



УЧЕТ БЛОЧНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

А. И. Чанышев^{1,2}, О. Е. Белоусова¹

¹*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

²*Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская 52, г. Новосибирск 630099, Россия*

Для сред с периодическим изменением модуля Юнга и предела текучести решаются задачи о распределении напряжений, деформаций и смещений вокруг одиночных выработок сферической и цилиндрической форм. Блочность среды задается различием в модулях упругости и пределах текучести в самих блоках и межблочном пространстве. В каждом рассмотренном случае получены аналитические решения, пригодные для тестирования численных схем. Исследовано влияние количества блоков, различий в свойствах блоков и прослоек на характер изменения напряжений, деформаций, смещений. Показано, что блочность является одним из факторов образования зональной дезинтеграции массива пород вокруг выработок.

Блочность, модуль Юнга, предел текучести, напряжения, деформации, периодические функции

CONSIDERATION OF BLOCK STRUCTURE IN MATHEMATICAL MODELS OF ROCK MASS

A. I. Chanyshev^{1,2} and O. E. Belousova¹

¹*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

²*Novosibirsk State University of Economics and Management
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia*

For the media with periodic changes in Young's modulus and yield strength, the problems of stress, strain and displacement distribution around single excavations of spherical and cylindrical shape are solved. Block structure of the medium is determined by the difference between the elastic modules and the yield strength in the blocks and interblock space. In each case analytical solutions are obtained. The influence of blocks quantity, difference in block properties and interlayers on the nature of changes in stresses, strains and displacements was studied. It is noted that block structure is one of the factors for forming zonal disintegration around excavations.

Block structure, Young's modulus, yield strength, stresses, strains, periodic functions

В [1] отмечается, что в механике горных пород особое место занимает ряд вопросов, связанных с изучением неоднородностей и анизотропии искусственного происхождения. Эти особенности массива горных пород являются следствием горностроительных работ по сооружению выработок, влиянием взрывных работ на законтурный массив [2]. При изучении механического состояния пород вблизи контуров вертикальных стволов в [3] путем отбора и соответствующих испытаний породных кернов, взятых на глубине до 10 м, с одновременным измерением напряжений в скважинах кроме перечисленных особенностей установлен также волновой характер распределения механических характеристик, при которых зоны повышенных значений механи-

ческих характеристик чередуются с зонами их понижения. Неоднородность пород исследуются во многих работах, например в [4], где ее изучение рассматривалось в свете улучшения процесса нефтеотдачи.

Наряду с исследованиями неоднородности и анизотропии сред существует множество работ, в которых делается попытка учесть блочный характер строения массива пород вокруг горных выработок. К ним относятся математические модели массива горных пород, состоящие из деформируемых элементов в виде параллелепипедов, соединенных между собой более ослабленным упругим материалом [5], другие модели связывают блочную среду с цепочкой масс, соединенных между собой упругими пружинами и вязкими элементами [6–8]. В данной работе предлагается блочную модель массива пород изучать на основе периодических функций, т. е. считать, что блочная среда — это неоднородная среда с периодическим изменением модулей упругости, пластичности, пределов упругости, прочности и т. д. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие данную позицию и влияние параметров блоков на изменение основных характеристик напряженно-деформированного состояния — напряжения, деформации, смещения.

Пример 1. Пусть в массиве горных пород проведена выработка сферической формы. Примем, что блочный характер строения массива пород обусловлен действием в нем максимальных касательных напряжений. Поскольку действие этих напряжений в упругости сопровождается сдвигами с модулем сдвига 2μ , будем считать, что этот модуль является периодической функцией координаты r — расстояния от центра выработки до рассматриваемой точки. Отметим, что аналогичное допущение для изменения модуля Юнга E вводилось в [4]. Дальнейшая цель — оценить периодичность в модуле сдвига 2μ на развитие сдвигов в массиве горных пород вокруг сферической выработки с помощью аналитического решения, которое будет получено ниже.

Для решения задачи в сферической системе координат r, φ, χ в случае центральной симметрии имеем соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi\chi} = \gamma_{r\chi} = 0, \quad (1)$$

уравнения равновесия $\sigma_\varphi = \sigma_\chi, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\chi} = \tau_{r\chi} = 0,$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \rho F_r = 0, \quad (2)$$

соотношения закона Гука

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2\mu}, \quad \varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\varphi}{3k}, \quad (3)$$

где $2\mu = E/(1+\nu), 3k = E/(1-2\nu).$

Выражая из (3), (1) напряжения $\sigma_r, \sigma_r - \sigma_\varphi$ через смещение u_r , получаем

$$\sigma_r = \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \frac{du_r}{dr} + \left(2k - \frac{4}{3}\mu\right) \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_r - \sigma_\varphi = 2\mu \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r}\right). \quad (4)$$

Начиная с этого момента предполагаем, что модуль сдвига является некоторой заданной функцией r :

$$2\mu = 2\mu(r). \quad (5)$$

Далее, подставляя (4) при условии (5) в (2), находим уравнение для нахождения смещения $u = u_r$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + A'(r) \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) = 0, \quad (6)$$

где положено

$$F_r = 0, \quad A'(r) = d \ln \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) / dr. \quad (7)$$

Теперь поставим следующую задачу — найти общее решение (6) при условиях (7). Перейдем от переменной r/r_0 , где r_0 — радиус выработки к переменной $\xi = \ln(r/r_0)$. Тогда из условия $r = r_0 e^\xi$ получаем $\xi = 0$ при $r = r_0$. Из этого определения следуют выражения для производных

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{du}{d\xi} \frac{1}{r^2}. \quad (8)$$

При подстановке в (6) они дают следующее уравнение для отыскания функции u :

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{du}{d\xi} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{dA(\xi)}{d\xi} \left[\frac{du}{d\xi} - u \right] + \frac{2}{r^2} \left[\frac{du}{d\xi} - u \right] = 0. \quad (9)$$

После умножения (9) на r^2 получаем

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{du}{d\xi} + P(\xi) \left(\frac{du}{d\xi} - u \right) + 2 \frac{du}{d\xi} - 2u = 0, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{du}{d\xi} - 2u \right) + P(\xi) \left(\frac{du}{d\xi} - u \right) = 0. \quad (11)$$

Здесь использовано обозначение: $P(\xi) = \frac{d}{d\xi} \ln \left(k + \frac{4}{3} \mu \right)$.

Для решения (11) введем вспомогательную функцию

$$v = du/d\xi - u. \quad (12)$$

Тогда с помощью этой подстановки уравнение (11) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка для определения v . Покажем это.

В самом деле, из (12) находим последовательно

$$\frac{du}{d\xi} = v + u, \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{dv}{d\xi} + \frac{du}{d\xi}. \quad (13)$$

На основании (13) из (11) получаем, что

$$\frac{dv}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} - 2u + vP(\xi) = 0. \quad (14)$$

Используя еще раз подстановку (12), окончательно для определения функции v устанавливаем уравнение

$$dv/d\xi + v(P(\xi) + 2) = 0. \quad (15)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После определения функции v в (15) из (12) находим u . Приведем решения всех этих уравнений. Разделяя переменные в (15), имеем

$$dv/v = -(P(\xi) + 2)d\xi. \quad (16)$$

Интегрируя (16), устанавливаем, что

$$\ln \frac{v}{v_0} = -2\xi - \ln \left[k + \frac{4}{3} \mu / \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) \Big|_{\xi=0} \right] \quad (17)$$

Тогда

$$v = v_0 e^{-2\xi} \left(k + \frac{4}{3} \mu \right)_{\xi=0} / k + \frac{4}{3} \mu, \quad (18)$$

где v_0 — значение функции v при $\xi = 0$ (т. е. при $r = r_0$).

Введем периодический характер изменения функции μ :

$$k + \frac{4}{3} \mu = \left(k + \frac{4}{3} \mu \right)_{\xi=0} (1 + \aleph \sin(2\pi n \xi)), \quad (19)$$

где \aleph — параметр, изменяющийся в пределах от -1 до $+1$, т. е. $|\aleph| < 1$, n — число “блоков” [9] в промежутке изменения координаты ξ от 0 до 1.

Тогда

$$v = v_0 e^{-3\xi} (1 + \aleph \sin(2\pi n \xi))^{-1}. \quad (20)$$

Для определения u требуется решить (12) при условии (20). Рассматривая (12), находим общее решение соответствующего однородного уравнения, оно есть $u = C e^\xi$.

Далее используем метод вариации произвольной постоянной, то есть полагаем $C = C(\xi)$.

Тогда для вычисления $C(\xi)$ получаем дифференциальное уравнение $C'(\xi) = \frac{v_0 e^{-3\xi}}{1 + \aleph \sin(2\pi n \xi)}$.

Интегрируя его, находим

$$C(\xi) = v_0 \int_0^\xi \frac{e^{-3\xi}}{1 + \aleph \sin(2\pi n \xi)} d\xi + u_0, \quad u = \left(v_0 \int_0^\xi \frac{e^{-3\xi}}{1 + \aleph \sin(2\pi n \xi)} d\xi \right) e^\xi + u_0 e^\xi. \quad (21)$$

Для определения констант u_0 , v_0 используем начальные условия: $u|_{\xi=0} = u_0$, $\sigma_r|_{\xi=0} = 0$.

Подстановка (21) в выражение для σ_r (4) дает

$$\sigma_r = \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{1}{r} \frac{du_r}{d\xi} + \left(2k - \frac{4}{3} \mu \right) \frac{u_r}{r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad \text{или} \quad \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) (v_0 + u_0) + \left(2k - \frac{4}{3} \mu \right) u_0 = 0.$$

Тогда $v_0 = -\frac{3k}{k + \frac{4}{3} \mu} u_0$. Таким образом, получено аналитическое решение дифференциального

уравнения (6) с переменным модулем сдвига 2μ .

На рис. 1 приведена зависимость относительного смещения $u(\xi)/u_0$ от логарифмической координаты ξ при $\nu = 0.4$. На рис. 2а показаны зависимости радиального напряжения $r_0 \sigma_r / k u_0$ от логарифмической координаты ξ при $\nu = 0.4$, на рис. 2б — радиальной деформации $r_0 \varepsilon_r / k u_0$ от логарифмической координаты ξ при $\nu = 0.4$.

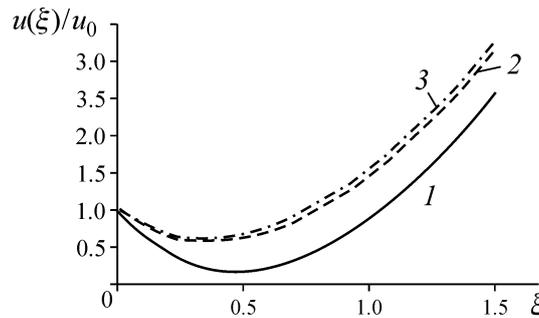


Рис. 1. Зависимость относительного смещения $u(\xi)/u_0$ от логарифмической координаты ξ :
1 — $n = 8$ ($\xi = 0-1$), $\aleph = 0.9$; 2 — $n = 5$, $\aleph = 0.5$; 3 — при $n = 1$, $\aleph = 0$

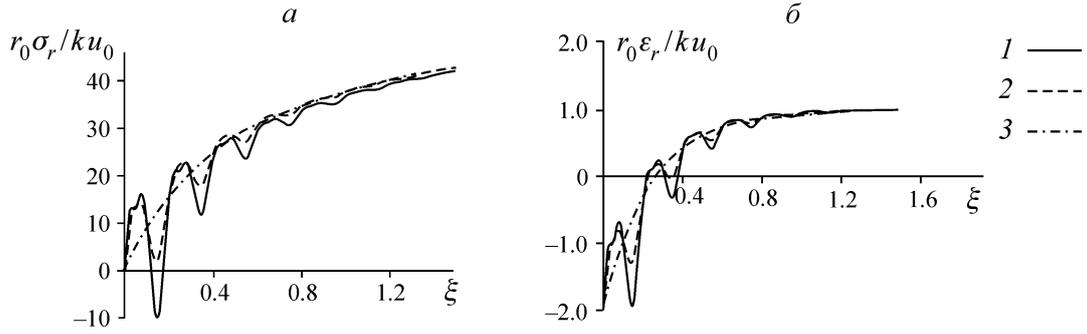


Рис. 2. Зависимость радиального напряжения $r_0 \sigma_r / k u_0$ от логарифмической координаты ξ (а) и радиальной деформации $r_0 \varepsilon_r / k u_0$ от логарифмической координаты ξ (б) при $\nu=0.4$: 1 — $n=8$ ($\xi=0-1$), $\aleph=0.5$; 2 — $n=5$, $\aleph=0.3$; 3 — $n=1$, $\aleph=0$

Пример 2. Рассмотрим периодическое изменение предела упругости в массиве горных пород. Пусть имеется массив пород с выработкой цилиндрической формы. Для этого случая имеем: соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = 0, \quad \gamma_{rz} = \gamma_{z\varphi} = 0, \quad (22)$$

уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (23)$$

условие пластичности в виде

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2} = \tau_S (1 + \aleph \sin \lambda(r - r_0)), \quad (24)$$

где τ_S , λ , \aleph — константы, $|\aleph| < 1$; r_0 — радиус выработки.

Для определения напряжений σ_r подставляем (24) в (23). Тогда получаем уравнение

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2\tau_S}{r} - \frac{2\tau_S \aleph \sin \lambda(r - r_0)}{r}. \quad (25)$$

Интегрируя (25), находим, что

$$\sigma_r = -2\tau_S \ln r - 2\tau_S \aleph [\cos(\lambda r_0) Si(\lambda r) - \sin(\lambda r_0) Ci(\lambda r)] + C,$$

где Si , Ci — интегральный синус и косинус соответственно.

Требуется оценить влияние параметров \aleph и λ на значения напряжений, деформаций, смещения u вокруг выработки с радиусом $r = r_0$.

Для определения константы C используем начальное условие $\sigma_r|_{r=r_0} = 0$. С учетом этого условия

$$\sigma_r = -2\tau_S \ln \frac{r}{r_0} - 2\tau_S \aleph [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))], \quad (26)$$

где $Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0) = \int_{\lambda r_0}^{\lambda r} \frac{\sin(\lambda r)}{\lambda r} d(\lambda r)$, $Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0) = \int_{\lambda r_0}^{\lambda r} \frac{\cos(\lambda r)}{\lambda r} d(\lambda r)$.

Для определения напряжения σ_φ используем (24). С учетом (26) получаем

$$\sigma_\varphi = \sigma_r - 2\tau_S - 2\tau_S \aleph \sin(\lambda(r - r_0)). \quad (27)$$

Чтобы найти деформации ε_r и ε_φ , требуется найти смещение u . Для определения смещения u имеем условие упругого изменения объема при плоской деформации в виде:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2k}, \quad (28)$$

где $2k = E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Подставляя (26), (27) в (28), получаем уравнение для u :

$$k \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) = -2\tau_s \ln \frac{r}{r_0} - \tau_s - \tau_s \aleph \sin \lambda(r - r_0) - \\ - 2\tau_s \aleph [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))]. \quad (29)$$

Уравнение (29) интегрируем с помощью подстановки

$$ku = C / r, \quad (30)$$

где $C = C(r)$. Подставляя (30) в (29) в предположении $C = C(r)$, получаем уравнение для функции C . Интегрируя его, имеем

$$C = -\tau_s r^2 \ln \frac{r}{r_0} - \tau_s \aleph r^2 [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))] + C_0. \quad (31)$$

Тогда

$$ku = \frac{C_0}{r} - \tau_s r \ln \frac{r}{r_0} - \tau_s \aleph r [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))]. \quad (32)$$

Отсюда деформации

$$k\varepsilon_\varphi = \frac{ku}{r} = \frac{C_0}{r^2} - \tau_s \ln \frac{r}{r_0} - \tau_s \aleph [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))], \quad (33)$$

$$k\varepsilon_r = k \frac{du}{dr} = -\frac{C_0}{r^2} - \tau_s \left(\ln \frac{r}{r_0} + 1 \right) - \tau_s \aleph [\cos(\lambda r_0)(Si(\lambda r) - Si(\lambda r_0)) - \sin(\lambda r_0)(Ci(\lambda r) - Ci(\lambda r_0))] - \\ - \tau_s \aleph r \sin \lambda(r - r_0). \quad (34)$$

Константа C_0 находится из (32) при условии $u|_{r=r_0} = u_0$. Тогда $C_0 = ku_0 / r_0$. Таким образом и в этом случае получено аналитическое выражение решения задачи, которое можно рассматривать как одну из возможных моделей блочной среды. На рис. 3а показаны зависимости относительного смещения $ku(r) / \tau_s$ координаты r ; на рис. 3б — радиальной деформации $r_0 \varepsilon_r / ku_0$ координаты r .

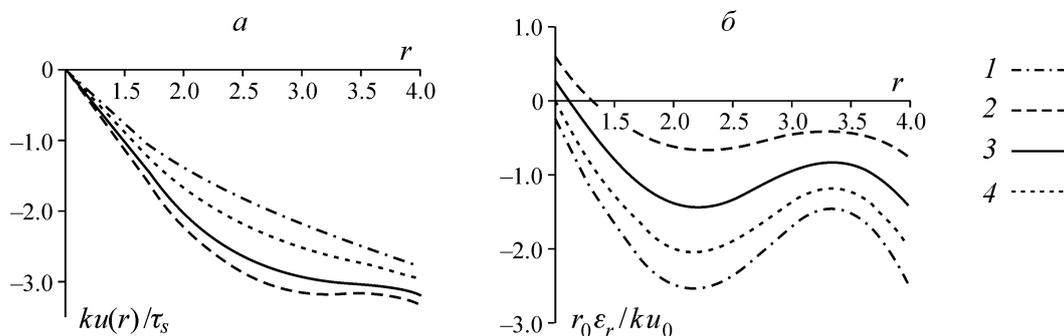


Рис. 3. Зависимости относительного смещения $ku(r) / \tau_s$ (а) и радиальной деформации $r_0 \varepsilon_r / ku_0$ (б) от координаты r при $\nu = 0.3$: 1 — $\aleph = 0$; 2 — $\aleph = 0.3$; 3 — $\aleph = 0.7$; 4 — $\aleph = 0.9$

Анализируя рис. 1–3, можно сделать вывод, что вблизи контура выработки происходит чередование областей растягивающих и сжимающих деформаций, что может быть причиной возникновения зональной дезинтеграции массива горных пород вокруг выработки.

ВЫВОДЫ

Получены аналитические решения задач о распределении напряжений, деформаций, смещений вокруг выработок сферической и цилиндрической форм при периодическом изменении модуля сдвига и предела упругости.

Установлено влияние блочности на характер изменения основных величин напряженно-деформированного состояния. Показано, что осевая деформация вблизи контура выработки положительна, что может служить причиной образования зональной дезинтеграции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Baklashov I. V. and Kartoziya B. A.** Rock mechanics, Moscow, Nedra, 1975, pp. 271. [**Баклашов И. В., Картозия Б. А.** Механика горных пород. — М.: Недра, 1975. — 271 с.]
2. **Taranov P. Ya., Lavrienko V. V., Antonevich I. I., and Chereslo Ya. S.** Failure of the rock mass beyond the excavation contour as a result of explosive works, *Shakhtnoe stroitel'stvo*, 1969, no. 1, pp. 5–8. [**Таранов П. Я., Лавриенко В. В., Антоневи́ч И. И. Чересло Я. С.** Разрушение породного массива за контуром выработки в результате взрывных работ // Шахтное строит-во. — 1969. — № 1. — С. 5–8.]
3. **Borisovets V. A.** Inhomogeneity of the wave nature in the rocks near excavation, constructed by drilling and blasting method. Failure of the rock mass beyond the excavation contour as a result of explosive works, *Mine construction*, 1972, no. 9, pp. 7–11. [**Борисовец В. А.** Неоднородности волнового характера в породах вблизи выработки, сооружаемых буровзрывным способом. Разрушение породного массива за контуром выработки в результате взрывных работ // Шахтное строительство. — 1972. — № 9. — С. 7–11.]
4. **Alimzhanov A. M.** Stress-strain state and rocks stability of near-contour zone of underground spherical cavity in the massif with technological heterogeneity of rock's mechanical properties. *Electronic journal Oil and Gas Production*. 2012, no. 6, pp. 32–45, <http://www.ogbus.ru> [**Алимжанов А. М.** Напряженно-деформированное состояние и устойчивость пород приконтурной зоны подземной сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств пород // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. — 2012. — № 6. — С. 32–45. <http://www.ogbus.ru>]
5. **Saraikin V. A., Chernikov A. G., and Sher E. N.** Wave propagation in a two-dimensional block medium with viscoelastic interlayers (theory and experiment), *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 688–697 [**Сарайкин В. А., Черников А. Г., Шер Е. Н.** Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) // Прикладная механика и техническая физика. — 2015. — Т. 56. — № 4. — С. 170–181.]
6. **Sher E. N., Aleksandrova N. I., Aizenberg-Stepanenko M. V., and Chernikov A. G.** Influence of the block-hierarchical structure of rocks on the peculiarities of seismic wave propagation, *Journal of Mining Science*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 585–591. [**Шер Е. И., Александрова Н. И., Айзенберг-Степаненко М. В., Черников А. Г.** Влияние иерархической структуры блочных горных пород на особенности распространения сейсмических волн // ФТПРПИ. — 2007. — № 6. — С. 25–30.]
7. **Aleksandrova N. I.** Flat Lamb problem for two-dimensional discrete medium, *Proceedings of the Academy of Sciences*, 2015, vol. 460, no. 1, pp. 1–6. [**Александрова Н. И.** Плоская задача Лэмба для двумерной дискретной среды // ДАН. — 2015. — Т. 460. — № 1. — С. 1–6.]
8. **Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., and Pokhabova M. A.** Modeling of elastic waves in a block medium based on equations of the Cosserat continuum, *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2015, vol. 52, pp. 138–150. [**Садовский В. М., Садовская О. В., Похабова М. А.** Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычисл. механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7. — № 1. — С. 52–60.]
9. **Chanyshev A. I. and Belousova O. E.** A method to describe hierarchical block structure of rock mass, considering nonuniformity of mechanical properties, *Journal of Mining Science*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 441–448. [**Чанышев А. И., Белоусова О. Е.** Об одном способе описания блочно-иерархической структуры массива горных пород с позиции учета неоднородности механических свойств // ФТПРПИ. — 2017. — № 3. — С. 29–36.]