

мещение мембраны  $x_* = V_0/s(1 - \psi_*) = 0,861V_0/s$ , что с погрешностью  $\sim 1\%$  совпадает с (9).

Поступила в редакцию  
9/X 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Эльнатов. Канд. дис. ГИАП, 1972.
2. Е. В. Герц, Г. В. Крейнин. Расчет пневмоприводов. М., Машиностроение, 1975.
3. Б. А. Иванов. Физика взрыва ацетилена. М., Химия, 1969.

### ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

П. П. Лазарев, А. С. Плешанов  
(Москва)

В рамках трактовки фронта пламени как гидродинамического разрыва в идеальной несжимаемой среде в [1, 2] показана абсолютная устойчивость фронта пламени по отношению к малым длинноволновым периодическим возмущениям его формы. Высказывалось предположение, что роль стабилизирующего фактора может играть зависимость нормальной скорости от кривизны фронта [3, 4]. Имеются экспериментальные данные, подтверждающие такую зависимость [5, 6] (см. там же библиографию). Можно показать, что такого рода зависимость эквивалентна введению некоторого поверхностного натяжения фронта  $\alpha \sim j(u_2 - u_1)\delta_t$ , где при обозначениях [3]  $\delta_t = \chi/u_1$  — тепловая ширина фронта. Согласно [2, 3], учет  $\alpha$  может приводить к стабилизации. С другой стороны, учет только диффузионно-тепловой природы пламени при невозмущенной гидродинамической картине течения в рамках приближенного анализа [7] давал тенденцию к устойчивости. В дальнейшем результаты [7] обобщены в [8] в рамках разложения по  $Re^{-1}$  вблизи решения [2] (учитывался член, пропорциональный  $Re^{-1}$ ). В [9, 10] показано, что можно получить точное решение характеристического уравнения задачи как в модельном предположении [7] о величине нормального потока массы  $j$ , так и в случае точного выражения для вариации  $\delta_j$  при исчезающем перепаде плотностей.

В данной работе диффузионно-тепловая задача объединяется с гидродинамической при произвольном перепаде плотностей и учете зависимости нормальной скорости пламени от кривизны его фронта. Исследование проводится в приближении Буссинеска, т. е. при уравнении состояния

$$\rho T = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура. Возмущения предполагаются малыми — линейная теория, что позволяет считать все коэффициенты переноса и теплоемкость постоянными и не учитывать корреляционные члены типа термодиффузии и диффузионной теплопроводности; теория также линейна относительно малого параметра кинетики Зельдовича  $RT/E$ , где  $E$  — энергия активации реакции горения (возможное обобщение приводится в [9]). Пламя предполагается плоским и свободным, т. е. не учитывается влияние стенок и силы тяжести, и речь идет, таким образом, о внутренней устойчивости самого пламени. В остальном параметры за-

дачи (в частности, числа Прандтля Pr, Льюиса Le и Рейнольдса Re) произвольны.

**Решение дисперсионных уравнений.** Из уравнений неразрывности

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

и энергии

$$\rho dT/dt = (\kappa/c_p)\Delta T, \quad (3)$$

учитывая (1), в плоском случае получим для компонент скорости ( $\alpha = \kappa/(\rho c_p T)$ )

$$u = \alpha T_x + \psi_y, \quad v = \alpha T_y - \psi_x. \quad (4)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $c_p$  — теплоемкость при  $p = \text{const}$ ;  $\psi$  — обобщенная функция тока; индексы означают дифференцирование. Из (4) следует

$$D \equiv \operatorname{div} \vec{v} = \alpha \Delta T, \quad R = (\operatorname{rot} \vec{v})_z = -\Delta \psi. \quad (5)$$

Уравнения движения записываются в общем виде [3]

$$\begin{aligned} \rho du/dt + (p - 4/3\eta D)_x + \eta R_y &= 0, \\ \rho dv/dt + (p - 4/3\eta D)_y - \eta R_x &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $p$  — давление;  $\eta$  — коэффициент вязкости. И наконец, уравнение диффузии относительно концентрации  $c$  имеет вид

$$\rho dc/dt = \rho D \Delta c, \quad (7)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии и, как обычно,  $\rho D = \text{const}$ . Запишем стационарные одномерные уравнения

$$\begin{aligned} j_x = (\rho u)_x = 0, \quad jT_x = (\kappa/c_p)T_{xx}, \\ ju_x + (p - 4/3\eta u_x)_x = 0, \quad jc_x = \rho Dc_{xx} \end{aligned} \quad (8)$$

и уравнения относительно малых возмущений, обозначаемых штрихами:

$$\begin{aligned} \rho'/\rho + T'/T &= 0, \\ \rho'_t + j'_x + (\rho v')_y &= 0, \\ \rho T'_t + jT'_x + j'T_x &= (\kappa/c_p)\Delta T', \\ \rho u'_t + ju'_x + j'u_x + P'_x + \eta R'_y &= 0, \\ \rho v'_t + jv'_x + P'_y - \eta R'_x &= 0, \\ \rho c'_t + jc'_x + j'c_x &= \rho D\Delta c', \end{aligned} \quad (9)$$

где  $j' = \rho u' + \rho' u$ ;  $P' = p' - 4/3\eta D'$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} u' = \alpha T'_x + \psi'_y, \quad v' = \alpha T'_y - \psi'_x, \\ D' = \alpha \Delta T', \quad R' = -\Delta \psi'. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения стационарных уравнений (8) имеют вид

$$\begin{aligned} T_1/T_0 \equiv \bar{T}_1 = 1 - \varepsilon (1 - e^{l_t x}), \\ qc_1/c_p T_0 \equiv \bar{c}_1 = \varepsilon (1 - e^{l_c x}), \\ T_2 = T_0, \quad c_2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varepsilon = (T_0 - T_{-\infty})/T_0 < 1$ ;  $l_t = u_0/\chi$  ( $\chi = \kappa/\rho c_p$ );  $l_c = u_0/D$ ; индексы  $\alpha = 1, 2$  относятся к свежей смеси и продуктам сгорания соответственно, 0 — к состоянию при  $x = 0$ . В (11) использован закон сохранения энергии

$$c_p(T_0 - T_{-\infty}) = qc_{-\infty},$$

где  $q$  — тепловой эффект реакции горения. С учетом (11) получим разложение ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \bar{T}'_1 &= \sum_k \bar{T}'_{1,k} \varepsilon^k, & \bar{c}'_1 &= \sum_k \bar{c}'_{1,k} \varepsilon^k, \\ \bar{T}'_2 &= \bar{T}'_{2,1} \varepsilon, & \bar{c}'_2 &= \bar{c}'_{2,1} \varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

и аналогичные разложения для  $\psi'_\alpha$  и  $p'_\alpha$ .

Пусть возмущение нормальной координаты фронта пламени  $\xi'$  пропорционально  $\exp(iky + \Omega t)$ , где  $k = 2\pi/\Lambda$  — волновое число ( $\Lambda$  — длина волны) и  $\Omega = -i\omega$  ( $\omega$  — частота). Тогда искомые дисперсионные уравнения для  $\bar{\psi}'_1 = k\psi'_1/u_0$  и  $\bar{T}'_1$  в функции  $\bar{x} = kx$  имеют вид (черточки опущены)

$$\left(\frac{\Delta}{w_t} - D - \frac{z}{T_1}\right) T'_1 = \frac{T_{1x}}{T_1} \left[\left(\frac{D}{w_t} - 1\right) T'_1 + i\psi'_1\right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{w_r} - D - \frac{z}{T_1}\right) \Delta i\psi'_1 &= -\frac{T_{1x}}{T_1} \left[\left(\frac{D}{w_t} - 1\right) T'_1 + i\psi'_1\right] - \\ &- z \frac{T_{1x}}{T_1^2} \left(\frac{1}{w_t} T'_1 + D i\psi'_1\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $D = d/dx$ ,  $\Delta = D^2 - 1$ ;  $w_{t,r} = l_{t,r}/k$  ( $l_r = j/\eta$ );  $z = \Omega/u_0 k$ , при этом  $T_{1xx} = w_i T_{1x}$ . Из (13), (14) следует основное уравнение для  $T'_1$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \left(\frac{\Delta}{w_r} - D - \frac{z}{T_1}\right) \Delta + \frac{T_{1x}}{T_1} \left(\frac{z}{T_1} D + 1\right) \right] \left[ \frac{T_1}{T_{1x}} \left(\frac{\Delta}{w_t} - D - \frac{z}{T_1}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{D}{w_t} - 1\right) \right] + \frac{T_{1x}}{T_1^2} \left(\frac{D}{w_t} - 1 + \frac{1}{w_t} \frac{z}{T_1}\right) \right\} T'_1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Это дифференциальное уравнение 6-го порядка с переменными коэффициентами. Можно показать, что при  $\text{Pr} = 1$  оно приводится к самосопряженной форме (см., например, [11]) и, следовательно, допускает вариационную формулировку.

При  $\text{Pr} = \varepsilon = 1$  и  $z = 0$  (15) имеет вид

$$(\Delta - wD)^3 T'_1 = 0, \quad (16)$$

решение которого

$$T'_1 = (T'_{10} + T'_{11}x + T'_{12}x^2) e^{w_1 x}, \quad (17)$$

где  $T'_{1k}$  — постоянные интегрирования и  $w_1 < 0$ , удовлетворяет уравнению

$$w_1^2 - ww_1 - 1 = 0.$$

Для функции тока из (13) имеем

$$i\psi'_1 = \frac{1}{w^2} [(D - w)^2 - 1] T'_1. \quad (18)$$

При  $\text{Pr} = 1$ ,  $z = 0$  и произвольном  $\varepsilon$  можно показать, что решение (5) выражается через гипергеометрические функции. Аналогичный результат получается и при  $\text{Pr} = \text{Le} = \varepsilon = 1$  и произвольном  $z$ . Все это не случайно и, как показывается ниже, точное решение системы (13), (14) получается в рамках глубокого обобщения известных рекуррентных формул для гипергеометрических рядов.

Представим (13), (14) в виде

$$L_1 \varphi_1 = e^{\alpha x} (L_{11}^1 \varphi_1 + L_{12}^1 \varphi_2), \quad (19)$$

$$L_2 \varphi_2 = e^{\alpha x} (L_{21}^1 \varphi_1 + L_{22}^1 \varphi_2) + e^{2\alpha x} (L_{21}^2 \varphi_1 + L_{22}^2 \varphi_2), \quad (20)$$

где  $\varphi_1 = T_1'$ ;  $\varphi_2 = i\psi_1'$ ;  $\alpha = w_t$ . Линейные операторы с постоянными коэффициентами  $L$  имеют вид ( $\mu = 1 - \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} L_1 &= \mu [D^2 - w_t D - (1 + w_t z_1)], \\ L_{11}^1 &= -\varepsilon [(D - w_t)^2 - 1], \\ L_{12}^1 &= \varepsilon w_t^2; \\ L_2 &= \mu^2 [D^2 - w_r D - (1 + w_r z_1)] \Delta(D), \\ L_{21}^1 &= -\varepsilon \mu w_r (D - w_t + z_1), \\ L_{22}^1 &= -\varepsilon \mu \{ [2(D^2 - w_r D - 1) - w_r z_1] \Delta(D) + w_r w_t (z_1 D + 1) \}, \\ L_{21}^2 &= -\varepsilon^2 w_r (D - w_t), \\ L_{22}^2 &= -\varepsilon^2 [(D^2 - w_r D - 1) \Delta(D) + w_r w_t]. \end{aligned} \quad (21)$$

Ищем решения (19), (20) в виде ( $m = t, a, r$ )

$$\varphi_1 = \sum_m \varphi_m^0 \sum_k \kappa_{1m,k} e^{\lambda_{m,k-1} x}, \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \sum_m \varphi_m^0 \sum_k \kappa_{2m,k} e^{\lambda_{m,k-1} x}, \quad (23)$$

где  $\lambda_{m,k-1} = \lambda_m + (k-1)\alpha$ ,  $\lambda_m$  определяются из уравнений

$$L_1(\lambda_t) = \Delta(\lambda_a) = L_2(\lambda_r) = 0$$

и являются температурной, акустической и вихревой компонентами соответственно;  $\varphi_m^0$  — постоянные интегрирования. Для коэффициентов  $\kappa$  имеем соотношения

$$\begin{aligned} \kappa_{1t,1} &= \varepsilon, \quad \kappa_{1a,1} = \kappa_{1r,1} = 0, \\ \kappa_{2t,1} &= 0, \quad \kappa_{2a,1} = \kappa_{2r,1} = \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{1m,k+1} &= \frac{1}{L_1(\lambda_{m,k})} [L_{11}^1(\lambda_{m,k-1}) \kappa_{1m,k} + L_{12}^1(\lambda_{m,k-1}) \kappa_{2m,k}] \quad (k \geq 1), \\ \kappa_{2m,2} &= \frac{1}{L_2(\lambda_{m,1})} [L_{21}^1(\lambda_m) \kappa_{1m,1} + L_{22}^1(\lambda_m) \kappa_{2m,1}], \\ \kappa_{2m,k+1} &= \frac{1}{L_2(\lambda_{m,k})} [L_{21}^1(\lambda_{m,k-1}) \kappa_{1m,k} + L_{22}^1(\lambda_{m,k-1}) \kappa_{2m,k} + \\ &\quad + L_{21}^2(\lambda_{m,k-2}) \kappa_{1m,k-1} + L_{22}^2(\lambda_{m,k-2}) \kappa_{2m,k-1}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично представим возмущенное уравнение диффузии (9) в виде

$$L_3 \varphi_3 = e^{\beta x} (L_{31}^1 \varphi_1 + L_{32}^1 \varphi_2) + e^{\alpha x} L_{33}^1 \varphi_3, \quad (25)$$

где  $\varphi_3 = c_1'$ ;  $\beta = w_c$ ;

$$\begin{aligned} L_3 &= \mu [D^2 - w_c D - (1 + w_c z_1)]; \\ L_{31}^1 &= -\varepsilon \frac{w_c^2}{w_t} (D - w_t); \\ L_{32}^1 &= -\varepsilon w_c^2; \quad L_{33}^1 = -\varepsilon (D^2 - w_c D - 1). \end{aligned} \quad (26)$$

Ищем решение (25)

$$\varphi_3 = \sum_m \varphi_m^0 \sum_k \kappa_{3m,k} e^{(\lambda_{m,k-1} + \beta)x} + \varphi_3^0 \sum_k \kappa_{3c,k} e^{\lambda_{c,k-1} x}. \quad (27)$$

где  $\lambda_c$  определяется из уравнения

$$L_3(\lambda_c) = 0$$

и является диффузионной компонентой. Для коэффициентов имеем соотношения

$$\begin{aligned} \kappa_{3m,1} &= \frac{1}{L_3(\lambda_m + \beta)} [L_{31}^1(\lambda_m) \kappa_{1m,1} + L_{32}^1(\lambda_m) \kappa_{2m,1}], \\ \kappa_{3m,k+1} &= \frac{1}{L_3(\lambda_{m,k} + \beta)} [L_{31}^1(\lambda_{m,k}) \kappa_{1m,k+1} + L_{32}^1(\lambda_{m,k}) \kappa_{2m,k+1} + \\ &\quad + L_{33}^1(\lambda_{m,k-1} + \beta) \kappa_{3m,k}], \\ \kappa_{3c,1} &= \varepsilon, \\ \kappa_{3c,k+1} &= \frac{1}{L_3(\lambda_{c,k})} L_{33}^1(\lambda_{c,k-1}) \kappa_{3c,k}. \end{aligned} \quad (28)$$

По поводу вида решений (22), (23), (27) заметим, что хотя данная теория линейна по амплитуде возмущения фронта, тем не менее в силу неоднородности исходных распределений всех величин в свежей смеси имеет место взаимное влияние возмущений, линейное по их амплитудам, что отражается в суммировании по постоянным интегрирования  $\varphi^\circ$ . Отметим также, что используемые представления операторов  $L_{1,2,3}$  исключают появление секулярных членов вида  $x^k e^{\lambda x}$  и сводят вычисление коэффициентов  $\kappa$  к алгебраическим операциям. При этом требование отсутствия секулярных членов однозначно определяет вид этих операторов независимо от выбора масштаба  $T_1$ .

Уравнения для  $w_{n\alpha}$  ( $w_{n1} = \lambda_{n1}$ ) и для  $w_{\alpha\alpha}$  ( $w_{\alpha 1} = \lambda_{\alpha 1}$ ) имеют вид ( $n = t, r, c$ )

$$z_\alpha + w_{n\alpha} = (w_{n\alpha}^2 - 1)/w_{n\alpha}, \quad (29)$$

$$w_{\alpha\alpha}^2 - 1 = 0. \quad (30)$$

Из представлений

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad w_{n\alpha} = u_{n\alpha} + iv_{n\alpha}$$

и уравнений (29) имеем

$$u_{n\alpha} = w_n/2 \cdot [1 + (-1)^{\alpha+1} v_{n\alpha}], \quad v_{n\alpha} = (-1)^{\alpha+1} \cdot y_\alpha/v_{n\alpha}, \quad (31)$$

где  $v_{n\alpha} = \sqrt{p_{n\alpha} + \sqrt{p_{n\alpha}^2 + q_{n\alpha}}}$ ;  $p_{n\alpha} = 1/2[1 + (2/w_n)^2 + 4x_\alpha/w_n]$ ,  $q_{n\alpha} = (2y_\alpha/w_n)^2$ . Кроме того,

$$w_{\alpha\alpha} = (-1)^{\alpha+1}. \quad (32)$$

Знаки в (31), (32) выбраны так, чтобы при  $\text{Re } z_\alpha = x_\alpha = 0$ , когда  $v_{n\alpha} > 1$ , имело место  $u_{n1} > 0$  и  $u_{n2} < 0$ , что необходимо для невозрастания возмущений по мере удаления их от фронта. Последние условия при  $x_\alpha \leq 0$  соблюдаются при  $v_{n\alpha} \geq 1$ , что приводит к

$$-(y_\alpha^2 + 1)/w_{n\alpha} \leq x_\alpha \leq 0.$$

Если же  $v_n < 1$ , то в среду 2 не идет ни одного возмущения, а в среду 1 два. Для диффузионных возмущений, которые существуют только в среде 1, это означало бы появление лишнего решения, что трактовалось в [10] как неэволюционная неустойчивость. На самом деле при  $v_c < 1$  возмущения не являются монотонными функциями координаты и не представимы экспоненциальными функциями. Доказательство этого фактора можно провести аналогично исследованию решения модельной задачи Коши для уравнения

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \beta u_x + \gamma u$$

с условиями  $u(x, 0) = 0$  при  $-\infty < x < 0$  и  $u(0, t) = e^{\delta t}$  при  $t > 0$ . Это

уравнение заменой  $u = e^{\lambda + \mu x} v$  сводится к обычному уравнению теплопроводности

$$v_t = \alpha^2 v_{xx}$$

при условиях  $v(x, 0) = 0$  и  $v(0, t) = e^{\nu t}$ . Здесь  $\lambda = \gamma - (\beta/2\alpha)^2$ ;  $\mu = -\beta/(2\alpha^2)$ ;  $\nu = \delta - \lambda$ . Решение имеет вид (см., например, [12])

$$v = e^{\nu t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2\alpha\sqrt{t})}^{\infty} \exp \left[ -\eta^2 - \left( \frac{x}{2\alpha} \right)^2 \frac{\nu}{\eta^2} \right] d\eta. \quad (33)$$

При  $\nu > 0$   $t \rightarrow \infty$  оно стремится к асимптотическому выражению  $v = e^{\sqrt{\nu x}/\alpha + \nu t}$ , которое, таким образом, есть единственное решение задачи без начальных условий. Однако при  $\nu < 0$ , что соответствует обсуждаемой ситуации  $\nu_c < 1$ , решение при  $t \rightarrow \infty$  не является экспоненциальным и монотонным. Последнее следует из выражения

$$v_x(0, t) = -\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} \left( 2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{\eta^2} d\eta - 1 \right),$$

где  $\xi = \sqrt{\nu - \nu t}$ , которое при достаточно больших  $\xi$  отрицательно. Таким образом, при  $\nu_c < 1$  решения по-прежнему устойчивы, хотя и немонотонны.

Устойчивые (затухающие —  $\text{Re } z < 0$ ) решения могут быть нескольких типов: 1) монотонные аperiodические ( $\text{Im } z = 0$ ) (область I) и осциллирующие ( $\text{Im } z \neq 0$ ) (II); 2) немонотонные (III). Для определения общей области устойчивых решений достаточно найти границу 0, где  $\text{Re } z = -\text{Im } z = 0$ , и границу 1, где  $\text{Re } z = 0$ ,  $\text{Im } z \neq 0$ .

**Граничные условия.** Возмущения, естественно, затухают на бесконечном удалении от фронта. На фронте пламени выполняются граничные условия для возмущений [2, 7] (в размерном виде)

$$\{\delta T\} = 0, \quad (34)$$

$$\{\delta c\} = 0, \quad (35)$$

$$\{x(\delta T)_x + q\rho D(\delta c)_x\} = 0, \quad (36)$$

$$\left\{ \frac{\delta j}{j} \right\} \equiv \left\{ \frac{\delta u}{u_0} - \frac{T'}{T_0} \right\} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\delta j}{j} = \frac{1}{2} \bar{E} \frac{\delta T}{T_0} - a \delta_i \xi'_{yy}, \quad (38)$$

$$\{(p' + 2j\delta u + \rho'u^2) - \eta(2u'_x - 2/3D')\} = 0, \quad (39)$$

$$\{\delta v\} = 0, \quad (40)$$

$$\{\eta(v'_x + u'_y)\} = 0, \quad (41)$$

где  $\{f\} = f_2 - f_1$ ,  $\bar{E} = E/RT_0$  и  $a \sim 1$  — числовой коэффициент. Эти условия выражают непрерывность  $T$  (34),  $c$  (35), потока энергии (36), потока массы (37), нормальной компоненты тензора потока импульса (39), тангенциальной компоненты скорости (40) и касательного напряжения (41). Вариации учитывают неоднородность стационарных распределений в среде 1 ( $\delta T$ ,  $\delta c$ ) и возмущение поверхности фронта ( $\delta u$ ,  $\delta v$ )

$$\delta T_1 = T'_1 + T_{1x}\xi', \quad (\delta T_1)_x = T'_{1x} + T_{1xx}\xi',$$

$$\delta u_\alpha = u'_\alpha - \xi'_i, \quad \delta v_\alpha = v'_\alpha + u_\alpha \xi'_y.$$

Условия (39), (41) выписаны в системе координат, связанной с фронтом. Условие (38) учитывает аррениусовскую зависимость  $j$  от  $T$  и включает зависимость  $j$  от кривизны фронта по Зельдовичу.

Выписанные граничные условия в предположении кинетики Зельдовича ( $E \gg 1$ ) соответствуют трактовке фронта пламени как слабого разрыва, на котором все величины непрерывны, а их первые производные терпят разрыв. Характеристическое уравнение для  $z_1$  получается из системы условий (34)–(41) исключением пяти возмущений и получением трех линейных уравнений относительно  $i\psi_{a1}$ ,  $i\psi_{r1}$  и  $\zeta'$  (символ  $\wedge$  означает амплитуду).

### Расчет и обсуждение результатов

Сначала произведены расчеты при малом изменении плотности, когда течение является потенциальным.

На рис. 1 в переменных  $E - Pe$  (число Пекле определяется по длине волны:  $Pe = u_0 \Lambda / \chi = 2\pi w_i$ ) нанесена граница 0 между областью неустойчивости 0 и областью устойчивости 1 (область 1 над или слева от границы 0) в зависимости от величины  $a/\varepsilon$ . Этот график иллюстрирует коротковолновый характер поправки на зависимость нормальной скорости пламени от кривизны его фронта.

На рис. 2 в тех же переменных нанесена та же граница в зависимости от числа Льюиса  $Le = D/\chi$  при  $a/\varepsilon = 10$ , что может соответствовать случаю  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . Видно, что при  $Le < 1$  область устойчивости больше.

На рис. 3 при  $Le < 1$  представлены все области устойчивости (заштрихованы) и их границы. Помимо внешних границ области устойчивости (0 и 1) приведены внутренние границы, из которых граница 2 отделяет область I и граница 3 — область II. Между границами 2 и 3 лежит область III. Обращаем внимание на то, что при  $E \sim 10$  критическое значение  $Pe \approx 100$  (на границе 0). Зависимость  $\bar{E}$  от  $Pe$  при  $Le > 1$  (рис. 4) соответствует аналогичной зависимости при  $Le < 1$  и  $\bar{E} < 0$  (см. рис. 3). И наконец, на рис. 5 показано аналогичное разбиение диаграммы  $E - Le$  при заданном  $Pe$ .

При малых  $\varepsilon$  нетрудно получить асимптотическое выражение границы 0 при  $Pe \rightarrow \infty$

$$\bar{E} \approx 1/(1 - Le) \cdot [Pe/2\pi - (1 + 2a/\varepsilon)] - 1, \quad (42)$$

так что с ростом  $\varepsilon$  область устойчивости должна уменьшаться. Затем сделаны расчеты при произвольном изменении плотности, когда течение вихревое.

Построение решений дисперсионных уравнений (13), (14) по формулам (22)–(28) производится в комплексных плоскостях  $z_1$  и  $w_{na}$  с по-

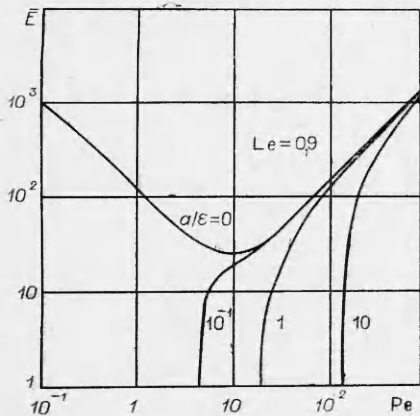


Рис. 1.

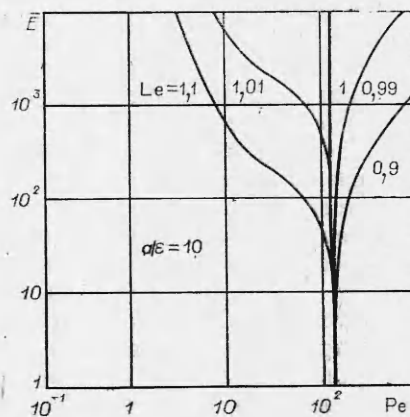


Рис. 2.



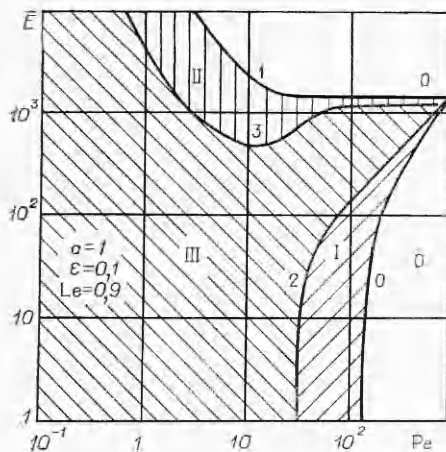


Рис. 3.

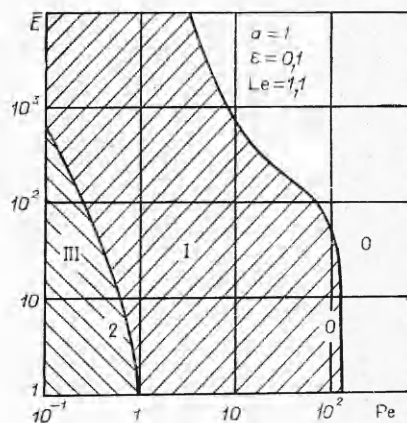


Рис. 4.

мощью выражений (29)–(32). На каждом этапе выделяются действительная и мнимая части всех величин при многократном использовании формул умножения и деления комплексных чисел. Эта процедура чрезвычайно громоздка. Положение осложняется тем, что, как нетрудно показать, радиус сходимости рядов (22), (23), (27) по аргументу  $\varepsilon/\mu$  равен 1, т. е. критическое значение  $\varepsilon_* = 0,5$ , в то время как реальным пламенам соответствуют значения  $\varepsilon \geq 0,7$ . Расходящиеся ряды (22), (23), (27) при  $\varepsilon \geq 0,5$  суммировались обобщенно. Использовались линейный регулярный метод Бореля [13] и нелинейное преобразование Шенкса [14]. Первостепенное значение в столь сложном расчете имеет контроль вычислений, в качестве которого использовалось необходимое выполнение предельных сравнительно легко рассчитываемых ситуаций при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $Pr = \varepsilon = 1$ ,  $z = 0$ . Обобщенные методы суммирования Бореля и Шенкса проверены на расходящихся геометрических знакопеременных прогрессиях вида  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^l q^k$  при  $q = 4$  ( $\varepsilon = 0,8$ ) и  $q = 9$  ( $\varepsilon = 0,9$ ) и  $l = 1, 2, 3$ . Эти прогрессии моделируют поведение рядов (22), (23), (27) при больших номерах членов. Варьировалось как число членов рядов  $N$  ( $N \leq 50$ ), так и значение вспомогательной величины  $x$  в методе Бореля ( $x \leq 15$ ). Совпадение значений вычисленных сумм с известными результатами [13] хорошее.

Расчеты проводились при  $a = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 0,9$  и  $\varepsilon = 0,1; 0,3; 0,5; 0,6$ . Выбор значения  $Pr = 1$  не принципиален (это значение удобно тем, что для него при  $\varepsilon = 1$  есть решение (17), (18)). На рис. 6 нанесены внешние границы области устойчивости 0 и 1 (граница 1 при  $\varepsilon = 1$  получена путем экстраполяции). Видно, что с ростом  $\varepsilon$ , т. е. с увеличением перепада плотностей, область устойчивости в согласии с (42) уменьшается. При реальном значении  $E \sim 10$  пламя неустойчиво при  $Pe \geq 25$ , что соответствует приведенному значению  $w_i = u_0/\chi k \approx 4$ .

Окончательный вывод проведенного анализа таков: несмотря на учет всех диссипативных процессов и зависимости нормальной скорости пламени от кривизны его фронта, ламинарное пламя обладает длинноволновой неустойчивостью в рамках развитой линейной теории, т. е. имеет место предельный переход к неустойчивости Ландау. Таким образом, устойчивость реального пламени может достигаться либо на нелинейном уровне, либо за счет учета двумерных эффектов влияния стенок трубы.

В заключение отметим, что взаимное влияние возмущений, о котором шла речь выше, оказывается весьма существенным в длинноволно-



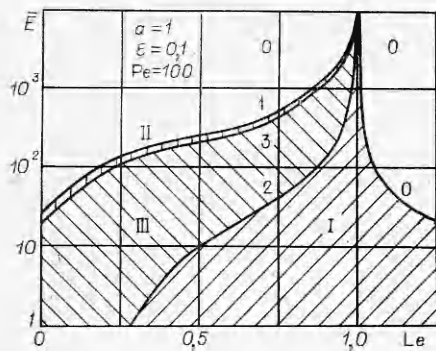


Рис. 5.

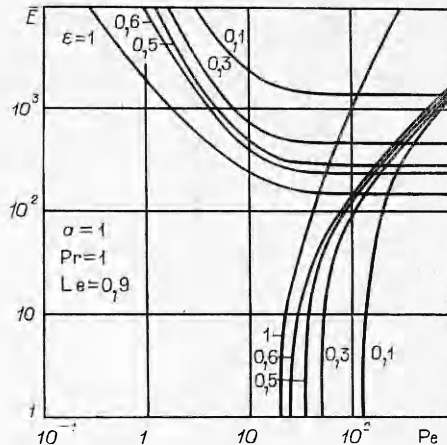


Рис. 6.

вой ситуации. Отношения амплитуд возмущений температуры, функции тока и концентрации к амплитуде фронта можно разделить на температурную, акустическую, вихревую и концентрационную (для  $c_1$ ) части. Из расчетов можно сделать следующие выводы: 1) при малых  $Re$  из гидродинамических возмущений определяющими являются вихревые возмущения, а при больших  $Re$  — акустические, причем в длинноволновой ситуации перенос тепла и вещества акустическими возмущениями сравним с переносом тепла теплопроводностью и вещества — диффузией, в то время как в коротковолновой ситуации вклад вихревых возмущений в эти процессы переноса значительно меньше; 2) по мере роста перепада плотностей (увеличение  $\epsilon$ ) вклад акустических возмущений возрастает; 3) вклад температурных возмущений в гидродинамические возмущения заметен лишь при малых  $Re$ . Эти выводы могут быть полезны в исследованиях по интенсификации тепло- и массообмена в движущихся средах с неоднородными распределениями температуры и концентрации.

Поступила в редакцию  
24/III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Dargieus. La Mecanique des fluides Paris, Dunod, 1941.
2. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1944, 14, 240.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
4. Нестационарное распространение пламени. Под ред. Д. Г. Маркштейна. М., Мир, 1968.
5. В. Иост. Горение, пламя и взрывы в газах. М., 1952.
6. В. С. Бабкин, И. Л. Кузнецов, Л. С. Козаченко. Докл. АН СССР, 1962, 146, 3.
7. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4.
8. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. ПММ, 1966, 30, 3.
9. П. П. Лазарев, А. С. Плешанов. ФГВ, 1976, 12, 4.
10. П. П. Лазарев, А. С. Плешанов. ФГВ, 1977, 13, 2.
11. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ, 1951.
12. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
13. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951.
14. D. Shanks. J. Math. and Phys., 1955, 34, 1.