

ставляющая которых относительно равновесной поверхности пропорциональна $\varphi_1(s) \cos \theta$.

В таблице для $\beta_0 = 75, 80^\circ$ и ряда значений r_0 приведены параметры $c = c_*$, $\eta = \eta_*$, $V = V_*$, отвечающие критическому состоянию зоны. При $r_0 \rightarrow 0$ имеем $\eta_* \rightarrow \infty$ и $V_* \rightarrow \infty$, что полностью согласуется с результатами [5]. Устойчивые состояния являются бочкообразными, и для них $c > c_*$, $\eta < \eta_*$, $V < V_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке К. Т. Выращивание кристаллов. — Л.: Недра, 1977.
2. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкин А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
3. Слобожанин Л. А. Исследование задач гидростатики, моделирующих процесс зонной плавки // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49, № 4.
4. Слобожанин Л. А. Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости // Мат. физика и функциональный анализ: Сб. науч. тр./АН УССР, ФТИИТ. — Харьков, 1971. — Вып. 2.
5. Слобожанин Л. А. Задачи устойчивости равновесия жидкости, возникающие в вопросах космической технологии // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. — М.: Наука, 1982.
6. Бармин П. В., Вершинин Б. Е., Левитина И. Г., Сенченков А. С. Устойчивость жидкой вращающейся зоны // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49, № 4.

г. Харьков

Поступила 27/VI 1991 г.

в окончательном варианте — 30/IX 1991 г.

УДК 532.59 : 517.19

В. А. Вахненко, В. В. Кулич

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Развитие техники эксперимента показало, что внутренняя структура среды влияет на волновые движения и процессы переноса. С ростом амплитуды волны возрастающую роль начинают играть нелинейные эффекты. К тому же высокоградиентные быстропротекающие процессы неравновесны. Все эти особенности необходимо учитывать при математическом моделировании волн в реальных средах.

Существует класс явлений, в которых характерный рассматриваемый размер L во много раз больше размеров неоднородностей среды ϵ ($L \gg \epsilon$). Недостаток знаний о микросвойствах неоднородной среды создает принципиальные трудности для прямого решения таких задач. Численные расчеты затруднены огромными затратами машинного времени. Один из путей изучения неоднородной среды — метод осреднения по пространству.

Осредненное описание имеет асимптотическую природу. Существуют различные математические методы асимптотического осреднения длинноволновых процессов с детальным учетом структуры. В настоящей работе для моделирования волн в баротропной периодической среде применяется асимптотический метод осреднения, развитый для композитов регулярной структуры [1, 2]. Процессы в неоднородной среде могут быть описаны уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами. Для сред регулярной структуры быстроосциллирующие коэффициенты есть периодические функции. Суть асимптотического осреднения заключается в применении метода многих масштабов [3] в сочетании с пространственным осреднением [4]. Метод дает асимптотически правильное приближение к решению. В общем случае получается система интегродифференциальных уравнений. Иногда задачу можно свести к осредненным характеристикам волновых полей. В то же время, решая интегродифференциальную систему, можно найти численный метод, в котором удастся шаг по про-

пространственной координате брать значительно превышающим период структуры.

1. Система осредненных уравнений. Асимптотический метод осреднения можно применить для описания процессов в сжимаемой неоднородной среде [5]. Уравнения движения удобно записать в лагранжевых координатах. В этих переменных у периодической сжимаемой среды неизменная структура, что позволит применить процедуру осреднения.

В общем случае коэффициенты и решения уравнений, описывающих процессы в неоднородных средах, имеют разрывные значения. Тогда уравнения нужно представить в интегральном виде. При предположении гладкости коэффициентов и решений они эквивалентны дифференциальным уравнениям движения. В [1, 6] показано, что при незначительном различии физических свойств неоднородностей среды формально построенные с помощью асимптотического метода приближенные непрерывные решения системы дифференциальных уравнений удовлетворяют интегральным законам сохранения с определенной точностью. Это обстоятельство говорит о правомерности использования системы дифференциальных уравнений движения в асимптотическом методе осреднения.

Исходными уравнениями движения являются уравнения баротропной периодической среды, которые записываются для каждого структурного элемента [7]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0.$$

Здесь $V \equiv \rho^{-1}$ — удельный объем; u — массовая скорость; ρ — плотность; p — давление; m — массовая переменная; t — время.

С целью учета множества внутренних процессов в неоднородной среде предполагается, что каждый компонент проявляет релаксационные эффекты, учитываемые динамическим уравнением состояния первого порядка [8]

$$(1.2) \quad d\rho = c_f^{-2} dp - (\rho - \rho_e) \tau^{-1} dt,$$

где τ — время релаксации; c_e и c_f — равновесная и замороженная скорости звука; $\rho_e = \rho(p)$ — равновесное уравнение состояния, а именно

$$\rho_e = \rho_0 + \int_{p_0}^p c_e^{-\varepsilon} dp; \quad p_0, \rho_0 — \text{давление и плотность в произвольном равновесном состоянии.}$$

Уравнение (1.2) охватывает предельные случаи как полностью замороженного, так и равновесного процесса. Оно включает описание процессов без релаксации при формальной замене времени релаксации $\tau = 0$ на любую ненулевую величину и при условии $c_e = c_f$. В дальнейшем предполагается, что скорости звука и время релаксации не зависят явно от времени, а только от давления и индивидуальных свойств компонентов среды. Это означает, что релаксационный процесс внутри элементов структуры периодической среды приводит только к обмену импульсом без массообмена.

Применим асимптотический метод осреднения [1] к уравнениям (1.1), (1.2). Пространственная переменная m в соответствии с методом многих масштабов разбивается на медленную s и быструю ξ независимые переменные:

$$(1.3a) \quad m = s + \varepsilon \xi, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Медленная переменная отвечает глобальной структуре полей, а быстрая — локальной. Решение p , u , V ищется в виде рядов по степеням периода структуры ε :

$$(1.3b) \quad p(m, t) = p(s, \xi, t) = p^{(0)}(s, \xi, t) + \varepsilon p^{(1)}(s, \xi, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(s, \xi, t) + \dots$$

Особенность задачи состоит в том, что благодаря постоянной структуре

среды в лагранжевых координатах функции в правой стороне ряда (1.36) считаются периодическими по ξ . Это приводит к упрощениям уравнений с помощью применения процедуры осреднения по периоду структуры.

После подстановки (1.3) в (1.1) получаем

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{-1} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0 \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0, \\ & \varepsilon^{-1} \frac{\partial r^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0 \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial r^{(2)}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Согласно общей теории асимптотического метода, члены при равных степенях ε должны независимо друг от друга обращаться в нуль. Поэтому уравнения с ε^{-1} имеют вид $\partial p^{(0)}/\partial \xi = 0$, $\partial u^{(0)}/\partial \xi = 0$, что дает независимость $p^{(0)} = p^{(0)}(s, t)$ и $u^{(0)} = u^{(0)}(s, t)$ от ξ . Кроме того, для членов с ε^0 должно быть

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \xi} = 0.$$

Усредняем по периоду ε . По определению $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) d\xi$. В силу периодичности $p^{(1)}$ и $u^{(1)}$ интегралы $\langle \partial u^{(1)}/\partial \xi \rangle = 0$, $\langle \partial r^{(1)}/\partial \xi \rangle = 0$. А поскольку $\langle u^{(0)} \rangle = u^{(0)}$, $\langle p^{(0)} \rangle = p^{(0)}$, то $\partial p^{(1)}/\partial \xi = 0$ и в силу периодичности $p^{(1)}(\xi)$ функция $p^{(1)}$ не зависит от ξ . Следовательно, осредненные уравнения движения (1.1) в нулевом порядке по ε имеют вид [9]

$$(1.4) \quad \frac{\partial \langle V^{(0)} \rangle}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0.$$

Величины V , ρ , τ , c_e , c_f в общем случае зависят от быстрой переменной ξ , причем последние три функциональные зависимости считаются наперед заданными. После осреднения уравнение состояния (1.2) для нулевого приближения по ε формально можно записать как

$$(1.5) \quad \langle V_0^{(0)} \rangle - \langle V^{(0)} \rangle = \left\langle \frac{\tau c_f^{-2} \frac{d p^{(0)}}{dt} + \int_0^{p_0} c_e^{-2} d r^{(0)}}{p_0 \left(1 + \tau \frac{d}{dt} \right) \frac{1}{V^{(0)} V_0^{(0)}}} \right\rangle.$$

Получена осредненная система (1.4), (1.5), описывающая в нулевом приближении по ε процессы в баротропной периодической релаксирующей среде. Структурные характеристики входят только в уравнение (1.5).

Отметим, что ранее асимптотический метод применялся для осреднения системы уравнений, описывающих сжимаемые среды с вязкостью [5]. В этом случае введение вязкости с физической точки зрения позволяет описывать только низкочастотные возмущения. Кроме того, система осредненных уравнений не дает возможности изучать волновые движения, если хотя бы один из компонентов периодической среды не обладает вязкостью. Более сложный метод построения осредненных уравнений предложен в [10], где получена интегродифференциальная система с запаздыванием, не содержащая быструю переменную. Однако там же указывается, что нет надлежащих методов ее решения.

2. Анализ распространения волн давления. Исследуем некоторые осредненные свойства звуковых волн в периодической релаксирующей среде. Представим искомые переменные в виде

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad V = V_0 + V_1,$$

где p_0 , ρ_0 , V_0 — невозмущенные равновесные значения давления, плотности и удельного объема, а p_1 , ρ_1 , V_1 — их приращения в звуковой волне, при этом $p_1 \ll p_0$, $\rho_1 \ll \rho_0$, $V_1 \ll V_0$. В дальнейшем опускается ин-

декс 0, означающий первый член асимптотического разложения (1.36). При этом система (1.4), (1.5) в линейном приближении принимает вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \langle V_1 \rangle}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial s} = 0;$$

$$(2.2) \quad \langle V_1 \rangle = - \left\langle \frac{V_0^2 \frac{c_e^{-2} + \tau c_f^{-2} \frac{d}{dt}}{1 + \tau \frac{d}{dt}} \right\rangle p_1.$$

В двух предельных случаях высокочастотного ($\omega \tau \gg 1$) и низкочастотного ($\omega \tau \ll 1$) волновых возмущений осредненное уравнение состояния (2.2) переписывается соответственно как

$$\begin{aligned} \langle \dot{V}_1 \rangle = & - \left\langle \frac{V_0^2}{c_f^2} \right\rangle \dot{p}_1 - \left\langle V_0^2 \frac{c_f^2 - c_e^2}{\tau c_e^2 c_f^2} \right\rangle p_1, \quad \langle V_1 \rangle = - \left\langle \frac{V_0^2}{c_e^2} \right\rangle p_1 + \\ & + \left\langle \tau V_0^2 \frac{c_f^2 - c_e^2}{c_e^2 c_f^2} \right\rangle \dot{p}_1. \end{aligned}$$

При этом использовалась оценка $\omega \sim \psi^{-1} d\psi/dt$, где $\psi = p$ или V . Последнее уравнение позволяет интерпретировать выражение

$$\zeta = \left\langle \tau V_0^2 \frac{c_f^2 - c_e^2}{c_e^2 c_f^2} \right\rangle \left\langle \frac{V_0^2}{c_e^2} \right\rangle^{-2}$$

как осредненный коэффициент объемной вязкости при низкочастотных возмущениях.

Для нерелаксирующей периодической среды уравнение состояния упрощается:

$$(2.3) \quad d \langle V \rangle = - \langle V_0^2 / c^2 \rangle dp.$$

Система (2.1), (2.3) выражается в осредненных характеристиках. Из сравнения ее с исходными уравнениями для однородной среды следует, что поле давлений в однородной нерелаксирующей среде совпадает с осредненным полем в периодической среде, если $V_0^2/c^2 = \langle V_0^2/c^2 \rangle$. В частном случае периодической среды с двумя компонентами, в одном из которых идет релаксация, осредненное возмущение давления распространяется, как в однородной релаксирующей среде при условиях согласования

$$(2.4) \quad V_0^2/c_e^2 = \langle V_0^2/c_e^2 \rangle, \quad V_0^2/c_f^2 = \langle V_0^2/c_f^2 \rangle, \quad \tau = \langle \tau \rangle.$$

В предельных замороженном и равновесном процессах возмущения в периодической релаксирующей среде будут двигаться, как в некоторых однородных нерелаксирующих.

Оказывается возможным получить частное решение осредненных интегродифференциальных уравнений без ограничения на величину возмущения для среды с нерелаксирующими компонентами. Осредненная система уравнений для такой периодической среды (2.1), (2.3) является гиперболической. Уравнения характеристик в лагранжевой системе координат (массовая пространственная координата) имеют вид

$$(2.5) \quad ds/dt = \pm \langle V^2/c^2 \rangle^{-1/2},$$

на них справедливы инварианты Римана

$$(2.6) \quad J_{\pm} = u \pm \int \langle V^2/c^2 \rangle^{1/2} dp.$$

Выражение (2.5) есть осредненная скорость распространения возмущений в лагранжевых координатах, зависящая от давления и структуры.

Для баротропной среды давление p и скорость u в волне могут быть выражены в виде функций друг от друга. Тогда (2.5) интегрируется:

$$s = \pm t \langle V^2/c^2 \rangle^{-1/2} + f(u)$$

$f(u)$ — произвольная функция u). Вышеприведенное соотношение вместе с (2.6) описывает осредненное поведение простой волны в периодической баротропной среде. В частном случае $f(u) = 0$ решение автомодельно.

Структура среды непосредственно влияет на распространение простой волны значительной амплитуды даже в длинноволновом приближении. Уравнения (2.5), (2.6) содержат нелинейные члены $\langle V^2/c^2 \rangle$, зависящие от давления и структуры среды. Следовательно, осредненное поведение волны давления теперь нельзя свести к поведению в однородной среде.

Для примера на рис. 1 приводятся профили давления в автомодельной волне разрежения, возникающей в периодической среде при выдвигании поршня с постоянной скоростью. Отношение начального давления в среде p_{20} к давлению у поршня p_{10} задавалось как $p_{20}/p_{10} = 10$. Элементарная ячейка периодической среды представляла собой два слоя одинакового размера в лагранжевых координатах с плотностями $\rho_{01} = 1,5\langle\rho\rangle$, $\rho_{20} = 0,5\langle\rho\rangle$ при давлении p_{10} ($\langle\rho\rangle$ — средняя плотность среды при этом давлении). Скорость звука в обоих компонентах предполагалась одинаковой и постоянной ($c = 1,5\sqrt{p_{10}/\langle\rho\rangle}$). Массовая скорость согласовывалась с давлением по (2.6):

$$u = \int_{p_{20}}^p \sqrt{\langle V^2 \rangle / c^2} dp.$$

Безразмерные зависимости давления p/p_{10} от лагранжевой массовой координаты $\eta = \frac{s}{\tau_0} \sqrt{\langle\rho(p_{10})\rangle p_{10}}$ (τ_0 — характерное время) для различных моментов времени представлены на рис. 1, где сплошные линии — профили, рассчитанные численно-асимптотическим методом (о нем далее) для периодической среды и удовлетворительно совпадающие со штриховыми, построенными из аналитического решения для периодической среды. С целью сопоставления на рис. 1 штрихпунктирными линиями изображены профили для однородной среды, в которой $\rho = \langle\rho\rangle$. Отклонение профиля волн разрежения в периодической среде от прямолинейной зависимости обусловлено ее структурой.

Интересно то обстоятельство, что профиль волны несет большую информацию о структуре среды. В частном случае, если скорость звука в периодической среде одинакова и постоянна, по закономерностям распространения волн разрежения удается восстановить структуру среды. При этом надо помнить, что в длинноволновой модели период бесконечно мал, и, следовательно, местоположение элементов структуры в периоде не удастся точно указать. Поэтому выберем среду, в которой зависимость $V = V(\xi)$ — невозрастающая интегрируемая взаимнооднозначная функция. Умножая обе части уравнения состояния $dV = -V^2 c^{-2} dp$ на V^n (n — натуральное число), после осреднения имеем $d\langle V^{n+1} \rangle / dp = -(n+1)c^{-2}\langle V^{n+2} \rangle$. Уравнение для характеристик (2.5) позволяет найти зависимость $\langle V^2 \rangle(p)$. Вышеприведенная формула дает остальные $\langle V \rangle$, $\langle V^3 \rangle$, $\langle V^4 \rangle$, $\langle V^5 \rangle$, ..., $\langle V^n \rangle$...

Из теории вероятности [11] известно, что распределение $f(x)$ (произвольная однозначная интегрируемая положительная функция, определенная по всей оси x) связано со своими моментами $\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$ посредством характеристической функции $\chi(q) = F[f(x)](q)$, где $F[\cdot]$ —

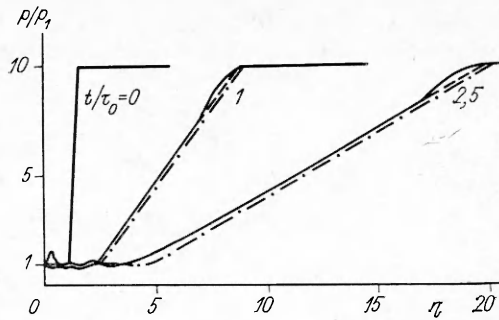


Рис. 1

преобразование Фурье. Кроме того, характеристическая функция выражается через моменты:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n i^n \frac{q^n}{n!}.$$

Учитывая ограничения на функцию $V(\xi)$, запишем $\langle V^n \rangle = n \int_0^{V(0)} \xi(V) dV$.

Считая, что вне отрезка $[0, V(0)]$ функция $\xi(V)$ равна нулю, последнее выражение можно связать с центральным моментом функции распределения $f(x) \equiv \xi(V)$:

$$\langle V^n \rangle = n \int_{-\infty}^{\infty} V^{n-1} \xi(V) dV = n \alpha_{n-1}.$$

Отсюда через обратное преобразование Фурье характеристической функции имеем окончательно

$$\xi(V) = F^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle V^{n+1} \rangle}{(n+1)!} i^n q^n \right] (V).$$

Так воспроизводится обратная функция к искомой и с указанной точностью находится структура среды.

3. Численно-асимптотический метод. Уравнения движения (1.4) записаны в осредненных характеристиках $p, u, \langle V \rangle$, которые зависят от медленной переменной s и времени t . Уравнение состояния (1.5) представляет собой интегродифференциальное уравнение с параметрами, зависящими как от медленной, так и от быстрой переменной. Метод отыскания решений системы уравнений (1.4), (1.5) не является очевидным.

Опишем возможный способ приведения уравнений к виду, в котором искомые функции зависят только от медленной переменной и времени. Все функции, зависящие от ξ , представляются в виде рядов Фурье на отрезке, отвечающем периоду структуры (например, $\rho(\xi) =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \exp(2\pi i k \xi)$). Уравнения движения остаются без изменения. К ним добавляются соотношения для коэффициентов рядов V_k и ρ_k , вытекающие из уравнения состояния и $\rho V = 1$. Обе части этих уравнений, выраженных рядами Фурье, умножаются последовательно на $\exp(2\pi i k \xi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и осредняются по периоду структуры. В результате из двух уравнений образуется бесконечная цепочка. Сами уравнения представляют собой двойные тригонометрические ряды, которые схематично можно представить в виде

$$(3.1) \quad (c_f^{-2})_k \dot{p} - \dot{\rho}_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_e^{-2})_n (\tau^{-1})_{k-n} (p - p_0) + (\tau^{-1})_{k-n} (\rho_{0n} - \rho_n) = 0,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\rho_n V_{-n})_k = \delta_{0k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где k -е члены — коэффициенты рядов Фурье соответствующих функций $\rho, \rho_0, V, V_0, c_f^{-2}, c_e^{-2}, \tau^{-1}$.

Получена бесконечная система уравнений (1.4), (3.1) относительно p, u, ρ_k, V_k , которые являются функциями s и t . Плотность ρ и удельный объем V , зависящие от быстрой переменной ξ , получаются после вычисления сумм рядов Фурье. В численных расчетах можно ограничиться частными суммами рядов, причем система уравнений будет замкнута. Процесс описывается с той точностью, с которой ограниченный ряд Фурье воспроизводит структуру среды. Это позволяет выделить осредненную

задачу по медленной переменной p при решении задач на ЭВМ шаг по пространственной координате выбрать из ограничения по длине волнового возмущения, а не периода структуры. Тем самым преодолена основная трудность при распространении волны удается находить на больших расстояниях.

При численных экспериментах период структуры не накладывает ограничения на шаг по пространству. Но использование частичных рядов Фурье приводит к значительному возрастанию числа уравнений (3.1), в которых содержатся нелинейные множители типа $\rho_k V_n$.

Численно система (1.4), (3.1) решалась конечно-разностным методом в безразмерных величинах. Из (1.4) по явной двухслойной разностной схеме находятся $\langle V \rangle$ и u . Давление p и коэффициенты Фурье ρ_k , V_k на следующем временном слое определяются из решения $4m + 2$ нелинейных уравнений (3.1) итерационным методом Ньютона ($2m + 1$ — число членов в частичной сумме рядов Фурье). На каждой итерации уравнения преобразуются в линейные и полученная система решается методом Гаусса. Предложенный алгоритм был реализован в вычислительной программе, написанной на Фортране для БЭСМ-6 с привлечением математического обеспечения ЭВМ.

Кроме вычисления движения автомоделной волны разрежения в периодической среде (см. рис. 1), проведены расчеты распространения акустического возмущения в релаксирующих средах. Структура периодической среды также состояла из двух слоев равной протяженности с параметрами невозмущенной среды

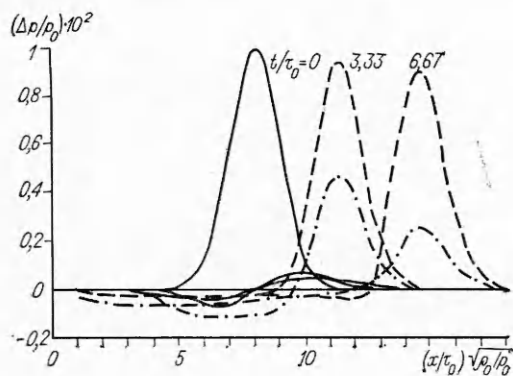
$$\rho_0(\xi) = \begin{cases} 1,5\rho_0 & 0 < \xi \leq 0,5 \\ 0,5\rho_0 & 0,5 < \xi \leq 1,0 \end{cases}, \quad c_f = \begin{cases} 1,5\sqrt{p_0/\rho_0} & 0 < \xi \leq 0,5 \\ 1,5\sqrt{p_0/\rho_0} & 0,5 < \xi \leq 1,0 \end{cases}, \quad c_e = \begin{cases} c_f & 0 < \xi \leq 0,5 \\ 0,1c_f & 0,5 < \xi \leq 1,0 \end{cases}.$$

Начальные параметры возмущения (массовая скорость, давление, плотность) взаимосвязывались через скорость звука c_f :

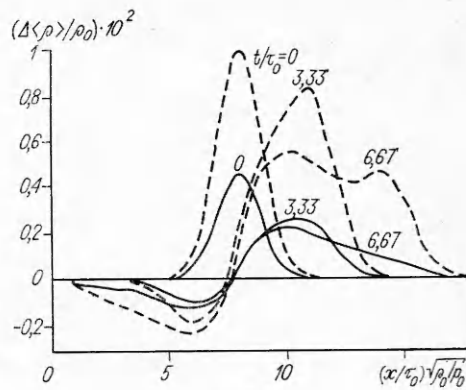
$$u = p_1 c_f^{-1} \sqrt{\langle V_0^2(\xi) \rangle}, \quad \rho_1(\xi) = p_1 / c_f^2.$$

Начальные условия задавались так, чтобы обеспечить неизменность профиля давления со временем в средах без релаксации. В однородной среде скорости звука подбирались с учетом выполнения условий (2.4), т. е. $c_f = 1,006\sqrt{p_0/\rho_0}$, $c_e = 0,106\sqrt{p_0/\rho_0}$. Тогда звуковая волна давления должна двигаться одинаково в однородной и периодической релаксирующих средах. Численные расчеты подтвердили эти условия и явились своеобразными тестами разработанной программы. Оценивая через полуширину начального распределения и замороженную скорость звука c_f характерную частоту возмущения ω , можно определить ωt . При различных временах релаксации варьировалось значение ωt , что позволяло исследовать эволюцию волны в зависимости от соотношения между динамическими и релаксационными характеристиками.

Зависимости давления от безразмерной эйлеровой координаты $x = x\tau_0^{-1} \sqrt{\rho_0 p_0^{-1}}$ представлены на рис. 2 для релаксирующих сред. Начальные возмущения давления в виде распределения Гаусса, центр которых находится на $x = 8$, одинаковы. Штриховые кривые построены для безразмерного времени релаксации $\tau/\tau_0 = 2000$ ($\omega t \simeq 30$), штрихпунктирные — для $\tau/\tau_0 = 200$ ($\omega t \simeq 3$), сплошные — для $\tau/\tau_0 = 20$ ($\omega t \simeq 0,3$). Профили возмущений давления изображены для начального момента, а также для $t/\tau_0 = 3,33$ и $t/\tau_0 = 6,67$. Наличие релаксации вызывает затухание возмущения. Чем меньше время релаксации, тем медленнее оно движется. Казалось бы, что максимум возмущения в случае с $\tau/\tau_0 = 200$ должен двигаться медленнее, чем при $\tau/\tau_0 = 2000$. Однако уменьшение скорости распространения волны как бы компенсирует понижение давления в тыльной части волны за счет более глубокого прохождения релаксации. Во всех волнах присутствует фаза разрежения, давление



Р и с. 2



Р и с. 3

в которой по мере удаления волны постепенно приближается к исходному значению.

Эволюция возмущения плотности в однородной для $\omega t \approx 3$ (штриховые линии) и периодической для $\omega t \approx 1,5$ (сплошные) средах приведена на рис. 3. Хотя начальные возмущения давления в них были одинаковыми, начальное возмущение средней плотности в периодической среде более чем в 2 раза меньше, чем в однородной. Их качественное поведение подобно. Скорости распространения передних фронтов возмущений плотности и давления совпадают. Возникает фаза пониженной плотности, которая запаздывает относительно фазы пониженного давления.

Авторы благодарны В. А. Даниленко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
3. Найфэ А. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1971.
5. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 4.
6. Панасенко Г. П. Осреднение процессов в сильно неоднородных структурах // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 1.
7. Седов Л. П. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1983.— Т. 1.
8. Владимиров С. А., Даниленко В. А., Королевич В. Ю. Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ.— Киев, 1990.— (Препр./АН УССР, Ин-т геофизики).
9. Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В. Волновые процессы в периодической релаксирующей среде // ДАН УССР.— 1991.— № 4.
10. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., Штарас А. Л., Эглит М. Э. Численно-асимптотические методы // Асимптотические методы математической физики.— Киев: Наук. думка, 1988.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1988.

г. Киев

Поступила 5/VI 1991 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 1991 г.