи естественного обобщения изложенного здесь вывода.

Поступила 25 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд. «Мир», 1964.
3. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. Изд. иностр. лит., 1955.