УДК 165.2
DOI: 10.15372/PS20240105
EDN QOGIZT

А.А. Сухно, В.В. Гулин

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И «КОНВЕРТАЦИЯ СЛОЖНОСТИ»

В статье исследуется ситуация, которая сложилась вокруг дифференциальных уравнений как инструмента естествознания. С одной стороны, в рамках «тихой научной революции» XVIII в. они позволили преодолеть ограничения человеческой интуиции и раскрыть потенциал аналитических методов для познания природы. С другой стороны, к концу XIX в. проблема интегрируемости дифференциальных уравнений, наиболее ярко заявившая о себе в связи с «задачей *n* тел», показала необходимость реабилитации интуиции как важнейшего фактора научного познания. Именно с обращением к интуиции связано создание качественных/геометрических методов исследования нелинейных систем. В результате анализа этой ситуации в статье делается вывод об изменениях, происходящих на уровне методологии при столкновении научного познания со своими пределами: здесь выбор математических инструментов осуществляется таким образом, чтобы «сложность» одного из элементов исследовательской ситуации, которая стала для познания непреодолимой преградой, переносилась на какой-то другой элемент. Эта «конвертация сложности» позволяет продвинуться вперед в изучении природы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; интегрируемость; законы физики; интуиция; задача *n* тел; пределы познания; качественные методы; фазовое пространство; сложность

A.A. Sukhno, V.V. Gulin

INTEGRABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND “COMPLEXITY CONVERSION”

The article examines the situation around differential equations as a tool of natural science. On the one hand, during the “Quiet Scientific Revolution” of the 18th century, they made it possible to overcome the limitations of human intuition and reveal the potential of analytical methods for understanding nature. On the other hand, by the end of the 19th century, the problem of integrability of differential equations, which most clearly manifested itself with regard to the “n-body problem,” showed the need to rehabilitate intuition as the most important factor in scientific knowledge. It was the appeal to intuition that determined the creation of qualitative/geometric methods for studying nonlinear systems. Based on the analysis of this situation, the article draws a conclusion about the changes in methodology when scientific knowledge meets its limits: here the choice of mathematical tools is made in such a way that the "complexity" of one of the elements of the research situation, which has become an insurmountable barrier for knowledge, is transferred to some other element. So, this "complexity conversion" allows progress in the study of nature.

Keywords: differential equations; integrability; laws of physics; intuition; n-body problem; limits of knowledge; qualitative methods; phase space; complexity

Введение

Цель, которую мы ставим перед собой в рамках настоящей статьи, – подобраться к проблеме эффективности методов машинного обучения в естествознании. Предполагается, что этот вопрос «наследует» другому известному вопросу, а именно вопросу о статусе в естествознании математических методов. Тому самому, который Юджин Вигнер в свое время сформулировал как «непостижимую эффективность математики» (unreasonable effectiveness of mathematics) [4]. И в каких отношениях этот вопрос находится со своим «прародителем» – пока не совсем ясно.

Не так давно Д. Наполетани и его коллеги [39] заметили, что объяснение эффективности методов машинного обучения «через релевантность и размер данных» повторяет «вигнеровский парадокс», но только в перевернутом виде [39, p. 44]. Дело в том, что в случае машинного обучения эффективность объясняется определенными характеристиками данных, а не используемыми математическими методами, в то время как у Вигнера было все наоборот: предполагалось, что именно математические методы являются причиной впечатляющих успехов естествознания. Эта «симметричность» в оценке роли математических методов и наблюдаемых фактов («данных»), где *попеременно выбирается*, что именно при осмыслении процесса познания считать «непостижимым»/«необоснованным» (unreasonable), наводит на определенные размышления. Не исключено, что они указывают другой путь, чем перспектива «агностической науки» (agnostic science), которую развивают сами итальянские исследователи [39].

Мы полагаем, что соединяющим звеном, своего рода «местом встречи» двух парадоксов «непостижимой эффективности» является *проблема интегрируемости дифференциальных уравнений*, которая стала очевидной во второй половине XIX в., в первую очередь в связи с так называемой «задачей *n* тел» (*n*-body problem). С нашей точки зрения, имеется исследовательская перспектива, согласно которой логика перехода от «традиционных» методов естествознания к интеграции с методами машинного обучения воспроизводит логику перехода от аналитических методов к качественным, вызванного в свое время как раз проблемой интегрируемости.

В настоящей статье мы покажем, что в случае перехода от аналитических методов к качественным произошла методологическая трансформация, которую мы назвали «*конвертацией сложности*» и которая, по нашему мнению, как раз актуальна для ситуаций, когда происходит столкновение с пределами научного познания и возникают соответствующие парадоксы.

Страх перед сложностью и ограничения интуиции, или Почему тема дифференциальных уравнений «бойкотируется» в философии науки

Начнем с того, что введем соответствующий теоретический контекст: рассмотрим источники, на которые мы опирались при исследовании роли аппарата дифференциальных уравнений в новоевропейском естествознании.

В первую очередь следует отметить, что в современной «англоамериканской» философии науки (как в отдельной дисциплинарной области с ее кругом проблем, признанных тем, методов, источников, используемого словаря и т.д.) тема дифференциальных уравнений и их роли в естествознании занимает довольно скромное место. И это несмотря на то, что большинство известных нам законов физики выражены именно в форме дифференциальных уравнений. Даже структурный реализм, который возлагает большие надежды на то, что отношения, связи (relations) между физическими сущностями, фиксируемые математически в рамках системы уравнений, составляют «инвариантное» содержание физических теорий, удивительным образом проходит мимо этой темы.

В своей статье [49] Дж. Уоррал цитирует фрагмент из «Науки и гипотезы» А. Пуанкаре для обоснования реалистической перспективы в философии науки: «…Она (теория света Френеля. – *Авт.*) дает возможность предвидеть явления и теперь, и столь же хорошо, как и до Максвелла. Входящие в нее дифференциальные уравнения остаются верными; мы всегда можем интегрировать их теми же самыми способами, и результаты этой операции постоянно сохраняют все свое прежнее значение» (приводится по русскому изданию этой книги Пуанкаре [18, с. 162]). Но при этом он упускает из виду, что у Пуанкаре речь идет именно о *дифференциальных* уравнениях как о средстве описания «истинных отношений между реально существующими вещами» [Там же]. Между тем в «Науке и гипотезе» достаточно размышлений, демонстрирующих возможности уравнений этого типа [Там же, с. 95–126].

Что уж говорить о других направлениях, где математические методы естествознания выпадают из фокуса внимания и оно уделяется каким-то иным вещам: языку, логике, экспериментам, структуре научных сообществ, эмпирическому опыту и проч.

Кульминация такой стратегии избегания – позиция, которой придерживаются американские исследователи Дж. Ирмэн, Дж. Робертс и С. Смит [31], а вслед за ними недавно ее озвучил и профессор философии из Лихтенштейна Д. фон Вахтер в дискуссии с М. Эсфелдом [45]. Они рассматривают дифференциальные уравнения как инструмент математической идеализации, который предполагает принцип *ceteris paribus* («при прочих равных»). На этом основании, по их мнению, дифференциальные уравнения следует отличать от законов природы, открываемых физикой, и относить их, соответственно, исключительно к сфере упрощенного представления о физической реальности, которое напрямую не связано с ее устройством.

Тем не менее в ряде статей, опубликованных за последние десятилетия, речь идет о различных возможностях дифференциальных уравнений, которые могли бы при благоприятных условиях в будущем рассматриваться как отдельные элементы целостной теории познания.

Тот же Дж. Робертс в своей «сольной» статье отмечает, что ряд физических величин, такие как масса, ток смещения, спин, возникают именно как «размерные коэффициенты» дифференциальных уравнений физики [42]. Дж. Вудвард, опираясь на «Этюды о симметрии» Ю. Вигнера [5], указывал на роль «начальных условий» в естествознании, которая предполагает для законов физики, выражаемых посредством дифференциальных уравнений, «диапазон возможных изменений» при сохранении их стабильности («инвариантности») [48].

Строго говоря, Вудвард прямо не связывает физические законы с дифференциальными уравнениями. Он не соглашается с Вигнером, который «понимает под фундаментальными законами… динамические законы, выраженные гиперболическими дифференциальными уравнениями…» [48, p. 168]. Нам, со своей стороны, сложно представить, какую будут иметь значимость «начальные условия», рассматриваемые безотносительно к аппарату дифференциальных уравнений. Но в любом случае размышления Вудварда о начальных условиях могли бы стать частью философской теории применения дифференциальных уравнений в естествознании.

Марк Уилсон обращает внимание на то, что «граничные условия» дифференциальных уравнений не задаются произвольно, а определяются спецификой математической идеализации – являются ее «внутренне необходимыми» (inherent) требованиями и поэтому законы природы, выражаемые дифференциальными уравнениями, располагаются не во «внутренней области» (surrounding) физической системы, за пределами которой они якобы больше не действуют, а как бы «вдоль» (along) границы – как регулировка отношений между физической системой и ее «окружением» (interior) [47]. М. Эсфелд, полемизируя с Д. фон Вахтером, указывает на возможность ввода дополнительных слагаемых в «правой части» уравнения, чтобы отразить эволюцию конкретных объектов во времени, где в том числе учитываются многие внешние воздействия [32]. Историческую ретроспективу возникновения дифференциальных уравнений в физике можно найти у М. Стэна – там, где он указывает на период «тихой научной революции», когда уравнения динамики заняли место метафизических принципов, так называемой «онтологии тел» в понимании сущности физических законов [44].

Так или иначе, приходится констатировать: тема дифференциальных уравнений как самостоятельного явления, представляющего интерес для фундаментальной теории познания, на уровне философии науки практически отсутствует.

Но что если это умолчание, стремление избежать разговора о дифференциальных уравнениях следует воспринимать как «симптом» в психоаналитическом смысле? То есть существует причина того, что эта тема ускользает из философии науки: с ней связано некоторое неудобство, травматический эффект, который стремятся таким образом минимизировать? Мы полагаем, что это неудобство – принципиально *контринтуитивный* характер дифференциальных уравнений, используемых в физике.

Понятие «интуиции» (и соответственно, эпитет «контринтуитивный») здесь употребляется в смысле, в каком оно использовалось в контексте новоевропейского рационализма – от «интеллектуальной интуиции» или «интуиции ума» (“mentis intuitum”) Декарта до кантовской “Anschauung”. (Мы выбираем «интуицию» как перевод “Anschauung” вместо практически общепринятого в отечественной традиции «созерцания», ориентируясь на англоязычный вариант перевода этого термина –intuition.) Это способ данности некоего предмета в его непосредственности, который противостоит любой процедуре, требующей от сознания конструктивного усилия (дедукции, воображению, понятийному мышлению и т.д.). То есть интуиция имеет место, когда, скажем, Декарт полагает возможным «чистое понимание» (purus intellectionis) тысячеугольника – без «особого напряжения духа», которое требуется при воображении [7, с. 58–59]. Или когда Кант говорит о способе, с помощью которого познание *непосредственно* относится к предметам [8, с. 75], т.е. без *опосредствующего* признака, могущего быть отнесенным сразу к нескольким вещам и являющегося отличительной чертой понятийного мышления. В связи с этим немаловажно, как подмечал Яакко Хинтикка в своей дискуссии с Ч. Парсонсом, что «принцип индивидуальности» (individuality criterion), т.е. отсутствие всякой конструктивности/сложности, является определяющим для понятия «интуиции» у Канта, в то время как само присутствие объекта в чувственном или интеллектуальном опыте следует рассматривать всего лишь как его следствие [34, p. 342].

Разумеется, необходимо принимать в расчет особенности эволюции этого понятия. Если для Декарта, который в этом смысле следует интеллектуальной традиции, идущей, как минимум от Дунса Скота с его cognitio intuitiva [41], интуитивное познание связано с непосредственной очевидностью, которая является синонимом абсолютной достоверности [6, с. 84], то Кант рассматривает эту непосредственную очевидность (данность предмета в опыте) как зависимую от определенных условий – «априорных форм чувственности» (времени и пространства). А это означает, что, по Канту, интуиция напрямую связана с *неустранимыми* («*априорными*») *ограничениями*, которые «накладываются» на эмпирический опыт наблюдателя и тем самым навсегда «отсекают» доступную наблюдателю область явлений, Erscheinung, от области ноумена [8, с. 92]. То есть от того самого достоверного знания (о «реальности самой по себе»), которое Декарт связывал именно с интуитивным познанием.

Ниже мы покажем, почему результат описания физических явлений посредством аппарата дифференциальных уравнений не может быть «простой данностью», непосредственно представленной в опыте сознания, а носит всегда «*сложный*», *опосредствованный характер* и тем самым позволяет преодолевать интуитивные ограничения.

Математическая кодировка физических явлений, или Как преодолеть ограничения человеческой интуиции

Бертран Рассел был одним из первых, кто обратил внимание на это обстоятельство [43]. Его размышление было направлено против каузальной интерпретации законов физики: он указывал, что коль скоро законы физики формулируются в дифференциальных уравнениях, то описываемые ими отношения «невозможно точно выразить нематематическим языком».

Эту невозможность Рассел иллюстрирует с помощью «приблизительного», намеренно косноязычного определения физического закона, выражаемого в форме дифференциального уравнения: «Имеется неразрывная связь (constant relation) между состоянием вселенной в любой момент времени и величиной изменения в величине, с которой любая часть вселенной изменяется в этот момент, и эта связь есть “много-однозначная”, т.е. такая, что величина изменения в величине изменения определена, если задано состояние всей вселенной» [43, p. 395–396].

Тем не менее существует исследовательская перспектива, которая, с одной стороны, демонстрирует прекрасную осведомленность о роли дифференциальных уравнений в истории естествознания, а с другой – вполне успешно выражает «описываемые ими отношения» с помощью интуитивно доступных геометрических, или «качественных» методов. И эта перспектива связана с осмыслением научных достижений в области нелинейной динамики (теории динамических систем). По крайней мере, для нее не является откровением, что существует определенная зависимость между аппаратом дифференциальных уравнений и спецификой описываемого физического процесса. Например, в рамках этой перспективы отдается отчет в том, что задачи классической механики требуют использования обыкновенных дифференциальных уравнений, а задачи электродинамики и механики сплошных сред – дифференциальных уравнений в частных производных [13, с. 225] или что для описания эффектов самоорганизации необходимы нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных [21, с. 40–46] и т.д.

И это неудивительно, потому что бурный рост в исследованиях нелинейной динамики начала XX в. является прямым следствием столкновения с *проблемой интегрируемости дифференциальных уравнений*. Эта интеллектуальная традиция восходит к Анри Пуанкаре и его работам по небесной механике [19], а также к работам А.М. Ляпунова [10] по теории устойчивости, а также К. Майнцера [11], Дж. Биркгофа по гидродинамике [3], Л.И. Мандельштама и А.А. Андронова по теории нелинейных автоколебаний [1] и т.д.

И только во второй половине XX в. приводит к некоторым философско-теоретическим обобщениям. В связи с этим какие-то наброски философской теории дифференциальных уравнений, открывающей доступ к специфической «онтологии виртуального», можно найти у Ж. Делеза [29] и в большей степени у М. Деланды, который, впрочем, в своих размышлениях отталкивается именно от «виртуальной философии» Делеза [27]. Также заслуживает внимания попытка, которую предпринял словенский философ и математик Л. Квац. Следуя методологии структурного реализма, он рассматривает дифференциальные уравнения как инвариантные структуры при изменениях физической теории: в механике Ньютона они фигурируют как обыкновенные дифференциальные уравнения, в механике сплошных сред – как уравнения в частных производных, а при подходе Лагранжа (лагранжев формализм) для составления уравнений вводятся обобщенные переменные, вследствие чего становится возможным, например, математическое описание «в квантовой механике или даже в квантовой теории поля» [36, p. 209].

Если пытаться выделить какую-то ключевую характеристику, опираясь на этот теоретический материал, можно сказать, что дифференциальные уравнения являются, пожалуй, наиболее компактным средством описания физической реальности, поскольку *в минимальной степени зависят от сложности ее устройства*. Этот момент подмечает, например, Квац, когда трактует обыкновенные дифференциальные уравнения как инструмент «галилиевсконьютоновской математизации природы»: «…Физика включает в себя фрагменты противоречивых, контринтуитивных знаний о различных видах взаимодействия между телами, знаний, противоречащих здравому смыслу. Математика – единственный доступный инструмент для работы с противоречивыми (contradictory), контринтуитивными и несовместимыми (conflicting) фрагментами знаний» [36, p. 213].

Ключевым моментом, с нашей точки зрения, здесь является *понятие производной*. Определенные указания на его определяющую роль можно найти в статье М. Стэна [44], когда он говорит о новых математических инструментах, возникших в эпоху «тихой научной революции». Стэн обращается к наследию Эйлера [22, с. 187–188], чтобы показать, как в уравнениях нового типа, где неизвестной переменной является не величина, а функция, стало возможно использование дифференциальных операторов [44, p. 13]. Подобно тому как уравнение (обычное алгебраическое) содержит отношение между x и y – значениями переменных, оно также может содержать отношение между $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ – *приращениями переменных*. Согласно Стэну, «это было зарождение дифференциальных уравнений – в том виде, в каком мы их знаем сейчас» [44, p. 14]. С этой точки зрения решающим фактором для создания уравнения нового типа следует считать возможность представить соотношение (ratio) между приращениями переменных в структуре уравнения ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$), т.е. *понятие производной*.

Операция дифференцирования, т.е. взятие производной, позволяет описать направление, «величину изменения» (rate of change) процесса в произвольный момент времени. Иными словами, буквально производная представляет описание функции с точки зрения другой (производной) функции без того, чтобы эта зависимость «ясно и отчетливо» в картезианском смысле отражалась в человеческом сознании. Учитывая то, что в дифференциальном уравнении функция является описанием некоего природного процесса, тем самым мы «кодируем» в структуре уравнения взаимосвязь между физическими величинами, где одна величина становится «описанием» изменения другой. Например, в тривиальном случае, который приводится в большинстве учебных пособий по дифференциальным уравнениям (в частности, здесь: [23, с. 10]), скорость радиоактивного распада *описывает* или *представляет* на аналитическом уровне изменение количества вещества как взаимосвязь двух функций без интуитивно доступного, «прозрачного» представления этой взаимосвязи в сознании наблюдателя.

Решение дифференциального уравнения – это обратная операция, когда посредством интегрирования математического выражения, содержащего производную, восстанавливается исходная функция (точнее, семейство функций – интегральных кривых, каждая из которых может быть выделена из этого семейства, если задать начальные условия). То есть на уровне задач естествознания здесь делается предсказание будущего состояния конкретного физического явления при заданных в уравнении размерных коэффициентах [42], начальных [48] и граничных условий [47].

По сути, цикл математических операций производится *в режиме «черного ящика»*. «На входе» – составление дифференциального уравнения, определение дифференциальной связи между (физическими) величинами, расстановка коэффициентов и слагаемых и т.д. «На выходе» – функция, которую порождает структура дифференциального уравнения в результате операции интегрирования (гарантией чего является выполнение условий теоремы о «существовании и единственности решения» [23, с. 85]). Собственно, именно по этой причине В.И. Арнольд в свое время сетовал, что Лейбниц довел алгоритмы математического анализа «до полного автоматизма» и «изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих» [2, с. 8].

Стало быть, описание посредством дифференциальных уравнений не является *отражением* или «*ментальной схемой*» наблюдаемой реальности, т.е. не воспроизводит в абстрактной форме существующий опыт наблюдения различных природных явлений. Математически «закодировав» связь между физическими величинами, одна из которых описывает изменение другой, мы получили возможность извлечь информацию о природных процессах, которая *не связана со специфическими условиями нашего наблюдения.* Если позволить себе такую антропоморфную аналогию, то одна величина «приглядывает» за другой, являясь количественным показателем ее изменения (со всем разнообразием коэффициентов, дополнительных слагаемых в «правой части», а также диапазона начальных и вида граничных условий), без отражения этой связи в сознании человеческого субъекта, который просто проводит операцию интегрирования и получает функцию независимого переменного в качестве решения уравнения.

Строго говоря, такое описание включает в себя все многообразие «сценариев» поведения физических систем, т.е., говоря на языке математической физики, того, как будет вести себя система «при любых начальных условиях». А это значит, что такое математическое описание напрямую не связано с текущим опытом наблюдения, а следовательно, и для него не актуальны ограничения, присущие человеческой интуиции, которые как раз делают это наблюдение возможным. По сути, это то, о чем пишет Дж. Вудвард, когда обсуждает «диапазон возможных изменений», который могут претерпеть физические законы и остаться «инвариантными», поскольку имеет место «расщепление» (split) или «информационная независимость» (informational independence) физических законов и начальных условий [48, p. 164]. Иными словами, данные наблюдения могут различаться настолько, что сознание не обнаружит между ними никакого сходства, и при этом они все равно будут соответствовать одному и тому же закону, представленному в виде дифференциального уравнения.

Итак, ценой компактности, которой обладает математическое описание посредством дифференциальных уравнений, является его «контринтуитивный» характер. Интуиция, которая подразумевает непосредственную данность объекта в его простоте и «индивидуальности» или «единичности» [34, p. 342], и правда не участвует: по сути, функция описывает функцию, а человеческое сознание выступает *передатчиком, оператором*, который совершает «автоматические» операции, восстанавливая исходную функцию по имеющемуся дифференциальному уравнению физического процесса и получая решение в аналитической форме. Анализ происходит буквально «внутри» самой математики – вне тех специфических условий, которые обеспечивают возможность человеческого опыта.

«Задача *n* тел» и раздвоение «регулярности», или Как произошел сбой в прогнозировании физических явлений

На первых порах отсутствие интуитивного доступа к дифференциальной связи физических величин, содержащейся в структуре уравнения, не имеет особого значения. Напротив, с точки зрения развития научного познания это как раз является достижением, поскольку выводит цикл необходимых для естествознания математических операций за пределы человеческой интуиции и связанных с ней ограничений.

Существует стойкая уверенность, что отсутствие интуитивного доступа носит временный характер и быстро проходит, будто легкое недомогание, стоит лишь ввести начальные условия. В этом случае мы можем соотнести подобное решение с поведением физической системы, данной в эмпирическом опыте, и тем самым вернуть со-знанию интуитивный доступ. Например, широко известный образ «демона Лапласа», при создании которого предполагалось, что знание начальных условий является достаточным для предсказания всех прошлых и будущих состояний вселенной, стал возможен именно в силу такой уверенности. Однако для этого нужно, чтобы решение уравнения было записано как *функция независимой переменной с константами интегрирования, определяемыми по начальным условиям*. Эта необходимость вызвана тем, что прогноз физических явлений выражается как значение функции, которая определена относительно независимой переменной (см., например, [24, p. 274]).

Численные решения дифференциального уравнения также могут быть использованы для прогноза физических явлений, но при этом они носят только приближенный характер, когда велика роль допущений исследователя (см, например, [25, p. 2]). В такой ситуации необходимо, чтобы численное решение обладало любой наперед заданной точностью. Но в том-то и дело, что повышение точности в рамках методов конечных разностей или конечных элементов имеет свой предел: минимизация ошибки приближения ведет к неизбежному росту ошибки округления. И даже если предположить, что эта трудность преодолима, бесконечное увеличение точности с необходимостью влечет выход за пределы того физического масштаба, за который отвечает модель. То есть, например, может потребоваться знать начальные координаты с точностью, скажем, 10^{-15} м, что на порядки меньше размера атома, а следовательно, мы выходим за пределы классической механики и обращаемся уже к области квантовых явлений, где понятия точки и траектории неприменимы. Иными словами, нам потребуется знать все точнее и точнее то, что отсутствует в физической реальности.

Но дело как раз в том, что такое решение, как оказалось, далеко не всегда можно получить.

Так начинается запутанная история с проблемой интегрируемости дифференциальных уравнений, где ключевой трудностью является то, что у самого понятия «интегрируемости» отсутствует строгое математическое определение. В этом отношении красноречиво замечание Дж. Биркгофа, сделанное им в работе «Динамические системы»: «Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес» [3, с. 255]. А следовательно, там, где для решения прикладных задач мы искали четкий критерий, можно только вести теоретические рассуждения о «большей или меньшей степени интегрируемости» [Там же].

На что здесь следует обратить внимание для наших целей, так это на *сам характер регулярности*, которую открывают дифференциальные уравнения. Эта регулярность, как мы писали выше, находится, по сути, за пределами эмпирического опыта наблюдателя, т.е. отражает те «сценарии» поведения физических систем, которые в этом опыте не содержатся. Ситуация является удовлетворительной, пока мы имеем дело с относительно простым поведением физической системы, т.е. когда у нас есть возможность убедиться, что решения дифференциального уравнения соответствуют данным эмпирического опыта в текущем реализуемом сценарии (например, конкретной наблюдаемой траектории движения тела, которую описывает функция независимой переменной с константами). Пока дело обстоит таким образом, можно не замечать, что в случае дифференциальных уравнений физики речь идет о *регулярности принципиально иного типа*.

Тот факт, что образ «демона Лапласа» заметно померк в связи с проблемой интегрируемости, много раз подчеркивался в научной литературе (см., например, [12, с. 72–73; 13, с. 214; 16, с. 78]). Но то, что законы физической реальности, представленные в форме дифференциальных уравнений, выражают совершенно иной тип регулярности, чем эмпирически наблюдаемая регулярность, доступная в виде конкретных повторяющихся физических явлений, до сих пор проходило мимо внимания ученых (или по крайней мере не формулировалось в явном виде).

Например, М. Фриш в статье, посвященной различным концепциям физических законов, подходит максимально близко к этой теме «раздвоения» понятия регулярности. Он указывает, что «с появлением физики нелинейных и сложных систем» «парадигма законной предсказуемости (lawful predictability), по-видимому, достигла своих пределов» и «понятия детерминизма и предсказуемости расходятся» [33, p. S33]. Дело в том, что «сложные системы – это системы, поведение которых нельзя алгоритмически предсказать на основе микродинамических уравнений, управляющих системой. …То есть сложные хаотические явления, такие как турбулентность потока жидкости, бросают совершенно новый вызов демону Лапласа в его попытке предсказать эволюцию Вселенной» [Ibid., p. S40].

Иными словами, оказывается, что это специфическая регулярность, описываемая дифференциальным уравнением, которая вполне может *содержать внутри себя то, что, с точки зрения наблюдателя, выглядит как радикальная «не-регулярность»*. Именно отсюда проистекают проблемы с интегрированием и определением его четких математических критериев, поскольку образуется противоречие между, с одной стороны, специфической регулярностью, описываемой дифференциальными уравнениями физики, а с другой – нашим текущим опытом наблюдения, где нет точного и однозначного соответствия этой регулярности, а следовательно, становится проблематичным предсказание конкретных физических явлений.

По всей видимости, первоначально эта ситуация, когда не удается получить решение в виде функции неизвестной переменной с константами, воспринималась просто как недостаток «математической техники». Исследователи столкнулись с тем досадным фактом, что в некоторых уравнениях по какой-то причине нельзя использовать стандартные приемы нахождения решения: разделить переменные, произвести замену переменной и т.п. Иными словами, обнаруженные проблемы с интегрируемостью являлись по умолчанию *проблемами метода*.

Однако в процессе поиска решения «задачи *n* тел» выяснилось, что интегрируемость дифференциальных уравнений не является «техническим» вопросом, а зависит от свойств самой физической системы, которая этим уравнением описывается. Переломный момент здесь наступил после того, как Пуанкаре доказал «невозможность решения уравнений движения, или задачи *n* тел путем уменьшения размерности системы с помощью первых интегралов» [30, p. 68], а следовательно, нужно было заново определять понятие интегрируемости, одновременно пытаясь выяснить, какие именно свойства исследуемых физических систем вызывают затруднения на аналитическом уровне.

Как известно со времен Бернулли, на основании закона всемирного тяготения можно определить конкретные положения, которые занимают два тела в произвольный момент времени [Ibid., p. 67]. Но при добавлении в систему третьего тела такое решение уже невозможно получить: выясняется, что движение в системе трех тел содержит такие сценарии, где наблюдается, говоря современным языком, «чувствительная зависимость» от начальных условий, т.е. «сколь угодно малые возмущения могут привести к сколь угодно большим изменениям в движении» [40, p. 37]. Так мы сталкиваемся с тем, что описание посредством дифференциальных уравнений может содержать в себе не совсем регулярные и даже хаотические сценарии. И следовательно, мир «надлунный», который начиная с пифагорейцев представал для ученых образцом гармонии и соразмерности, на самом деле содержит *специфические явления, которые учеными просто не фиксировались в рамках их опыта наблюдения* – и «вылезли на поверхность» только после того, как появилось описание физической реальности с помощью дифференциальных уравнений.

Таким образом, мы попали в ситуацию, которую, возможно, еще только предстоит осмыслить во всей ее остроте и парадоксальности. С одной стороны, мы знаем закон в форме дифференциального уравнения второго порядка, который управляет поведением n тел (закон всемирного тяготения), но с другой стороны, не можем узнать положения всех этих тел в произвольный момент времени для любого начального состояния. Иными словами, описание природы посредством дифференциального уравнения содержит *зазор* между его общим решением (в виде функции независимой переменной с неопределенными константами) и частным решением (в виде функции независимой переменной с определенными по начальным условиям константами), поскольку в системе трех тел небольшие отклонения в начальных условиях могут привести принципиально иному результату.

В итоге этот «зазор» открывает любопытное и критически важное для наших целей обстоятельство: общие решения содержат некую информацию о физических системах, к которой отсутствует доступ в рамках человеческого опыта. То есть благодаря математическому аппарату дифференциальных уравнений у нас получилось *зафиксировать некую информацию о реальности* в математическом выражении, хотя это выражение само по себе и не годится для описания реальных опытных данных.

Собственно, именно по этой причине и могли возникнуть проблемы с интегрируемостью дифференциальных уравнений: интуиция дает сбой, потому что ее возможности просто не позволяют обработать содержащуюся в них информацию (только в режиме «черного ящика»: «функция описывает функцию» без участия сознания). Если угодно, в этой перспективе «неинтегрируемость» – указание на существование физических явлений, которые не фиксируются человеческой интуицией, но при этом все равно описываются дифференциальным уравнением. (Конечно, надо держать в уме, что неинтегрируемость также может обозначать столкновение с границей применимости математической модели.)

Например, в случае «задачи *n* тел» аналитическое решение, представленное в рядах, имеется, но оно совершенно не годится для предсказаний конкретных физических явлений в актуальном сценарии человеческого опыта. С этой точки зрения «мы не узнали ничего больше, чем до того, как получили это решение» [30, p. 69], поскольку это решение с «очень медленно сходящимися рядами», где «приходится суммировать, например, невероятное количество слагаемых по *q*, *p*, *t* даже для приближенного решения первого порядка» [46, p. 87]. Иными словами, в данном случае аналитическое решение не дает возможности предсказать реальные физические явления, но при этом оно каким-то образом содержит описания всех траекторий *n* тел в любой момент времени, включая и все хаотические траектории.

Принципиально важный момент: нужная информация в этом решении есть, а следовательно, необходима некая *трансформация математических методов*, чтобы получить к ней доступ. То есть вопрос состоит в том, как извлечь это скрытое содержание, сделать его доступным для человеческой интуиции, или, выражаясь языком исследователей эпистемологии машинного обучения, открыть «черный ящик».

Реабилитация интуиции и «расщепление» опыта наблюдателя, или Что обнаружил Пуанкаре в «черном ящике»?

Сразу дадим ответ на вопрос, вынесенный в название раздела. Собственно, об этом пишет сам Пуанкаре в третьем томе «Новых методов небесной механики»: «Если *попытаться представить себе* (курсив наш. – *Авт.*) фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети» [19, с. 339].

Как был получен такой результат, который явно предполагает обращение к интуиции (вспомним «тысячеугольник Декарта», количество углов которого не является помехой для интуиции), от которого математики уже вроде бы отказались?

В первую очередь заметим, что это обращение вполне понятно. Дифференциальные уравнения физики позволили получить аналитическое описание, которое открывало регулярность за пределами возможностей интуиции и тем самым позволяло делать предсказания о поведении физических систем в эмпирически наблюдаемом пространстве. Но как только при столкновении с «неинтегрируемостью» такая возможность пропадает, приходится пытаться каким-то образом описать эту специфическую регулярность. И тогда нет другого выхода, как *сделать это описание интуитивно доступным,* чтобы разобраться, что именно вызывает сбой в прогнозировании физических явлений.

Как, собственно, это осуществить, учитывая, что специфика такого описания именно в том, что оно выходит за пределы человеческой интуиции? На основе информации, содержащейся в дифференциальном уравнении, необходимо смоделировать *специальное пространство*, которое не воспроизводит наш текущий опыт, но при этом создает условия для использования интуиции в процессе познания.

Столкнувшись с невозможностью решения «задачи *n* тел», Пуанкаре предпринял «качественное», или геометрическое, исследование траекторий интегральных кривых в векторном поле, которые описывают дифференциальные уравнения, и «особых точек» (points singuliers), которые с ними связаны [20, с. 11]. Идея была в том, что коль скоро нелинейный физический процесс не может быть представлен в аналитическом виде, чтобы служить инструментом прогнозирования, то его можно представить как геометрическую интерпретацию динамики физической системы в специальном пространстве. Речь идет о *фазовом пространстве* (*phase space*), или *пространстве состояний* (*state space*), где осями координат выступают степени свободы физической системы, а ее эволюции во времени будет соответствовать определенная траектория.

Происхождение этого понятия представляет собой проблему, поскольку сложно оценить, чей именно вклад – Ж. Лиувилля, К. Якоби, Л. Больцмана или самого Пуанкаре стал решающим [40]. Но похоже, что условием, которое позволило Якоби в самом начале этой истории оценить по достоинству возможности теоремы Лиувилля (а именно, ее применимость к задачам механики) [Ibid., p. 34], является существование *гамильтоновых уравнений*, т.е. альтернативного ньютоновским уравнениям математического описания физической системы с помощью обобщенных переменных.

Фактически здесь мы используем свойство физической реальности, описываемой вторым законом Ньютона, согласно которому положение и скорость тела не зависят друг от друга. А это означает, что нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, где положение зависит от ускорения, можно свести к двум уравнениям первого порядка, каждое из которых определяет *степени свободы физической системы*, т.е. оси координат фазового пространства.

Дело в том, что в опыте наблюдения доступно только представление системы в ньютоновских пространстве и времени, где положение тела (как наиболее понятная для человеческой интуиции характеристика) первично, а скорость, т.е. величина изменения относительного положения, рассматривается как его производная характеристика. Но можно пойти другим путем: не предполагать, что те параметры системы, которые определяют ее динамику, даны в рамках *опыта физического пространства*, принадлежащего наблюдателю. В этом случае уже не скорость является определяющим параметром системы, а ее импульс, т.е. произведение скорости на массу, которая представляет собой фактор, не данный непосредственно наблюдателю в опыте. Это происходит потому, что одинаковые скорости тел, наблюдаемые в опыте, из-за наличия массы могут быть вызваны различающимися по силе воздействиями, а следовательно, для универсального (т.е. независимого от конкретного наблюдателя) понимания поведения физической системы необходимо знание значений импульсов тел, а не скоростей. Скорость – это характеристика опыта, но импульс – характеристика физической системы.

В недавнем исследовании Дж. Хант и его соавторы. [35], обосновывая фундаментальность гамильтоновой механики относительно лагранжевой, как раз указывают на связь скорости и импульса с физическим и фазовым пространствами соответственно: «…Знание траектории в физическом пространстве соответствует знанию положения и скорости, в то время как знание траектории в фазовом пространстве требует знания импульса системы. …Это следует из того факта, что знания положения и скорости системы не всегда достаточно для определения ее импульса. Следовательно, мы не всегда можем определить эволюцию системы в фазовом пространстве по ее траектории в физическом пространстве» [Ibid., p. 5–6].

Таким образом, представление уравнения в гамильтоновой форме позволяет интерпретировать положение и импульс как *«обобщенные» координаты.* Используя гамильтонову формулировку, мы, по выражению Р. Пенроуза, «делаем вид», что они *независимы друг от друга* [14, с. 147], и это позволяет трансформировать реальный опыт трехмерного физического пространства в гибкую многомерность фазового пространства. Тем самым удается получить доступ к дополнительной информации о физических явлениях, например, к связанной с изменением фазового объема системы и другими топологическими эффектами, которые просто не регистрируются в рамках опыта наблюдения в физическом пространстве. (По сути, здесь раскрываются топологические структуры - сингулярности, положения равновесия, предельные циклы, странные аттракторы, чей онтологический статус заслуживает отдельного разговора. См., например, [28, p. 84–85]).

Таким образом, та самая специфическая регулярность, которая описывается только аналитически и вовсе не обязательно совпадает с эмпирически наблюдаемой регулярностью, может быть представлена в интуитивно доступном виде, но в принципиально ином пространстве, чем физическое пространство моего актуального опыта.

От точки зрения наблюдателя к «точке зрения» физической системы, или Как продвинуться в познании природных явлений, сделав непостижимым окружающее их пространство

Мы более не помещаем физическую систему в пространство, которое было бы идеализированной моделью нашего актуального опыта. Фазовое пространство не воспроизводит реальный опыт наблюдения, который возможен только в специфических условиях «человеческого» субъекта, а отображает *состояния* самой описываемой системы. Если угодно, оно не предполагает точку зрения человеческого или какого-то другого наблюдателя на систему, но предполагает *«точку зрения» самой физической системы*, поскольку именно ее характеристики определяют структуру моделируемого пространства, которое предлагается нашей интуиции в качестве «эрзаца» пространства физического.

Об этом пишет Мануэль Деланда, когда обсуждает специфику делезовской «множественности» (multiplicité), и чтобы соотнести геометрические свойства многообразий (manifold) Римана с физическими процессами, вводит пространство состояний (фазовое пространство). Деланда указывает, что эту множественность характеризуют «переменное число измерений» и «отсутствие дополнительного (высшего) измерения, навязывающего внешнюю согласованность (extrinsic coordinatization)», т.е. отсутствие «трансцендентного пространства», или «имманентность» в делезовской терминологии [27, p. 4–5].

Однако с возвращением интуиции в математическое исследование вернулись и все ее структурные ограничения, которые мы уже полагали отброшенными вместе с распространением аналитических методов. Ведь если устраняется «трансцендентное пространство» с *дополнительным* ($n + 1$) *измерением*, где воспроизводится опыт восприятия физической системы со стороны внешнего наблюдателя, то «имманентное» (фазовое) пространство, которое отражает состояния физической системы, может содержать *такое число измерений*, что его использование просто потеряет смысл. А именно, исчезнет тот самый интуитивный доступ к сложноорганизованной реальности, который мы с таким трудом получили на предыдущем этапе, поскольку графический образ в многомерном пространстве может просто оказаться недоступным для восприятия.

«Как и в любой модели, - пишет Деланда, - здесь имеет место компромисс: мы меняем *сложность изменений состояния объекта* на *сложность моделируемого пространства* (курсив наш. – *Авт.*). Иными словами, мгновенное состояние объекта, неважно насколько сложное, становится единственной точкой, и это значительное упрощение, но пространство, в которое вложен объект (object's state is embedded), становится более сложным» [Ibid., p. 6]. Это означает, что идея с интуитивным доступом к результатам использования дифференциальных уравнений в физике будет работать только в том случае, если удается свести фазовый портрет системы к двух- или трехмерным образам.

Но фокус в том, что между стратегиями отказа от интуиции и использования интуиции *уже был достигнут определенный результат*, который позволил продвинуться в познании природы. То есть реабилитация интуиции, которая привносит в исследование «сложность моделируемого пространства», не возвращает нас к исходной позиции со всеми ее проблемами, а выводит познание на качественно новый уровень. Как это удалось сделать?

«Сложность изменений состояния объекта» (= физического процесса), о которой пишет Деланда, напрямую связана с обсуждавшимся выше понятием «неинтегрируемости». Как мы видели, оно означает невозможность извлечь из математического выражения информацию о наблюдаемых в физическом пространстве явлениях, чтобы выстроить на ее основе прогноз относительно природных явлений. (Строго говоря, «сложность» в исследованиях по нелинейной динамике определяется как *переплетение, взаимоналожение* регулярности и хаоса в динамических траекториях фазового портрета системы, где в большинстве случаев даже невозможно провести четкую границу между ними: она будет фрактальной [13, с. 220–221].). Интуитивный доступ к физическим явлениям расходится с абстрактностью математического выражения, и на первый взгляд кажется, что с этим ничего поделать нельзя. Но что если при сохранении разрыва между абстракцией и интуицией как бы *поменять местами* математическое выражение наблюдаемого явления и пространство, в котором это явление регистрируется? Т.е. сделать математическое выражение интуитивно доступным за счет превращения самого пространства в абстрактное?

В этом случае абстрактной будет не только математическая модель физического процесса, но и само моделируемое пространство. «Они (фазовые пространства. – *Авт.*) явно не похожи на многообразия, которые мы используем для представления пространства-времени; точки в фазовых пространствах являются абстрактными объектами, которые представляют другие абстрактные объекты (возможные динамические состояния), тогда как точки в многообразиях являются абстрактными объектами, которые представляют другие конкретные объекты (точки в пространстве-времени)» [38, p. 233].

Так, форма математического выражения меняется с аналитической на геометрическую, а пространство из физического становится фазовым. Или, если использовать более громоздкую формулировку для достижения максимальной точности, невозможность совместить *абстрактность математического выражения* (*в аналитической форме*) и *интуитивную доступность* (*физического*) *пространства* превращается в невозможность совместить *интуитивную доступность математического выражения* (*в геометрической форме*) и *абстрактность* (*фазового*) *пространства*.

Ключевая идея здесь в том, чтобы в условиях непреодолимого разрыва между возможностью предсказать поведение физической системы и описанием системы с помощью аналитических методов конвертировать одну «сложность» (физического процесса) в другую (пространства, в котором этот процесс регистрируется) с целью продвижения в познании.

Именно в этом случае удается представить эволюцию физической системы в виде динамических траекторий, составляющих ее фазовый портрет. В результате чего «неинтегрируемость» на уровне аналитического описания превращается в интуитивно доступный графический образ, в соответствии с которым можно вести речь о «большей или меньшей степени интегрируемости» системы, как это подмечал еще Дж. Биркгоф [3, с. 255]. Тем самым нам удалось продвинуться вперед – воспользоваться результатами, полученными на предыдущем этапе, когда многие из них, будучи «зашифрованными» в аналитической форме, не годились для предсказания физических явлений (проблема интегрируемости).

Максимально заостряя суть произошедшего, можно сказать, что сначала потребовалось произвести отказ от интуиции, чтобы получить «аналитически закодированную» информацию о природных явлениях (в виде дифференциальных уравнений), а затем понадобилось снова применить интуицию – уже для расшифровки этой информации (в виде составления фазового портрета исследуемой системы). Весь фокус был в том, чтобы произвести эти операции – использование интуиции и отказ от нее – *в нужной последовательности* и тем самым конвертировать одну сложность в другую и обеспечить конечный выигрыш.

Волей-неволей приходит мысль, что споры о роли интуиции в математике: полемика А. Пуанкаре и Л. Кутюра [17], статьи Э. Кассирера [26] и Й. Ленхарда [37] о нападках на кантовское обоснование математики, хрестоматийная схватка между интуиционизмом и формализмом (см., например, [9]) – носят симптоматический характер, поскольку свидетельствуют о структурных противоречиях внутри объективного процесса развития математического знания, о необходимости лавировать между интуицией и абстракцией («логической дедукцией»).

До сих пор этот прием «конвертации сложности» рассматривался, по-видимому, исключительно в качестве математической техники, которая носит чисто эвристический характер. По этой причине его использование не отслеживалось на теоретическом уровне. По крайней мере, очень похоже, что в приведенной выше цитате

Деланда воспринимает его именно так, на что указывает сухая оговорка: «как и в любой модели…». Действительно, схожие приемы можно обнаружить как подспорье для решения частных задач, например в операционном исчислении, когда речь идет о применении преобразований Фурье и/или Лапласа для решения дифференциальных уравнений. (Благодаря этим преобразованиям получают образы исходных функций/уравнений и решают задачу в образах, которая превращается из дифференциальной в алгебраическую, однако восстановление прообраза решения может быть весьма сложной, в том числе неинтегрируемой, задачей; см., например, [15, с. 37]), или метод при использовании конформных преобразований в теории функции комплексного переменного, который позволяет перевести сложную геометрию моделируемого объекта в более простую – круг, полуплоскость, полосу и т.п. (См., например, [12, с. 53–59, с. 85]: можно, скажем, решить задачу расчета подъемной силы крыла самолета путем сведения геометрии профиля к гораздо более простому пространственному образу – кругу). Поэтому такие приемы значительно проще встретить в учебнике для студентов, чем в научно-философской статье.

И только необходимость понять, как действовать в условиях структурных ограничений интуиции, когда фазовый портрет физической системы не удается представить в виде двух- и трехмерных геометрических образов, заставляет обратить более пристальное внимание на обстоятельства, которые вынуждают использовать этот прием. Мы предлагаем рассматривать его как методологическую трансформацию, которая (пока стихийно) происходит при столкновении с пределами научного познания. И мы полагаем, что эта трансформация имеет самое прямое отношение к обстоятельствам возникновения машинного обучения и к его применению в области естествознания, что будет предметом дальнейших исследований.

Заключение

В настоящей статье мы показали, как прогресс новоевропейского (математического) естествознания строится вокруг ограничений и возможностей человеческой интуиции. И такая ситуация порождает специфическую логику развития научного познания, когда приходится *попеременно выбирать*, что именно в данный момент будет считаться непостижимым, обладающим «непреодолимой сложностью», чтобы обходить барьеры на пути этого развития.

При описании логики интересующей нас линии развития мы выделили несколько этапов.

Во-первых, использование аппарата дифференциальных уравнений в естествознании в свое время позволило обойти ограничения человеческой интуиции – вследствие специфики дифференциальной связи. Благодаря понятию производной в структуру уравнения удалось «внедрить» специальную функцию, которая отражает изменение другой функции, без необходимости воспроизведения этой связи в сознании наблюдателя.

Во-вторых, последующее столкновение с проблемой интегрируемости дифференциальных уравнений потребовало реабилитации интуиции, т.е. перехода к качественным/геометрическим методам исследования и создания теории динамических систем, где главную роль играет фазовое пространство (пространство состояний). Такое пространство больше не совпадает с («трансцендентным») пространством, в котором протекает опыт наблюдателя, но является («имманентным») пространством самой исследуемой физической системы.

В-третьих, эпистемологическим основанием этого перехода явилась «конвертация сложности». Это методологическая трансформация, в соответствии с которой при столкновении с пределом научного познания, выражающимся в избыточной сложности поведения физических систем, недоступных для описания с помощью аналитических методов, следует изменить само пространство для моделирования физического процесса. Пространство становится «более сложным» – абстрактным, с «переменным числом измерений», но зато сам физический процесс в качестве фазовой кривой становится интуитивно доступным. Это лавирование между отказом от интуиции и ее реабилитацией обеспечивает продвижение вперед, расширяя пределы научного познания.

Проблема, которая определяет дальнейшее направление исследований в эпистемологии естествознания, состоит в том, что вместе с реабилитацией интуиции становятся снова актуальными все структурные ограничения последней. Качественные/геометрические методы эффективны только в том случае, если удается свести многомерное пространство к двух- и трехмерным изображениям. Это, в свою очередь, означает, что требуется использование новой версии «конвертации сложности».

Литература

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2018.
3. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. Ижевск; ИД «Удмуртский университет», 1999.
4. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Успехи физических наук, 1968. Т. 94, вып. 3. С. 535–546.
5. *Вигнер Ю.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
6. *Декарт Р.* Правила для руководства ума // Декарт Р. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1989. Т. 1. С.77–153.
7. *Декарт Р.* Размышления о первой философии // Декарт Р. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1994. Т. 2.
8. *Кант И.* Критика чистого разума / Пер. с нем. Н.О. Лосского с вариантами пер. на рус. и европ. языки. М.: Наука, 1999.
9. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. 2-е изд., испр.; М.: Либроком, 2009.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950.
11. *Майнцер К.* Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез. М.: Либроком, 2009.
12. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1957.
13. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950–1980-е годы. URSS, 2018.
14. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. URSS, 2022.
15. *Плескунов М.А.* Операционное исчисление: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014.
16. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. 8-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2021.
17. *Пуанкаре А.,* Математика и логика. *Кутюра Л.* В защиту логицизма: Ответ на статью Пуанкаре. *Пуанкаре А*. Математика и логика (продолжение). Ответ на статью Кутюра. URSS, 2022.
18. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза. М.: Либроком, 2018.
19. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 т. М.: Наука, 1972. Т. 2
20. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Москва; Ленинград: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1947.
21. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
22. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Пер. с лат. М.Я. Выгодского. Москва; Ленинград: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1949.
23. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2019.

24. *Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A.* Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. York: Springer New, 1996.

25. *Blakseth S.S., Rasheed A., Kvamsdal T., San O.* Deep neural network enabled corrective source term approach to hybrid analysis and modeling // Neural Networks. 2021. No. 146 (15).

26. *Cassirer E.* Kant und die moderne Mathematik. (Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik) // Kant Studien. 1907. No. 12 (1–3). P. 1–49.

27. *DeLanda M.* Intensive Science and Virtual Philosophy. Repr. ed., Bloomsbury Academic, 2013.

28. *DeLanda M., Harman G.* The Rise of Realism. Malden, MA: Polity, 2017.

29. *Deleuze G.* Différence et répétition. Paris: Presses Universitaires de France, 1968.

30. *Diacu F.* The solution of the n-body problem // Mathematical Intelligencer. 1996. No. 18 (3). P. 66–70.

31. *Earman J., Roberts J.T., Smith S. Ceteris paribus* lost // Erkenntnis. 2002. No. 57 (3). P. 281–301.

32. *Esfeld M.* The principle of causal completeness: Reply to Daniel von Wachter // Organon F. 2019. No. 26 (1). P. 169–174.

33. *Frisch M.* Laws in physics // European Review 2014. No. 22. P. S33–S49.

34. *Hintikka J.* III. Kantian intuitions // Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy. 1972. No. 15(1–4). P. 341–345.

35. *Hunt J., Carcassi G., Aidala C.* Hamiltonian privilege // Erkenntnis. Yun 2023. P. 1–24.

36. *Kvasz L.* Mathematical Language and the Changing Concept of Physical Reality // New Approaches to Scientific Realism. De Gruyter, 2020. P. 206–229.

37. *Lenhard J.* Kants Philosophie der Mathematik und die umstrittene Rolle der Anschauung // Kant-Studien. 2006. No. 97 (3). P. 301–317.

38. *Lyon A., Colyvan M.* The explanatory power of phase spaces // Philosophia Mathematica. 2008. No. 16 (2). P. 227–243.

39. *Napoletani D., Panza M., Struppa D.* The agnostic structure of data science methods // Lato Sensu: Revue de la Société de Philosophie des Sciences. No. 8 (2). P. 44–57.

40. *Nolte D.D.* The tangled tale of phase space // Phys. Today 2010. No. 63 (4). P. 33–38.

41. *Pini G.* Scotus on intuitive and abstractive cognition // Medieval Philosophy: Essential Readings and Contemporary Responses / Ed. by J.P. Hause. London: Routledge? 2014. P. 348–365.

42. *Roberts J.T.* Measurability and physical laws // Synthese. 2005. No. 144. P. 433–447.

43. *Russell B.* On the notion of cause, with applications to the free-will problem // Proceedings of the Aristotelian Society. 1913. Vol. 13. P. 1–26.

44. *Stan M.* From metaphysical principles to dynamical laws // The Cambridge History of Philosophy of the Scientific Revolution, 2020. URL: https://www.academia.edu/41468384/From_metaphysical_principles_to_dynamical_laws / (дата обращения: 12.12.2023).

45. *Wachter D.* Do the laws of nature entail causal closure? Response to Michael Esfeld // Organon F. 2019. No. 26 (1). P. 175–184.

46. *Wang Q.* The global solution of the n-body problem // Celestial Mechanics. 1991. No. 50. P. 73–88.

47. *Wilson M.* Law along the frontier: differential equations and their boundary conditions // PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. Vol. Two: Simposia and Invited Papers. Cambridge University Press, 1990.

48. *Woodward J.* Laws: An invariance-based account // Laws of Nature / Ed. by W.R. Ott and L. Patton. Oxford University Press, 2018. P. 158–181.

49. *Worrall J.* Structural realism: The best of both worlds? // Dialectica. 1989. No. 43 (1–2). P. 99–124.

References

1. *Andronov, A.A., A.A. Vitt & S.E. Khaikin.* (1981). Teoriya kolebaniy [Theory of Oscillations]. Moscow, Nauka Publ.

2. *Arnold, V.I.* (2018). Obyknovennye differentsialnye uravneniya [Ordinary Differential Equations], 2nd ed., stereotyp. Moscow, Moscow Centre for Continuous Mathematical Education.

3. *Birkhoff, G.* (1999). Dinamicheskie sistemy [Dynamical Systems]. Izhevsk, Urdmut University Publishing House. (In Russ.).

4. *Wigner, E.* (1968). Nepostizhimaya effektivnost matematiki v estestvennykh naukakh [The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences]. Uspekhi fizicheskikh nauk [Advances in Physical Sciences], Vol. 94, Iss. 3, 535–546. (In Russ.).

5. *Wigner, E.* (1971). Etyudy o simmetrii [Studies on Symmetry]. Moscow, Mir Publ. (In Russ.).

6. *Descartes, R.* (1989). Pravila dlya rukovodstva uma [Rules for the Direction of the Mind]. In: R. Descartes. Sochineniya: V 2 t. [Works: In 2 vols.], Vol. 1, 77–153. Moscow, Mysl Publ. (In Russ.).

7. *Descartes, R.* (1994). Razmyshleniya o pervoy filosofii [Meditations on First Philosophy]. In: R. Descartes. Sochineniya: V 2 t. [Works: In 2 vols.], Vol. 2. (In Russ.).

8. *Kant, I.* (1999). Kritika chistogo razuma [Critique of Pure Reason]. Transl. from German by N.O. Lossky, with translation options into Russian and European languages. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.).

9. *Kleene, S.C.* (2009). Vvedenie v matematiku [Introduction to Mathematics], 2nd ed., revised. Moscow, Librokom Publ. (In Russ.).

10. *Lyapunov, A.M.* (1950). Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya [The General Matter of Stability of Motion]. Moscow & Leningrad, GITTL [State Publishing Company of Technical and Theoretical Literature].

11. *Mainzer, K.* (2009). Slozhnosistemnoe myshlenie: Materiya, razum, chelovechestvo. Novyy sintez [Thinking in Complexity: The Computational Dynamics of Matter, Mind and Mankind]. Moscow, Librokom Publ. (In Russ.).

12. *Markushevich, A.I.* (1957). Kratkiy kurs teorii analiticheskikh funktsiy [Short Course in Analytic Function Theory]. Moscow, State Publishing Company of Technical and Theoretical Literature.

13. *Mukhin, R.R.* (2018). Ocherki po istorii dinamicheskogo khaosa: Issledovaniya v SSSR v 1950–1980-e gody [Essays on the History of Dynamic Chaos: Research in the USSR in the 1950s–1980s]. URSS Publ.

14. *Penrose, R.* (2022). Novyy um korolya: O kompyuterakh, myshlenii i zakonakh fiziki [The Emperor’s New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics]. URSS Publ. (In Russ.).

15. *Pleskunov, M.A.* (2014). Operatsionnoe ischislenie: Ucheb. posobie [Operational Calculus: Manual]. Ekaterinburg, Ural University Publ.

16. *Prigogine, I. & I. Stengers.* (2021). Poryadok iz khaosa: Novyy dialog cheloveka s prirodoy [Order out of Chaos: Man’s New Dialogue with Nature], 8th ed. Moscow, Editorial URSS Publ. (In Russ.).

17. Poincaré, H. (2022). Matematika i logika [Mathematics and Logic]. *Couturat, L.* V zashchitu logitsizma: Otvet na statyu Puankare [In Defence of Logicism: Reply to Poincaré]. *Poincaré, H.* Matematika i logika (prodolzhenie): Otvet na statyu Kutyura [Mathematics and Logic (continued): Reply to Couturat]. URSS Publ. (In Russ.).

18. *Poincaré, H.* (2018). Nauka i gipoteza [Science and Hypothesis]. Moscow, Librokom Publ. (In Russ.).

19. *Poincaré, H.* (1972). Novye metody nebesnoy mekhaniki [New Methods of Celestial Mechanics]. In: H. Poincaré. Izbrannye Trudy: V 3 t. [Selected Works: In 3 vols.], Vol. 2. (In Russ).

20. *Poincaré, H.* (1947). O krivykh, opredelyaemykh differentsialnymi uravneniyami [On Curves Determined by Differential Equations]. Moscow & Leningrad, State Publishing Company of Technical and Theoretical Literature. (In Russ.).

21. *Haken, H.* (1985). Sinergetika: Ierarkhii neustoychivostey v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroystvakh [Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices]. Moscow, Mir Publ. (In Russ.).

22. *Euler, L.* (1949). Differentsialnoe ischislenie [Differential Calculus]. Transl. from Latin by M.Ya. Vygodsky. Moscow & Leningrad, State Publishing Company of Technical and Theoretical Literature. (In Russ.).

23. *Elsgolts, L.E.* (2019). Differentsialnye uravneniya [Differential Equations]. Moscow, LKI Publ.

24. *Alligood, K.T., T.D. Sauer & J.A. Yorke.* (1996). Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York, Springer.

25. *Blakseth, S.S., A. Rasheed, T. Kvamsdal & O. San.* (2021). Deep neural network enabled corrective source term approach to hybrid analysis and modeling. Neural Networks, 2021, 146 (15).

26. *Cassirer, E.* (1907). Kant und die moderne Mathematik. (Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik). Kant Studien, 12 (1-3), 1–49.

27. *DeLanda, M.* (2013). Intensive Science and Virtual Philosophy. Repr. ed. Bloomsbury Academic.

28. *DeLanda, M. & G. Harman.* (2017). The Rise of Realism. Malden, MA, Polity.

29. *Deleuze, G.* (1968). Différence et répétition. Paris, Presses Universitaires de France.

30. *Diacu, F.* (1996). The solution of the n-body problem. Mathematical Intelligencer, 18 (3), 66–70.

31. *Earman, J., J.T. Roberts & S. Smith.* (2002). *Ceteris paribus* lost. Erkenntnis, 57 (3), 281–301.

32. *Esfeld, M.* (2019). The principle of causal completeness: Reply to Daniel von Wachter. Organon F, 26 (1), 169–174.

33. *Frisch, M.* (2014). Laws in physics. European Review, 22, S33–S49.

34. *Hintikka, J.* (1972). III. Kantian intuitions. Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy, 15 (1-4), 341–345.

35. *Hunt, J., G. Carcassi & C. Aidala.* (2023). Hamiltonian privilege. Erkenntnis, Yun, 1–24.

36. *Kvasz, L.* (2020). Mathematical language and the changing concept of physical reality. In: New Approaches to Scientific Realism. De Gruyter, 206–229.

37. *Lenhard, J.* (2006). Kants Philosophie der Mathematik und die umstrittene Rolle der Anschauung. Kant-Studien, 97 (3), 301–317.

38. *Lyon, A. & M. Colyvan.* (2008). The explanatory power of phase spaces. Philosophia Mathematica, 16 (2), 227–243.

39. *Napoletani, D., M. Panza & D. Struppa.* (2021). The agnostic structure of data science methods. Lato Sensu: Revue de la Société de Philosophie des Sciences, 8 (2), 44–57.

40. *Nolte, D.D.* (2010). The tangled tale of phase space. Physics Today, 63 (4), 33–38.

41. *Pini, G.* (2014). Scotus on intuitive and abstractive cognition. In: J.P. Hause (Ed.). Medieval Philosophy: Essential Readings and Contemporary Responses. London, Routledge, 348–365.

42. *Roberts, J.T.* (2005). Measurability and physical laws. Synthese, 144, 433–447.

43. *Russel, B.* (1913). On the notion of cause, with applications to the free-will problem. Proceedings of the Aristotelian Society, 13, 1–26.

44. *Stan, M.* (2020). From metaphysical principles to dynamical laws. In: The Cambridge History of Philosophy of the Scientific Revolution. Available at: https://www.academia.edu/41468384/From metaphysical principles to dynamical laws / (date of access: 12.12.2023).

45. *Wachter, D.* (2019). Do the laws of nature entail causal closure? Response to Michael Esfeld. Organon F, 26 (1), 175–184.

46. *Wang, Q.* (1991). The global solution of the n-body problem. Celestial Mechanics, 50, 73–88.

47. *Wilson, M.* (1990). Law along the frontier: differential equations and their boundary conditions. In: PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. Vol. Two: Simposia and Invited Papers. Cambridge University Press.

48. *Woodward, J.* (2018). Laws: An invariance-based account. In: W.R. Ott & L. Patton (Eds.). Laws of Nature. Oxford University Press, 158–181.

49. *Worrall, J.* (1989). Structural realism: The best of both worlds? Dialectica, 43 (1-2), 99–124.

Информация об авторах

Сухно Алексей Андреевич – Москва
volyakvlasti@mail.ru

Гулин Вячеслав Владимирович – Институт механики Московского государственного университета (19192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1)
kornet104@gmail.com

Information about the author

Sukhno, Alexey Andreevich – Moscow

Gulin, Vyacheslav Vladimirovich – Institute of Mechanics of Moscow State University (Michurinskiy Prospekt, Moscow, 119192, Russia)

Дата поступления 23.12.2023