УДК 539.37

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УПРУГОГО И ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЯМИ

О. В. Гомонова, С. И. Сенашов

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева,
660037 Красноярск, Россия
E-mails: gomonova@sibsau.ru, sen@sibsau.ru

Решена задача определения областей упругого и пластического деформирования, возникающих в ослабленной двумя круговыми отверстиями пластине при ее растяжении, в случае плоского напряженного состояния. Методика решения задачи основана на использовании законов сохранения.

Ключевые слова: упругопластическая задача, законы сохранения, плоское напряженное состояние, одноосное растяжение.

DOI: 10.15372/PMTF20210119

Сложность упругопластических задач заключается в том, что при их решении необходимо найти неизвестную границу, разделяющую области упругого и пластического деформирования. Это обстоятельство затрудняет численное и аналитическое решение таких задач даже в двумерном случае. Кроме того, уравнения, описывающие пластическое состояние, являются уравнениями гиперболического типа, а уравнения, описывающие упругое состояние, — уравнениями эллиптического типа. Обзор решенных задач и методов их решения приведен в работе [1]. Заметим, что упругопластические задачи, как правило, решались методами теории функций комплексной переменной [2–5].

В данной работе используется методика, основанная на построении законов сохранения для дифференциальных уравнений [6]. Эта методика применялась при решении краевых задач для двумерных уравнений пластичности [7, 8], а также при решении упругопластических задач о кручении стержней и изгибе балок постоянного сечения [9]. В [10] определена граница областей упругого и пластического деформирования в задаче о деформированном состоянии прямоугольной пластины, ослабленной отверстиями.

Методика исследования и решения дифференциальных уравнений с помощью законов сохранения разработана в классических работах С. Ли и развита Л. В. Овсянниковым и его учениками [11]. Однако в отличие от локальных симметрий, используемых в методике Ли — Овсянникова, законы сохранения являются глобальными, поэтому более целесообразно использовать их для решения краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2020-1631).

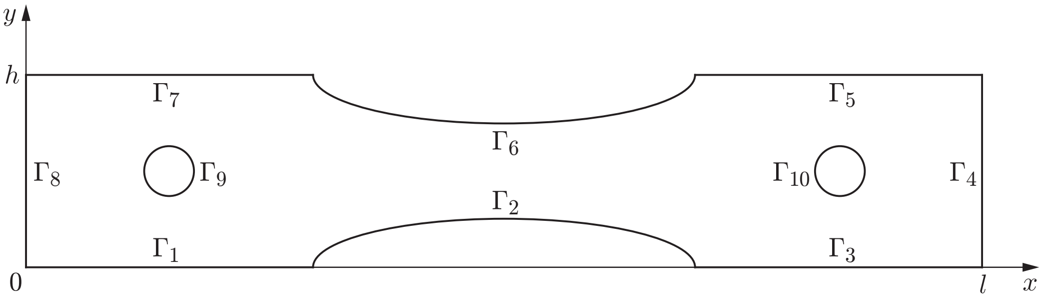

Рис. 1. Геометрия пластины

В данной работе решена задача о нахождении областей упругого и пластического деформирования в пластине с вырезами, ослабленной круговыми отверстиями. Предполагается, что пластина находится в плоском напряженном состоянии.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину длиной l и шириной h, ослабленную двумя круговыми отверстиями радиусом r (рис. 1). Заметим, что форма пластины выбрана в соответствии с формой образцов, используемых при проведении испытаний на растяжение. Внешний контур пластины задается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\Gamma_1\colon 0 < x < l/2 - a,\ y = 0, \quad \Gamma_2\colon y = (b/a)\sqrt{a^2 - (x - l/2)^2},\ l/2 - a < x < l/2 + a,\\ \Gamma_3\colon y = 0,\ l/2 + a < x < l, \quad \Gamma_4\colon x = l,\ 0 < y < h, \quad \Gamma_5\colon y = h,\ l < x < l/2 + a,\\ \Gamma_6\colon y = h - (b/a)\sqrt{a^2 - (x - l/2)^2},\ l/2 + a < x < l/2 - a,\\ \Gamma_7\colon y = h,\ l/2 - a < x < 0, \quad \Gamma_8\colon x = 0,\ 0 < y < h.\end{gathered} \tag{1}$$

Для численных расчетов выбраны размеры пластины $l = 0{,}1$ м, $h = 0{,}02$ м и радиусы отверстий $r = 0{,}0025$ м. Длины большой и малой полуосей эллипсов, дуги которых представляют собой контуры Γ_2 и Γ_6, соответственно равны $a = 0{,}02$ м и $b = 0{,}005$ м.

Пластина подвергается одноосному растяжению вдоль оси x. Внешний контур Γ пластины ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8$), а также два внутренних (Γ_9 и Γ_{10}) находятся в пластическом состоянии. К каждому из контуров Γ_9 и Γ_{10} равномерно приложено давление $2p$.

Для определения границы областей упругого и пластического деформирования необходимо решить упругопластическую задачу для области, ограниченной контурами Γ, Γ_9 и Γ_{10}.

Заметим, что в случае плоского напряженного состояния компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, τ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

В области упругого деформирования имеет место уравнение совместности в напряжениях

$$\Delta\,(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{3}$$

Условие пластичности на границах пластины в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2 = 3k^2, \tag{4}$$

где k — постоянная пластичности материала, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

Граничные условия для пластины записываются следующим образом:

$$\sigma_x n_1 + \tau n_2 = X, \qquad \sigma_y n_2 + \tau n_1 = Y. \tag{5}$$

Здесь n_1, n_2 — компоненты вектора нормали к контуру Γ; X, Y — компоненты вектора внешних усилий.

Учитывая, что контуры Γ_1, Γ_3 и Γ_5, Γ_7 пластины свободны от внешних усилий, с использованием условий (4), (5) можно найти значения нормальных и касательных напряжений, возникающих на них при растяжении пластины:

$$\sigma_x \cdot 0 + \tau \cdot 1 = 0, \qquad \sigma_y \cdot 1 + \tau \cdot 0 = 0,$$
$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2 = 3k^2.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_x = \pm\sqrt{3}\,k, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau = 0. \tag{6}$$

На контуры Γ_2 и Γ_6 внешние силы также не действуют.

С учетом уравнения контура в (1) вектор нормали к контуру Γ_2 пластины имеет вид

$$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{x - l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2 + (a/b)^4 y^2}}\,;\ \frac{y}{\sqrt{(b/a)^4(x-l/2)^2 + y^2}}\Big)^{\text{т}},$$

для контура Γ_6 вектор нормали равен

$$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{x - l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2 + (a/b)^4 (y-h)^2}}\,;\ \frac{y-h}{\sqrt{(b/a)^4(x-l/2)^2 + (y-h)^2}}\Big)^{\text{т}}.$$

С учетом равенств (4), (5) получаем значения нормальных и касательных напряжений, возникающих на контурах Γ_2, Γ_6:

$$\begin{gathered}\Gamma_2\!: \quad \sigma_x = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(a/b)^4 y^2}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 y^2}, \quad \sigma_y = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(l/2-x)^2}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 y^2}, \\ \tau = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(a/b)^2 y(l/2-x)}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 y^2};\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_6\!: \quad \sigma_x = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(a/b)^4 (y-h)^2}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 (y-h)^2}, \quad \sigma_y = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(l/2-x)^2}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 (y-h)^2}, \\ \tau = \pm\sqrt{3}\,k\,\frac{(a/b)^2 (y-h)(l/2-x)}{(l/2-x)^2 + (a/b)^4 (y-h)^2}.\end{gathered} \tag{8}$$

На пластину действует растягивающее усилие вдоль оси абсцисс. Заметим, что величина растягивающего усилия, а следовательно, и возникающего на контурах Γ_4, Γ_8 напряжения σ_x с учетом (4), (5) находится в диапазоне $[-2k, 2k]$.

Форма и размеры областей упругого и пластического деформирования, образующихся в пластине при растяжении, зависят от условий нагружения пластины и значений возникающих при этом нормальных и касательных напряжений на ее контурах. Рассмотрим несколько случаев распределения напряжений на контурах исследуемой пластины.

Случай 1. На контурах Γ_1, Γ_3, Γ_5, Γ_7 действуют напряжения $\sigma_x = \sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_4, Γ_8 — напряжения $\sigma_x = \sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_2, Γ_6 — напряжения, определяемые выражениями (7), (8) соответственно при $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $\tau > 0$.

Случай 2. На контурах Γ_1, Γ_3, Γ_5, Γ_7 действуют напряжения $\sigma_x = \sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_4, Γ_8 — напряжения $\sigma_x = (\sqrt{3}/2)k$, $\sigma_y = ((\sqrt{3} - \sqrt{39}\,)/4)k$, $\tau = 0$, на контурах

Γ_2, Γ_6 — напряжения, определяемые выражениями (7), (8) соответственно при $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $\tau > 0$.

Случай 3. На контурах Γ_1, Γ_3, Γ_5, Γ_7 действуют напряжения $\sigma_x = -\sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_4, Γ_8 — напряжения $\sigma_x = \sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_2, Γ_6 — напряжения, определяемые выражениями (7), (8) соответственно при $\sigma_x < 0$, $\sigma_y < 0$, $\tau < 0$.

Случай 4. На контурах Γ_1, Γ_3, Γ_5, Γ_7 действуют напряжения $\sigma_x = -\sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \tau = 0$, на контурах Γ_4, Γ_8 — напряжения $\sigma_x = 2k$, $\sigma_y = k$, $\tau = 0$, на контурах Γ_2, Γ_6 — напряжения, определяемые выражениями (7), (8) соответственно при $\sigma_x < 0$, $\sigma_y < 0$, $\tau < 0$.

Для всех указанных выше случаев получим значения напряжений на внутренних контурах Γ_9, Γ_{10} пластины, учитывая, что напряжения на этих контурах удовлетворяют условию

$$\sigma_x + \sigma_y = 2p, \qquad \tau = 0, \tag{9}$$

где p — постоянная величина, значение которой определяется условием пластичности (4):

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y = 3k^2. \tag{10}$$

Заметим, что в данном случае $\tau = \tau_{r\varphi} = 0$ [10], где r, φ — координаты полярной системы координат.

Решая систему (9), (10), находим значения функций напряжений σ_x, σ_y:

$$\sigma_x = p \mp \sqrt{k^2 - p^2/3}, \qquad \sigma_y = p \pm \sqrt{k^2 - p^2/3}\,.$$

Полагая $p = \sqrt{3}\,k$, для контуров Γ_9, Γ_{10} получаем $\sigma_x = \sqrt{3}\,k$, $\sigma_y = \sqrt{3}\,k$.

2. Применение законов сохранения при решении задачи. Получим решение поставленной выше упругопластической задачи, используя законы сохранения. Более подробно данная методика изложена в [10].

Решение поставленной задачи включает три основных этапа.

На первом этапе решается уравнение Лапласа $\Delta F = 0$ с граничными условиями $F\big|_{\Gamma,\Gamma_9,\Gamma_{10}} = \sigma_x + \sigma_y$ (σ_x, σ_y — функции в условиях (4), (5); $F = \sigma_x + \sigma_y$ — гармоническая функция в (3)). Для случаев 1–4 получаем следующие значения функции F на контурах Γ, Γ_9, Γ_{10}:

— случай 1:

$$F\big|_{\Gamma_1,\Gamma_3,\Gamma_5,\Gamma_7} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_4,\Gamma_8} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_2,\Gamma_6} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_9,\Gamma_{10}} = 2\sqrt{3}\,k;$$

— случай 2:

$$F\big|_{\Gamma_1,\Gamma_3,\Gamma_5,\Gamma_7} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_4,\Gamma_8} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{39}}{4}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_2,\Gamma_6} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_9,\Gamma_{10}} = 2\sqrt{3}\,k;$$

— случай 3:

$$F\big|_{\Gamma_1,\Gamma_3,\Gamma_5,\Gamma_7} = -\sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_4,\Gamma_8} = \sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_2,\Gamma_6} = -\sqrt{3}\,k, \quad F|_{\Gamma_9,\Gamma_{10}} = 2\sqrt{3}\,k;$$

— случай 4:

$$F\big|_{\Gamma_1,\Gamma_3,\Gamma_5,\Gamma_7} = -\sqrt{3}\,k, \quad F\big|_{\Gamma_4,\Gamma_8} = 3k, \quad F\big|_{\Gamma_2,\Gamma_6} = -\sqrt{3}\,k, \quad F|_{\Gamma_9,\Gamma_{10}} = 2\sqrt{3}\,k.$$

Далее, с использованием метода конечных элементов находим значения функции F во всех точках (x_0, y_0) области (узлах сетки), ограниченной контурами Γ, Γ_9, Γ_{10}. Количество полученных точек зависит от способа разбиения области, а также от размера конечных элементов. Из найденных значений функции F уравнения Лапласа в каждом узле сетки и

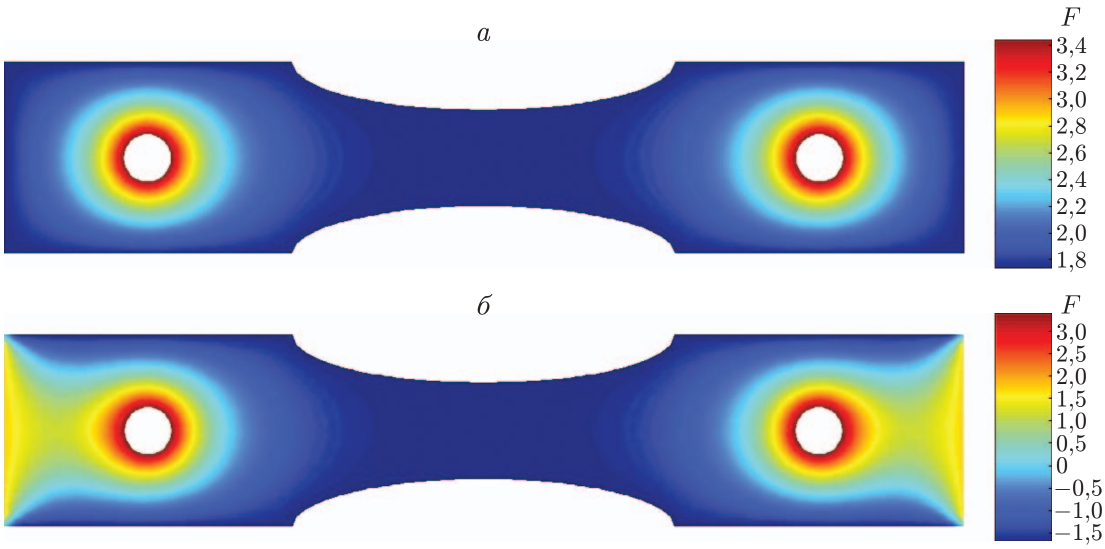

Рис. 2. Распределение функции F (решения уравнения Лапласа), полученное с помощью метода конечных элементов при различных значениях этой функции на границах:
а — случай 1, *б* — случай 3

координат самих узлов были составлены матрицы, все последующие вычисления проводились с использованием этих матриц.

На рис. 2 представлены результаты решения уравнения Лапласа с помощью метода конечных элементов для случаев 1 и 3.

На втором этапе решения задачи по формулам, найденным с использованием законов сохранения, определяются функции σ_x, σ_y, τ в каждой точке (x_0, y_0) области. Ниже приведен алгоритм получения этих формул. Более подробно алгоритм изложен в работе [10].

Из уравнений равновесия (2) и определения $F = \sigma_x + \sigma_y$ получаем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = 0, \quad \sigma_y = F - \sigma_x. \tag{11}$$

Запишем законы сохранения для первых двух уравнений в (11). Пусть $A = A(x, y, \sigma_x, \tau)$, $B = B(x, y, \sigma_x, \tau)$. Законы сохранения будем искать в виде равенства $D_x A + D_y B = 0$, выполняющегося в силу уравнений (11) (D_x, D_y — операторы полных производных по переменным x, y соответственно). Тогда

$$A_x + A_{\sigma_x}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + A_\tau \frac{\partial \tau}{\partial x} + B_y + B_{\sigma_x}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + B_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

или с учетом (11)

$$A_x + A_{\sigma_x}\Big(-\frac{\partial \tau}{\partial y}\Big) + A_\tau \frac{\partial \tau}{\partial x} + B_y + B_{\sigma_x}\frac{\partial \tau}{\partial x} + B_{\sigma_x}\frac{\partial F}{\partial y} + B_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Из последнего уравнения следует

$$A_\tau + B_{\sigma_x} = 0, \qquad -A_{\sigma_x} + B_\tau = 0, \qquad A_x + B_y + B_{\sigma_x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Пусть $A_{\sigma_x} = \omega_1^1$, $A_\tau = \omega_1^2$, $B_{\sigma_x} = \omega_2^1$, $B_\tau = \omega_2^2$. Тогда из (12) получаем

$$\omega_1^1 = \omega_2^2, \qquad \omega_1^2 = -\omega_2^1. \tag{13}$$

Предположим, что функции A и B имеют вид
$$A = \omega_1^1\sigma_x + \omega_1^2\tau + f_1, \qquad B = \omega_2^1\sigma_x + \omega_2^2\tau + g_1,$$
где
$$\omega_1^1 = \omega_1^1(x,y), \quad \omega_1^2 = \omega_1^2(x,y), \quad \omega_2^1 = \omega_2^1(x,y), \quad \omega_2^2 = \omega_2^2(x,y),$$
$$f_1 = f_1(x,y), \qquad g_1 = g_1(x,y).$$

Положим
$$\omega_1^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \qquad \omega_1^2 = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$
$$\omega_2^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \qquad \omega_2^2 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{14}$$
Очевидно, что в этом случае выполняются условия (13). Несложно показать, что функции (14) удовлетворяют также условиям Коши — Римана
$$\frac{\partial\omega_1^1}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1^2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_1^2}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1^1}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Формулы (15) позволяют выделить бесконечное число законов сохранения для уравнений (2).

С использованием теории функции комплексной переменной [10] получаем формулу для нахождения значений функции σ_x в любой точке (x_0, y_0) области, ограниченной контурами Γ, Γ_9, Γ_{10}:
$$\sigma_x(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma+\Gamma_9+\Gamma_{10}} (\omega_1^1\sigma_x + \omega_1^2\tau + f_1)\,dy - (-\omega_1^2\sigma_x + \omega_1^1\tau + g_1)\,dx. \tag{16}$$
Здесь $f_1 = 0$; $g_1 = \displaystyle\int \omega_1^2\,d_yF$.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем формулу для вычисления значений функции $\tau(x_0, y_0)$:
$$\tau(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma+\Gamma_9+\Gamma_{10}} (\omega_2^1\sigma_x + \omega_2^2\tau + f_2)\,dy - (-\omega_2^2\sigma_x + \omega_2^1\tau + g_2)\,dx, \tag{17}$$
где $f_2 = 0$; $g_2 = \displaystyle\int \omega_2^2\,d_yF$.

Зная значения $\sigma_x(x_0, y_0)$ и используя последнее соотношение в (11), находим формулу для вычисления значений функции σ_y в соответствующих точках (x_0, y_0) области:
$$\sigma_y(x_0,y_0) = F - \sigma_x(x_0,y_0). \tag{18}$$

На третьем этапе решения поставленной задачи проверяется условие пластичности (4) в каждой внутренней точке области, ограниченной контурами Γ, Γ_9, Γ_{10}. Точки, в которых выполняется условие для напряжений
$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau^2 < 3k^2,$$
принадлежат области упругого деформирования. Точки, в которых напряжения не удовлетворяют данному условию, принадлежат области пластического деформирования.

На рис. 3 представлены области упругого и пластического деформирования, полученные в результате вычислений для четырех указанных выше случаев распределения напряжений и значений функции F на контурах пластины.

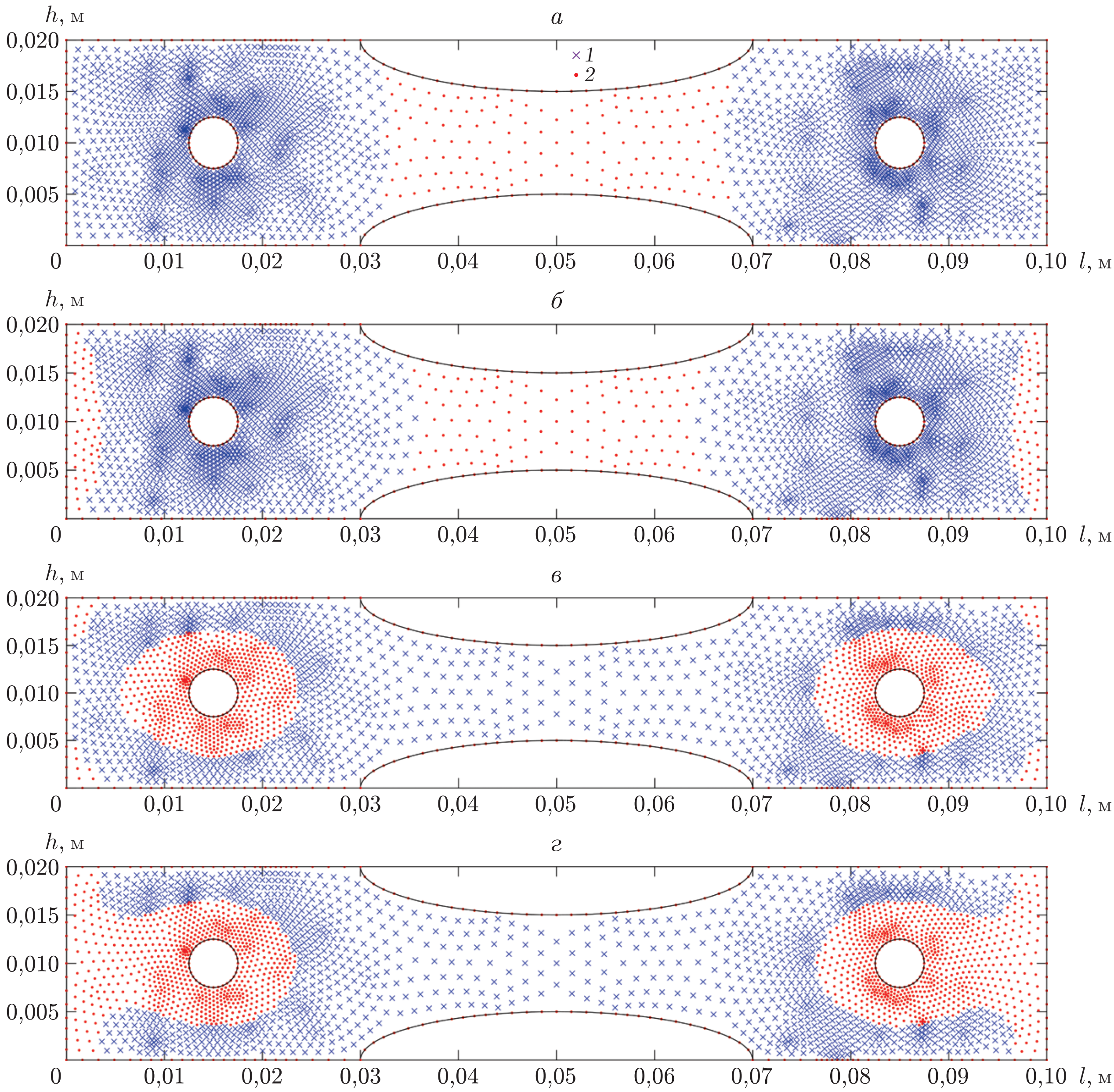

Рис. 3. Области упругого (*1*) и пластического (*2*) деформирования в пластине при различных случаях распределения напряжений и значений функции F на контурах:
а — случай 1, *б* — случай 2, *в* — случай 3, *г* — случай 4

С использованием предложенной методики можно определить области упругого и пластического деформирования, образующиеся в пластине при ее растяжении, и построить границу областей упругого и пластического деформирования.

Для решения задачи применены законы сохранения. Построенное решение может быть использовано для оценки прочностных характеристик пластин, применяемых в качестве образцов при испытаниях на растяжение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
2. **Остросаблин Н. И.** Пластическая зона около кругового отверстия в плоскости при неоднородном основном напряженном состоянии // ПМТФ. 1990. № 5. С. 124–131.
3. **Мирсалимов В. М.** Упругопластическая задача о растяжении пластины с круговым отверстием с учетом зарождения трещины в зоне упругой деформации // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 4. С. 162–173.
4. **Аннин Б. Д.** Упруго-пластическое распределение напряжений в плоскости с отверстием // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 315–317.
5. **Остросаблин Н. И.** Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
6. **Симметрии** и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. М.: Факториал Пресс, 2005.
7. **Киряков П. П.** Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
8. **Сенашов С. И.** Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, А. Н. Яхно. Красноярск: Сиб. гос. аэрокосм. ун-т, 2012.
9. **Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V.** On elastoplastic torsion of a rod with multiply connected cross-section // J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. 2015. V. 7, N 1. P. 343–351.
10. **Senashov S. I., Gomonova O. V.** Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes // Intern. J. Nonlinear Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
11. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 12/X 2020 г.,
после доработки — 6/XI 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.