РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2004, том 40, № 6

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 004.922

А. М. Ковалев

(Новосибирск)

ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЙ ПРЕДМЕТОВ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПЕРЦЕПТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА НА КАРТИННУЮ ПЛОСКОСТЬ

Представлены численные оценки искажений в передаче масштабов, пространственной глубины и интерпозиции предметов при изображении визуального пространства на плоской картине разными системами перспектив. Показано, что ренессансная система перспективы, построенная по законам геометрической оптики, обладает наибольшими суммарными погрешностями. Найден вариант перцептивной системы перспективы, который достоверно передает на плоскости глубину пространства и обладает меньшими суммарными ошибками.

Введение. В работе [1] предложены линейная и нелинейная модели перцептивного пространства, возникающего в сознании человека при зрительном восприятии окружающего мира. Линейная модель соответствует монокулярному зрению, нелинейная отражает свойства бинокулярного зрения. Показаны трудности достоверного изображения визуально воспринимаемого пространства на плоской картине, но целый ряд вопросов по существу этой проблемы остался за пределами работы. Вот их перечень, относящийся только к линейной модели пространства.

1. Как положение картинной плоскости в пространстве предметов влияет на соотношение размеров изображений этих предметов?

2. Как определяются видимые угловые размеры поверхностей, параллельных главному лучу зрения, и связанная с ними глубина пространства? Какое проективное преобразование характерно для системы перспективы, достоверно передающей глубину пространства?

3. Как изменяется интерпозиция предметов и поле зрения при удалении предметов от наблюдателя?

4. Каким образом перераспределяются искажения в передаче масштабов, глубины и интерпозиции предметов для различных вариантов перспективных систем?

Иными словами, желательно дать численную оценку соответствия выбранной системы перспективы неискаженной передаче перцептивного пространства на плоскости для картины в целом. Впервые эта задача была поставлена академиком Б. В. Раушенбахом [2], однако при ее решении никак не

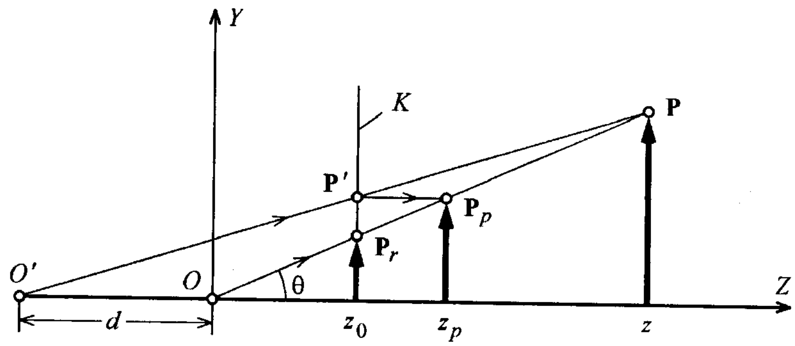

Рис. 1

учитывалось нарушение интерпозиции предметов, характерное для любого варианта перцептивной системы перспективы на плоскости.

Масштабы предметов, картины, пространства. Пусть в декартовой системе координат *XYZ*, начало которой совпадает с оптическим центром глаза в точке *O*, задана точка $\mathbf{P} = [x, y, z]$, видимая под углом θ (на рис. 1 показана проекция пространства на плоскость *YOZ*). Перпендикулярно главному лучу зрения, совпадающему с осью *OZ*, задана плоскость $z = z_0$, называемая картинной плоскостью *K*.

Ренессансная система перспективы*, в основе которой лежит геометрическая оптика, предполагает, что изображение точки **P** образуется путем пересечения луча *O***P** с картинной плоскостью *K* в точке $\mathbf{P}_r$. При этом

$$\mathbf{P}_r = [x_r, y_r, z_0] = \mathbf{P} f_r(z) = \mathbf{P}\frac{z_0}{z}, \qquad (1)$$

где $f_r(z) = z_0/z$ – функция ренессансного проективного преобразования. Изображение на сетчатке глаза от натуры (точка **P**) и от ее изображения на картине (точка $\mathbf{P}_r$) будет одинаковым, поскольку в точке *O* расположен центр проекции глаза. «Тождественность сетчаточного образа, порожденного натурой, и сетчаточного образа, порожденного картиной, позволяет условно утверждать, что в системе ренессансной перспективы изображается сетчаточный образ» [2].

Зрительная система – это не просто глаз, который смотрит. Это система «глаз + мозг», которая видит, формируя пространственный облик натуральной среды – перцептивное пространство. Таким образом, в системе перцептивной перспективы должно изображаться зрительно воспринимаемое пространство, а не его оптический образ на сетчатке. Из работ психологов следует, что над сетчаточными образами предметов выполняются операции, подобные обратным проективным преобразованиям [3]. Чтобы воссоздать объективное пространство, зрительная система должна либо измерять расстояние до точки **P**, либо определять координаты $[x, y]$ точки путем параллельной проекции из центра в $-\infty$. На основе экспериментов по зрительному восприятию размеров предметов посредством кажущегося параллельного проектирования [1, 2, 4] было показано, что центр проекции системы «глаз + + мозг» не совпадает с точкой *O*, но и не расположен в $-\infty$. Он смещен вдоль

* Классическая система перспективы, созданная в эпоху Возрождения.

оси OZ в точку O' на расстояние d, которое оказалось личностной константой наблюдателя [1]. В результате исходная точка $\mathbf{P}$ проецируется на картинную плоскость вдоль луча $O'\mathbf{P}$ в точку $\mathbf{P}'$, абсцисса и ордината которой равны абсциссе x_p и ординате y_p точки $\mathbf{P}_p$. Аппликата z_p находится из условия, что на сетчатке создается один и тот же образ от точки $\mathbf{P}$ и от ее изображения $\mathbf{P}_p$, т. е. из центра проекции O точка $\mathbf{P}_p$ видна под углом θ. При этом

$$\mathbf{P}_p = [x_p, y_p, z_p] = \mathbf{P} f_p(z) = \mathbf{P}\frac{z_0 + d}{z + d}, \qquad (2)$$

где $f_p(z) = \dfrac{z_0 + d}{z + d}$ – функция перцептивного проективного преобразования.

Из (1) и (2) отчетливо видно основное отличие ренессансной и перцептивной перспектив. Если первая формирует плоское изображение на картинной плоскости K, то вторая – объемное изображение в так называемом перцептивном пространстве. Для ренессансной перспективы наличие картинной плоскости $z = z_0 \neq 0$ имеет принципиальное значение, поскольку при $z_0 = 0$ построить картину невозможно. Но при фиксированном угловом размере поля зрения θ и различном удалении картинной плоскости $z = z_0 > 0$ от наблюдателя изменяется лишь размер или масштаб картины, что является практически несущественным параметром изображения. Для перцептивной перспективы плоскость $z = z_0$ задает масштаб объемного изображения. Функцию проективного преобразования из (2) можно переписать следующим образом:

$$f_p(z) = \frac{d}{z + d}\left(1 + \frac{z_0}{d}\right) = \frac{d}{z + d} k_p, \qquad (3)$$

где $k_p = 1 + \dfrac{z_0}{d}$ – масштабный коэффициент. При $z_0 > 0$ получаем увеличенное изображение, при $z_0 < 0$ и $|z_0| < d$ – уменьшенное. При $z_0 = 0$ масштаб перцептивного пространства $k_p = 1:1$. Означает ли последнее, что предметы такого пространства, полученные из (2), имеют естественно воспринимаемые размеры, а само пространство физически расположено в границах от $z_p \geq 0$ до $z_p(\infty) = d = 3–6$ м, как это следует из экспериментов по кажущемуся параллельному проектированию [1]? Возможно, что это верно и будет доказано соответствующими исследованиями. Однако масштабирование перцептивного пространства не оказывает влияния на его качественные характеристики. Поэтому будем считать, что перцептивное пространство определяется с точностью до масштабного коэффициента, который эффективно задается координатой z_0 картинной плоскости K.

Условие картинной плоскости. При $z = z_0$ из (1), (2) функции преобразования $f_r(z_0) = f_p(z_0) = 1$ независимо от системы перспективы. Предметы, расположенные в плоскости картины, или сечения предметов плоскостью картины имеют натуральные физические размеры без каких-либо искажений в любой системе перспективы. Поэтому картинную плоскость иногда называют плоскостью натуральных размеров или плоскостью нулевых ошибок и всегда имеют в виду, что это – виртуальная плоскость. Реальную картину получают из виртуальной с помощью преобразования подобия.

Условие горизонта. Функции проективного преобразования из (1), (2) – это гиперболические функции, убывающие по мере роста расстояния до предметов z. Условие $f_r(\infty) = f_p(\infty) = 0$ при $z = \infty$ обычно называют условием горизонта.

Существенным отличием изображений, выполненных в разных системах перспектив, является соотношение масштабов разноудаленных предметов. Пусть изображению подлежат квадраты со стороной a, расположенные в плоскостях $z = z_1$ и $z = z_2$, параллельных картинной плоскости K. Пусть стороны квадратов параллельны осям OX и OY. В ренессансной перспективе с учетом (1) будет получено изображение квадратов со сторонами

$$a_{p1} = af_p(z_1) = a\frac{z_0}{z_1 + d}, \qquad a_{p2} = af_p(z_2) = a\frac{z_0}{z_2 + d}. \tag{4}$$

С учетом (4), (5) соотношения масштабов в ренессансной и перцептивной перспективах представим как

$$m_r = a_{r1}/a_{r2} = \frac{z_2}{z_1}, \qquad m_p = a_{p1}/a_{p2} = \frac{z_2 + d}{z_1 + d}. \tag{6}$$

Сокращение всех объективных геометрических размеров предметов и картины в формулах (6) свидетельствует о том, что окончательные формулы не изменятся, если как-то иначе (с другим определением размеров предметов и другим положением картинной плоскости z_0) вычислять значения m_r и m_p.

Чем же отличается перцептивная перспектива от ренессансной? На больших удалениях предметов от наблюдателя при $z_2 > z_1 \gg d$ из (6) $m_p \to m_r$, т. е. перцептивная перспектива приближается к ренессансной. Однако на малых расстояниях при $z_1 < z_2 \ll d$ величина $m_p \to 1$, т. е. в перцептивной перспективе проявляется психофизический механизм константности величин [3], которого нет в ренессансной. Поясним на примере. Пусть $m_r = 2:1$, т. е. $z_2 = 2z_1$ независимо от абсолютного значения z_1. Пусть $d = 6$ м.

Случай 1 – большие расстояния: $z_1 = 50$ м, $z_2 = 100$ м. При этом из (6) $m_p = 106:56 = 1{,}89 : 1$, т. е. отличается от m_r на 11 %.

Случай 2 – малые расстояния: $z_1 = 50$ см, $z_2 = 100$ см. При этом $m_p = 700:650 = 1{,}08 : 1$. Предмет в 2 раза ближе, но его размер увеличился не вдвое, а всего лишь на 8 %. Это и есть константность величин. Иными словами, на малых расстояниях перцептивная перспектива приближается к аксонометрии или параллельной проекции предметов на картинную плоскость.

С учетом (4)–(6) искажения масштабов предметов в ренессансном изображении можно оценить при помощи относительной погрешности

$$M_R = \left(1 - \frac{m_r}{m_p}\right) \cdot 100\,\% = \left[1 - \frac{f_r(z_1)\,f_p(z_2)}{f_r(z_2)\,f_p(z_1)}\right] \cdot 100\,\%. \tag{7}$$

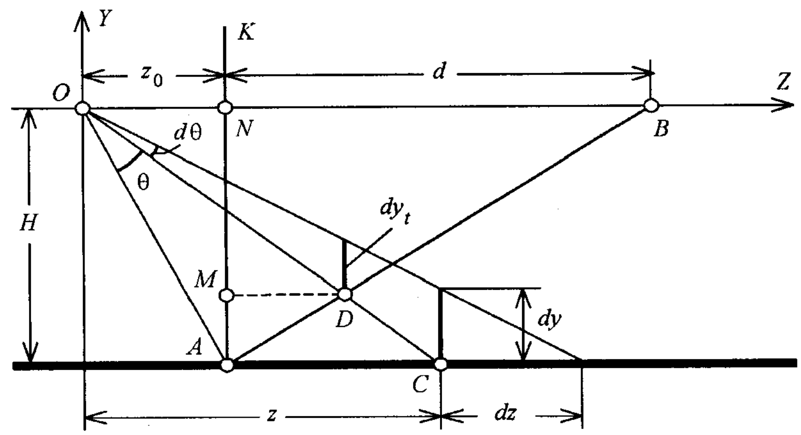

Рис. 2

Чтобы придать выражению (7) более общий характер, положим $z_2 = z_0$, где z_0 – положение картинной плоскости, а $z_1 = z$, где z – расстояние до произвольно расположенного предмета. Поскольку из условия картинной плоскости $f_p(z_0) = f_r(z_0) = 1$, то $f_p(z_2) = f_r(z_2) = 1$ и формулу (7) можно переписать в виде

$$M_R(z) = \left[1 - \frac{f_r(z)}{f_p(z)}\right] \cdot 100\,\%. \qquad (8)$$

Таким образом, вычисление ошибок ведется по всему диапазону расстояний до предметов относительно картинной плоскости с нулевыми ошибками. Пусть диапазон расстояний укладывается в следующие границы: $z = z_{\text{near}}$ – наименьшее возможное расстояние (ближний план), $z = z_{\text{far}}$ – наибольшее возможное расстояние (дальний план). Представляется целесообразным считать ошибки для трех положений картинной плоскости: на ближнем, среднем и дальнем планах.

З а м е ч а н и е. Если дробь $f_r(z)/f_p(z)$ в выражении (8) будет превышать единицу, то следует брать ее обратную величину.

Глубина пространства. До сих пор мы рассматривали преобразование предметов, лежащих в плоскостях, параллельных картинной плоскости K. Получим теперь выражение для зрительно воспринимаемой величины отрезка прямой, лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости K. На рис. 2 глаз наблюдателя расположен в точке O на расстоянии H от прямой, содержащей изображаемый отрезок AC. В перцептивном пространстве изображение прямой $y = -H$ в пределах от $z = z_0$ до $z = \infty$ представляется отрезком прямой AB. Из (2) уравнение прямой AB в параметрическом виде

$$y_p = -H\frac{z_0 + d}{z + d}, \qquad z_p = \frac{z(z_0 + d)}{z + d}, \qquad (9)$$

где z – параметр. В явном виде уравнение этой прямой

$$y_p = H\left(\frac{z_p}{d} - k_p\right), \qquad (10)$$

где k_p – масштабный коэффициент из (3).

В перцептивном пространстве изображаемый отрезок AC предстанет отрезком AD и будет достоверно воспринят, но его видимая величина неверно изобразится на картинной плоскости K в виде отрезка AM.

Пусть в точке C элементарному отрезку dz соответствует элементарный отрезок $dy = Hdz/z$ и элементарный угол $d\theta$. В точке D видимая величина элементарного отрезка dy будет равна $dy_t = f_p(z)dy = Hf_p(z)dz/z$. Следовательно, зрительно воспринимаемая величина отрезка AC будет $Y_t = HF_t(z)$, где с учетом (2) и (3)

$$F_t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f_p(z)dz}{z} = (z_0 + d)\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z(z+d)} = \frac{z_0 + d}{d}\ln\frac{z(z_0 + d)}{z_0(z+d)} = k_p \ln\frac{z_p}{z_0}. \quad (11)$$

Полученная функция положительна, при $z = z_0$ равна нулю, а по мере роста z монотонно увеличивается и стремится к верхнему пределу $F_t(\infty) = k_p \ln(1 + d/z_0)$. Функция определяет видимую величину $Y_t = HF_t(z)$ отрезка AC, лежащего в плоскости, перпендикулярной плоскости картины, и дает некий размер, который надо отложить в данном случае по вертикали на картинной плоскости. Одновременно она определяет видимый угловой размер удаленности θ^*. Заметим, что видимый угол θ^* вследствие преобразующей деятельности мозга не равен физическому углу $AOC = \theta$. Поясним это. Функция $F_t(z)$ увеличивает предметы, расположенные перпендикулярно плоскости картины, подобно тому, как функция $f_p(z)$ увеличивает предметы, параллельные плоскости картины. Например, прямая $y = -H$ от $z = z_0$ до $z = \infty$ изобразится на картине K в ренессансной перспективе отрезком прямой $AN = H$, а визуально воспринятая величина этой прямой будет $Y_t = HF_t(\infty)$, где $F_t(\infty) = k_p \ln(1 + d/z_0)$. При $d = 6$ м, а $z_0 = 2$ м будем иметь $Y_t = 1{,}85H$. Вследствие этого и видимый угол от основания картины в точке A до горизонта в точке N не будет равен углу AON.

$F_t(z)$ не является функцией проективного преобразования, поскольку не удовлетворяет двум условиям: условию горизонта и условию плоскости картины, которые определены выше. Но эта функция описывает достоверное зрительное восприятие глубины пространства. Будем искать функцию проективного преобразования в виде разности $F_t'(z) = F_t'(z_0) - F_t(z)$, потому что $F_t(z)$ положительна, а при возрастании z, т. е. при приближении к горизонту, должно происходить уменьшение абсцисс и ординат точек. Из условия горизонта $F_t'(\infty) = 0$ находим, что $F_t'(z_0) = F_t(\infty)$ и $F_t'(z) = F_t(\infty) - F_t(z)$. Из условия картинной плоскости следует, что проективная функция при $z = z_0$ должна равняться единице. Поэтому в окончательном виде искомая функция проективного преобразования

$$f_t(z) = \frac{F_t'(z)}{F_t(\infty)} = 1 - \frac{F_t(z)}{F_t(\infty)} = \frac{\ln(1 + d/z)}{\ln(1 + d/z_0)}. \quad (12)$$

Чтобы понять, как работает эта функция, обратимся к рис. 3, где показано изображение прямой $y = -H$ от картинной плоскости K до бесконечности в трех системах перспектив: прямая AB – перцептивная перспектива; кривая AL – найденная перспектива; прямая AN – ренессансная перспектива.

Пусть функция $f_t(z)$ преобразует точку C в точку E, ордината которой делит картину точкой G от основания A до горизонта N пополам. При этом

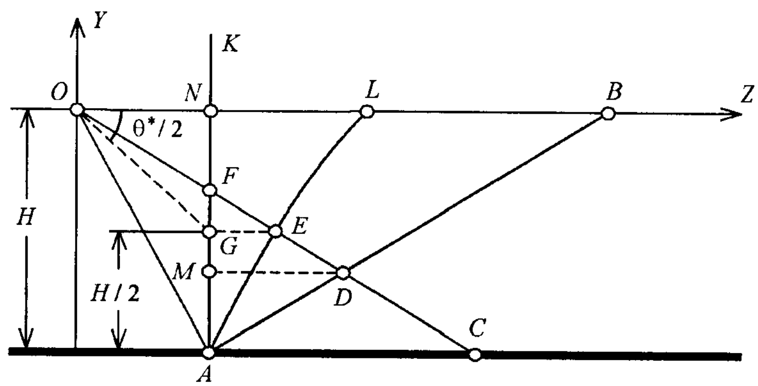

Рис. 3

$f_t(z_C)=1/2$, где z_C – аппликата точки C. Из (12) для найденной аппликаты $F_t(z_C)=F_t(\infty)/2$. Значит, и в перцептивном пространстве точка C воспринимается лежащей по глубине на половине расстояния от z_0 до ∞. Таким образом, восприятия глубины от картины и в перцептивном пространстве совпадают. Это объясняется тем, что при переходе от выражения (11) к (12) мы изменили лишь начало отсчета (от точки N вместо A) и общий масштаб (деление на $F_t(\infty)$), что для качественных параметров изображения несущественно.

В ренессансной перспективе точка C проецируется в точку F, которая делит AN на два неравных отрезка AF и FN, причем $AF > FN$. Поэтому справедливо утверждение, что ренессансная перспектива «растягивает» пространство вблизи и «сжимает» пространство вдали. Если получать изображение на плоскости K с помощью перцептивного преобразования (2), то точка C через точку D проецируется в точку M, которая делит отрезок AN так, что $AM < MN$. При этом на малых расстояниях пространство оказывается сжатым, а на больших – растянутым. Эти эффекты хорошо продемонстрированы изображениями моста в [1]. Заметим, что преобразование (12) верно воспроизводит глубину пространства, но неизбежно вносит погрешности в передаче соотношений размеров предметов, расположенных в плоскостях, параллельных картине.

Итак, мы убедились в том, что перцептивная перспектива, формирующая объемное изображение, свободна от искажений масштабов предметов и глубины пространства. Плоское изображение независимо от применяемой системы перспективы искажает предметы и пространство. Оценить искажения можно с помощью относительных погрешностей, подобных (8). Искажения глубины в ренессансной системе перспективы

$$T_R(z)=\left[1-\frac{f_r(z)}{f_t(z)}\right]\cdot 100\,\%. \tag{13}$$

Искажения глубины в плоском изображении, построенном перцептивной системой перспективы, достоверно передающей масштабы предметов, и искажения масштабов предметов, построенных перцептивной системой

$$T_M(z) = M_T(z) = \left[1 - \frac{f_t(z)}{f_p(z)}\right] \cdot 100\,\%. \tag{14}$$

Интерпозиция предметов и поле зрения. Интерпозиция – это взаимное расположение предметов в пространстве. Искажений интерпозиции нет, если расположение предметов в пространстве, наблюдаемом с определенной точки зрения, и расположение предметов на изображении этого пространства одинаково. Геометрическим критерием отсутствия ошибок интерпозиции является равенство угловых положений предметов в пространстве и на изображении относительно некоторого опорного направления. Обычно таковым считают направление главного луча зрения, параллельного носозатылочной оси. Центральная проекция предметов на носитель изображения (плоскость или объем) обеспечивает равенство угловых положений предметов при условии, что центр проекции и оптический центр глаза наблюдателя совпадают, а главный луч пучка проекции и главный луч зрения совмещены. Только в этом случае (см. рис. 1) любая точка пространства **P** и ее проекции $\mathbf{P}_r$ и $\mathbf{P}_p$ видны под одним и тем же углом θ. Таким образом, в ренессансной системе перспективы на плоскости ($\mathbf{P}_r$) и пространственной системе перцептивной перспективы ($\mathbf{P}_p$) погрешности интерпозиции отсутствуют в принципе.

Иное дело, когда центр проекции и центр наблюдения не совпадают. Это характерно для перцептивных систем перспектив на плоскости. На рис. 4, *а* показан вариант такой системы. Как и на рис. 1, центр наблюдения *O* совпадает с началом декартовой системы координат *XYZ*, а центр проекции *O′* сдвинут по оси *OZ* на расстояние *d*. Картинная плоскость *K* установлена на расстоянии $z_0 = z_{\text{near}}$ от центра *O*.

Выше установлено, что необходимым условием безошибочной интерпозиции является достоверное воспроизведение на изображении угловых положений точек пространства. На рис. 4 таковыми являются все точки, расположенные вдоль главного луча зрения (оси *OZ*), и все точки на картинной плоскости *K*. В первом случае это точки с нулевым углом. Оси *OZ* и *O′Z* совпадают. Ошибок интерпозиции нет. Плоскость *K* – это плоскость натуральных размеров предметов, которая дает их достоверное угловое положение. Действительно, плоскость *K* – это плоскость нулевых ошибок. Все остальные точки наблюдаемого пространства при их проекции на картинную плоскость из точки *O′* дадут ошибочные угловые положения. По мере отклонения луча проекции от оси *OZ* искажение интерпозиции будет увеличиваться и достигнет максимума на краю изображения. Рассмотрим эту максимальную ошибку, которая сводится к искажению поля зрения.

Пусть поле зрения ограничено углом θ, показанным на рис. 4, *а*. На картинную плоскость *K* из центра *O′* проецируется пространство, заключенное между $z_0 = z_{\text{near}}$ и z_{far}. Линейный размер картины, соответствующий краю изображения в точке *A*,

$$S(z_0) = z_0 \operatorname{tg}\theta = (z_0 + d)\operatorname{tg}\theta'. \tag{15}$$

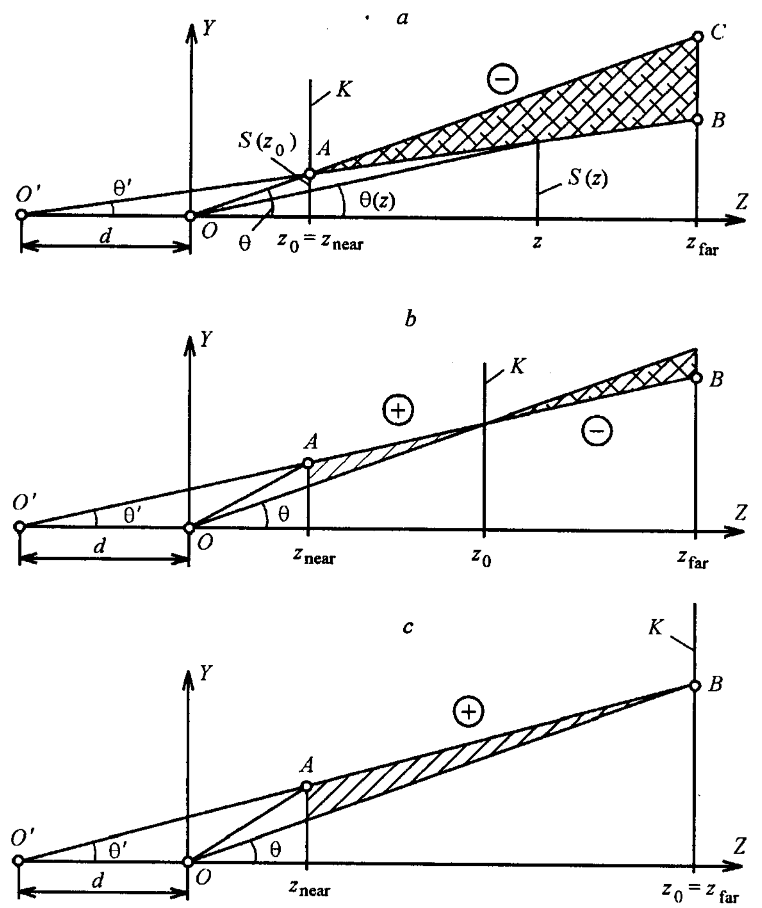

Рис. 4

Расстояние любой точки отрезка AB, совпадающего с лучом проекции под углом θ', от оси OZ есть

$$S(z) = z\,\mathrm{tg}\,\theta(z) = (z + d)\,\mathrm{tg}\,\theta'. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что $\mathrm{tg}\,\theta' = \dfrac{z_0}{z_0 + d}\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{z}{z + d}\mathrm{tg}\,\theta(z)$, откуда $\dfrac{z_0}{z}\mathrm{tg}\,\theta =$ $= \dfrac{z_0 + d}{z + d}\mathrm{tg}\,\theta(z)$ или

$$f_r(z)\,\mathrm{tg}\,\theta = f_p(z)\,\mathrm{tg}\,\theta(z). \qquad (17)$$

Полученное выражение эквивалентно известной формуле Лагранжа – Гельмгольца, связывающей линейное и угловое увеличения в оптической системе. Линейное увеличение приводит к падению углового увеличения. Так и здесь. По мере удаления предметов от наблюдателя происходит их увеличение на перцептивном изображении по сравнению с ренессансным, но при этом теряются угловые размеры поля зрения. Потерян кусок пространства, проекция которого на плоскость YOZ обозначена треугольником ABC. При выравнивании масштабов изображений на среднем плане (рис. 4, b) для $z_{\text{near}} \leq z \leq z_0$ поле зрения увеличено по сравнению с ренессансным, а размеры предметов уменьшены. При $z_0 < z \leq z_{\text{far}}$ ситуация аналогична рис. 4, a. При выравнивании масштабов на дальнем плане для z_{far} (рис. 4, c) предметы на изображении всюду меньше ренессансных, но на ближнем плане происходит увеличение размеров поля зрения, которое может достигать больших величин. Следует заметить, что система перцептивной перспективы, формирующая объемное изображение, нарушает формулу Лагранжа – Гельмгольца, но подчиняется психофизическому закону Эммерта [1, 3]. Она увеличивает предметы в сравнении с ренессансными по мере их удаления от наблюдателя и сохраняет при этом неизменным поле зрения.

Таким образом, для перцептивной перспективы на плоскости характерно переменное поле зрения и нарушение интерпозиции предметов. Относительная погрешность интерпозиции для системы перцептивной перспективы на плоскости, достоверно воспроизводящей масштабы предметов, с учетом (17) имеет вид

$$I_M(z) = \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\theta(z)}{\operatorname{tg}\theta}\right] \cdot 100\,\% = \left[1 - \frac{f_r(z)}{f_p(z)}\right] \cdot 100\,\% = M_R(z), \tag{18}$$

где $M_R(z)$ – погрешность масштабов предметов в ренессансной перспективе из (8).

Для перцептивной перспективы на плоскости, достоверно воспроизводящей глубину пространства, относительная погрешность интерпозиции равна относительной погрешности глубины пространства в ренессансной перспективе из (13):

$$I_T(z) = T_R(z) = \left[1 - \frac{f_r(z)}{f_t(z)}\right] \cdot 100\,\%. \tag{19}$$

Суммарные погрешности. На рис. 5 показаны суммарные оценки искажений изображений на плоскости для трех вариантов систем перспектив: ренессансной $[R]$, перцептивной с достоверной глубиной $[P]_T$, перцептивной с достоверным масштабом $[P]_M$. Рис. 5, a соответствует положению картинной плоскости на переднем плане, рис. 5, b – на среднем плане, а рис. 5, c – на дальнем плане. В качестве исходных данных приняты следующие: $d = 6$ м, $z_{\text{near}} = 2$ м, $z_{\text{far}} = \infty$. Графики рассчитаны для $z \geq z_{\text{near}}$, причем в качестве абсцисс взята функция $L(z) = (z - z_{\text{near}})/z$. Графики построены так, чтобы верхняя кривая давала сумму искажений Σ, а внутренняя кривая разбивала эту сумму на две полосы, показывая долю искажений масштаба M, глубины T или интерпозиции I. Четвертый график в каждом ряду показывает во сколько раз суммарные ошибки ренессансной перспективы $[R]$ больше суммарных ошибок перцептивных перспектив $[P]_T$ или $[P]_M$.

Из графиков видно, что разным системам перспектив соответствуют не только разные суммы ошибок (количественная характеристика), но и разный состав этой суммы (качественная характеристика). Так, ренессансная перспектива $[R]$, достоверно передающая интерпозицию предметов, имеет наибольшие суммарные ошибки за счет неверной передачи масштабов и глубины пространства. Перцептивная перспектива $[P]_M$, достоверно передающая масштабы предметов, имеет примерно такую же сумму ошибок за счет не-

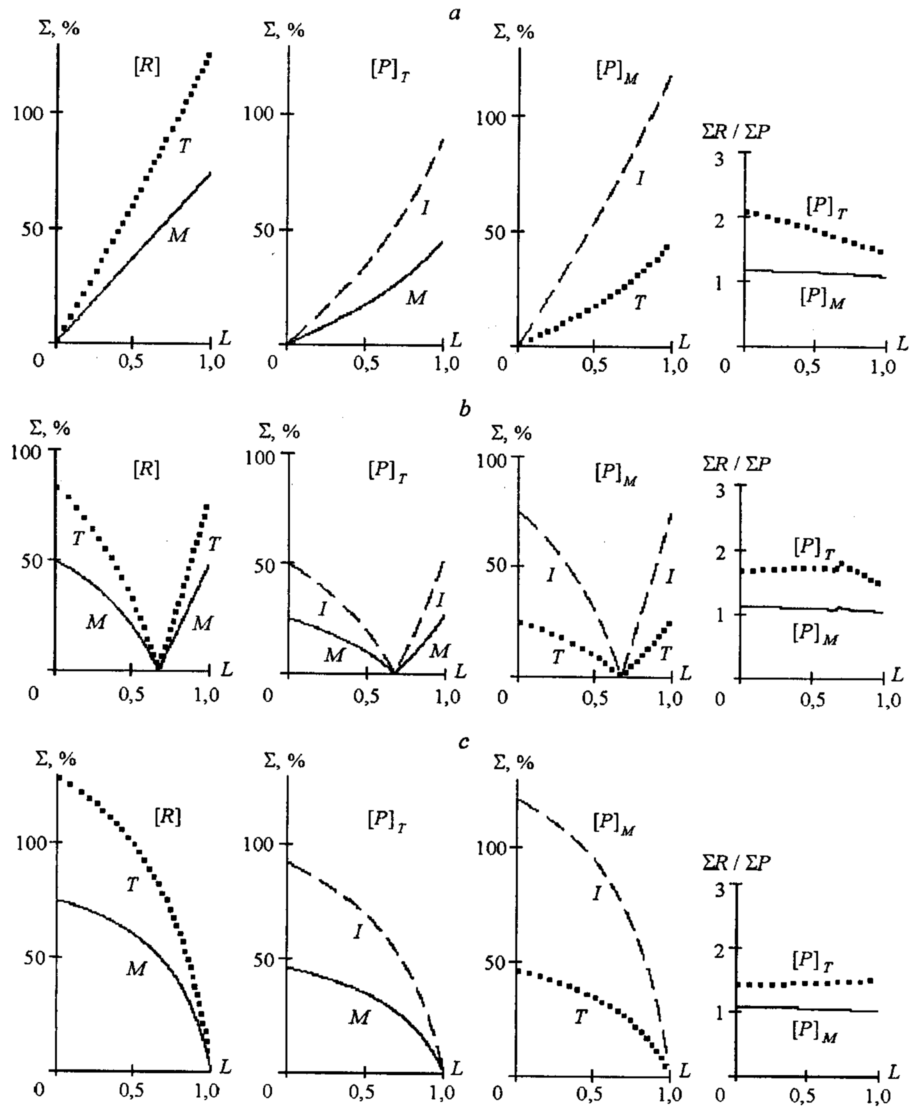

Рис. 5

верной передачи глубины и интерпозиции предметов. Перцептивная перспектива $[P]_T$, достоверно передающая глубину пространства, имеет ошибки масштаба и интерпозиции. С учетом выражений (14), (18) и (19) наблюдается своеобразная ротация–трансформация ошибок при переходе их от одной системы перспективы к другой на основе следующей мнемонической цепочки:

$$[R] \leftrightarrow T_R = I_T \leftrightarrow [P]_T \leftrightarrow M_T = T_M \leftrightarrow [P]_M \leftrightarrow I_M = M_R \leftrightarrow [R].$$

Мнемосхема показывает, что при переходе от перспективы $[R]$ к перспективе $[P]_T$ искажение глубины T_R трансформируется в искажение интерпозиции I_T, но при этом количественно ошибка не меняется. При переходе от $[P]_T$ к где $\Sigma R, \Sigma P_T, \Sigma P_M$ — суммарные ошибки систем перспектив $[R]$, $[P]_T$, $[P]_M$ соответственно. Из (20) следует, что $\Sigma P_T \leq \Sigma R$ и $\Sigma P_T \leq \Sigma P_M$. Условие равенства сумм выполняется только при $\Sigma R = \Sigma P_T = \Sigma P_M = 0$, а знак неравенства «$<$» объясняется тем, что составляющие суммы ΣP_T являются меньшими долями в суммах ΣR и ΣP_M. Последнее легко доказать путем сравнения функций проективного преобразования из (1), (2) и (12). Из рис. 5 видно, что суммарная ошибка перспективы $[P]_T$ примерно в 1,5–2 раза меньше ренессансной $[R]$. Следует обратить внимание и на то, что при положении картинной плоскости на среднем плане (см. рис. 5, *b*) перспектива $[P]_T$ обладает минимальными искажениями как по интерпозиции, так и по масштабу (примерно по 25 % на переднем и заднем планах).

Примеры изображений на картинной плоскости, расположенной на среднем плане. На рис. 6 даны изображения одной и той же сцены, с одним и

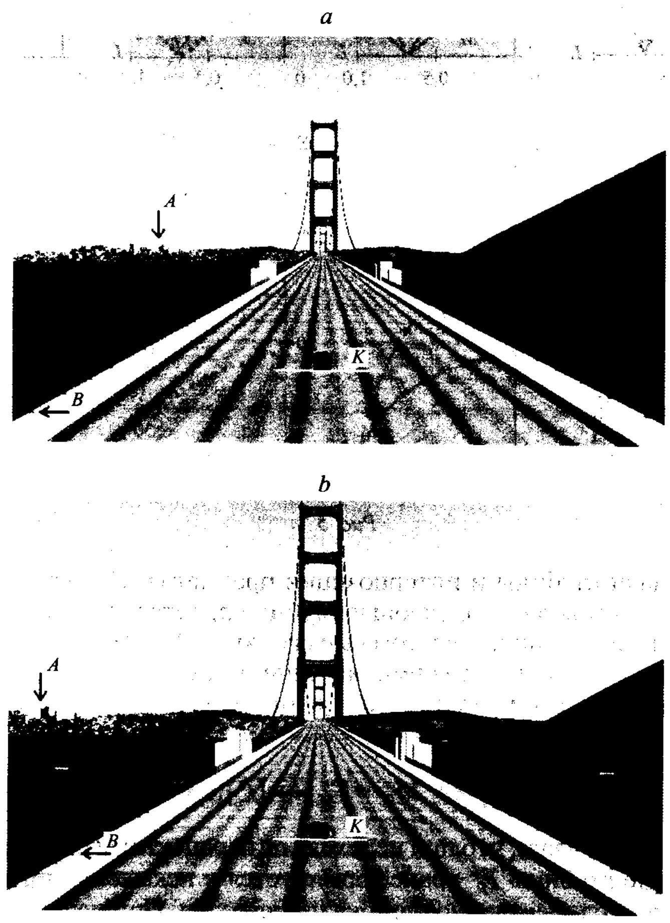

Рис.6

тем же положением в пространстве центра и главного луча проекции, при одинаковых угловых размерах картины. На рис. 6, *а* показана ренессансная, а на рис. 6, *b* перцептивная перспектива. Картинная плоскость *К* установлена на среднем плане сцены и совмещена с передней вертикальной стенкой ящика. Размеры ящика на обеих картинах одинаковы. Одинаковы и расстояния от ящика до горизонта. В остальном картины отличаются. В перцептивной перспективе на дальних планах заметно увеличиваются размеры предметов. Предметы приближаются к наблюдателю, и часть из них выходит из поля зрения. Это эквивалентно уменьшению эффективного поля зрения по мере увеличения расстояния до предметов. Наоборот, на малых расстояниях размеры предметов уменьшаются, и поэтому ранее невидимые предметы в ренессансной перспективе (фонари на ближнем плане) появляются в перцептивном изображении. Поле зрения на малых расстояниях оказывается увеличенным. Таким образом, для перцептивной перспективы характерно переменное поле зрения, т. е. большое на малых расстояниях и малое вдали, и переменное линейное увеличение, т. е. малое на малых расстояниях и большое вдали. Качественно изменение масштабов предметов и поля зрения можно оценить по меткам *А* и *В*, нацеленным на разные по удалению от картинной плоскости *К* предметы.

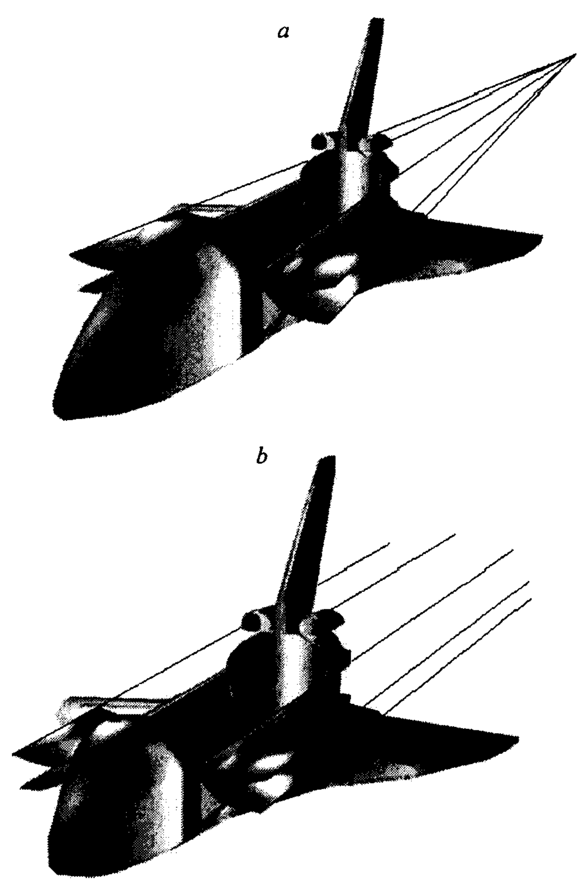

Рис. 7

Рис. 7 иллюстрирует изменение пространства предметов в ближней от наблюдателя зоне. Показано ренессансное (рис. 7, *a*) и перцептивное (рис. 7, *b*) изображения модели самолета, которая расположена на небольшом расстоянии от центра проекции. Картинная плоскость *K* пересекает модель в районе крыла, где масштабы деталей выравнены. На рис. 7, *b* носовая часть модели уменьшена, а хвостовая часть несколько увеличена по сравнению с изображением на рис. 7, *a*. Произошло это потому, что на малых расстояниях перцептивная перспектива приблизилась к аксонометрии. Подтверждением последнего является изображение добавленных параллельных линий на рисунке. Если в ренессансном изображении уже в пределах рисунка обнаружилась точка схода этих линий, то в перцептивном изображении линии остаются практически параллельными.

Заключение. В работе рассмотрены три системы перспективы, каждая из которых сохраняет на плоской картине подобие или форму предметов и, кроме того, воспроизводит неискаженно еще одну из качественных характеристик зрительно воспринимаемого пространства. Классическая ренессансная перспектива достоверно передает интерпозицию предметов в пространстве. Один из вариантов перцептивной перспективы сохраняет на плоском изображении соотношение масштабов предметов. Другой вариант правильно изображает пространственную глубину предметов. Безошибочная передача всех качественных характеристик перцептивного пространства на плоском изображении в рамках одной перспективной системы невозможна. Численная оценка искажений показывает, что наибольшими суммарными погрешностями обладает ренессансная перспектива, в основе которой лежит геометрическая оптика. Наименьшими искажениями обладает вариант перцептивной перспективы, достоверно передающий глубину пространства. Суммарная ошибка изображений в такой перспективе в 1,5–2 раза меньше, чем в классической ренессансной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалев А. М.** О визуально воспринимаемом пространстве предметов // Автометрия. 2003. **39**, № 6. С. 3.
2. **Раушенбах Б. В.** Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы. М.: Наука,1986.
3. **Зенкин Г. М., Петров А. П.** О механизмах константности зрительного восприятия пространства // Сенсорные системы. Л.: Наука, 1979.
4. **Ковалев А. М.** Об увеличении предметов в перцептивном пространстве // Автометрия. 2002. **38**, № 5. С. 86.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: kovalev@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
5 февраля 2004 г.