

УДК 519.62

Численное решение прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования с применением адаптивных вычислительных сеток

С.Н. Скляр¹, О.Б. Забинякова^{1,2}

¹Американский университет в Центральной Азии, ул. А. Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научная станция Российской академии наук в г. Бишкеке, Бишкек, 720049

E-mails: sklyar51@gmail.com, sklyar_s@auca.kg (Скляр С.Н.), perah.92@inbox.ru, zabinyakova_o@auca.kg (Забинякова О.Б.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 17, 2024.

Скляр С.Н., Забинякова О.Б. Численное решение прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования с применением адаптивных вычислительных сеток // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 3. — С. 349–364.

В работе рассматривается имплементация алгоритма построения адаптивной вычислительной сетки в численное решение прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования (задачи Тихонова–Каньяра) методом локальных интегральных уравнений, предложенным авторами ранее. Конструирование адаптивной вычислительной сетки основано на геометрических принципах, рассматривающих оптимизацию кусочно-постоянного интерполянта аппроксимируемой функции электрической проводимости среды. Проведены численные эксперименты для исследования и иллюстрации эффективности комбинированного метода. Апробация осуществлялась на модели Като–Кикучи с известным точным решением.

DOI: 10.15372/SJNM20240307

EDN: IFJUU

Ключевые слова: магнитотеллурическое зондирование, прямая одномерная задача, градиентная среда, модель Като–Кикучи, численное решение, адаптивная вычислительная сетка.

Sklyar S.N., Zabinyakova O.B. Numerical solving of the one-dimensional forward magnetotelluric sounding problem using computational grid adaptation approach // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 3. — P. 349–364.

The paper considers an implementation of an adaptive computational grid constructing algorithm inside the numerical solution of the one-dimensional forward magnetotelluric sounding problem (the Tikhonov–Cagniard problem). The numerical solution of the problem is realized by the method of local integral equations, which was proposed by authors earlier. An adaptive computational grid construction is based on geometrical principles, which conduct approximation of the electrical conductivity function via optimization of its' piecewise-constant interpolant. Numerical experiments are carried out to study and illustrate the effectiveness of the combined method. Approbation was realized on the Kato–Kikuchi model with known exact solution.

Keywords: magnetotelluric sounding, one dimensional forward problem, gradient media, Kato–Kikuchi model, numerical solution, adaptive computational grid.

Введение

Метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ) является одним из важнейших методов глубинных геофизических исследований и позволяет делать предположения о строении литосферы на основе анализа вариаций естественного электромагнитного поля Земли [1–6]. Несмотря на то, что теоретические и практические основы метода МТЗ были заложены еще в 1950-е годы учеными А.Н. Тихоновым [1] и Л. Каньяром [2], в настоящее время метод продолжает совершенствоваться и представляет большой интерес как с точки зрения фундаментальных, так и прикладных геофизических задач. При этом развитие теоретических основ и методов интерпретации магнитотеллурических данных по-прежнему является актуальным исследовательским направлением.

Одним из наиболее изученных классов МТ-задач являются прямые одномерные задачи магнитотеллурического зондирования [3–6], основанные на так называемой физической модели Тихонова–Каньяра [1–6]. Решение таких задач заключается в моделировании компонент электромагнитного поля для геологической среды с известными физическими параметрами.

В работе [7] авторами была предложена и исследована разностная схема для решения прямой одномерной задачи МТЗ, полученная на основе метода локальных интегральных уравнений (основные формулы приведены в следующем пункте статьи). Построение разностных схем предполагало кусочно-постоянную интерполяцию функции удельной электрической проводимости среды $\sigma(z)$ на вычислительной сетке. Несмотря на то, что в работе [7] доказаны оценки сходимости приближенного решения к точному на классе квазиравномерных сеток, проблема выбора в некотором смысле оптимального варианта такой сетки осталась открытой.

Среди физико-геологических моделей, соответствующих прямым одномерным задачам магнитотеллурического зондирования, значительный интерес, ввиду наименьшей изученности, представляют градиентные геологические среды, характеризующиеся непрерывной одномерной функцией удельной электропроводности σ [3, 8], причем при определенных условиях такая функция может характеризоваться зонами повышенных градиентов, локализующихся на определенных глубинах, что может вносить значительные искажения в получаемые численные решения. Для более точной кусочно-постоянной аппроксимации функции $\sigma(z)$ в данной работе предполагается применение специальных адаптивных сеток.

Известны различные варианты построения сеток, адаптированных под свойства интерполируемой функции. Наиболее часто вопрос конструирования адаптивной сетки рассматривается как задача построения взаимно-однозначного отображения равномерной вычислительной сетки в искомую адаптивную, позволяющую информативно описывать профиль интересующей функции. Впервые такой подход был предложен в работе [9] и основывался на принципе эквидистантного распределения некоторой вспомогательной “весовой” функции, позволяющей организовать искомую адаптивную сетку следующим образом: на участках, где значения производных интересующей функции велики, локализуется большее число узлов, чем на участках, где значения этих производных незначительны.

В данной работе предлагается другой метод адаптации вычислительной сетки, основанный на геометрическом принципе, который заключается в минимизации функционала дефекта площадей, описываемых графиками исходной функции и ее кусочно-постоянного интерполянта. Построенные таким образом адаптивные сетки используются при решении прямой одномерной задачи МТЗ для случая градиентной среды с помощью разностных схем, ранее полученных в статье [7].

Разностные схемы для решения прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования, полученные методом локальных интегральных уравнений

В работе [7] рассматривалось матричное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\vec{U}(z)}{dz} = L(z)\vec{U}(z), \quad z \in (0, z_{\max}), \quad (1)$$

где $\vec{U}(z)$ — неизвестная двухкомпонентная комплекснозначная вектор-функция, $L(z)$ — переменный оператор уравнения, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -\sigma(z) \\ i\omega\mu_0 & 0 \end{pmatrix}$, в которой $\omega > 0$, $\mu_0 > 0$ — действительные константы, i — мнимая единица, $\sigma(z)$ — вещественная функция, заданная на $z \in (0, z_{\max})$. На основе метода локальных интегральных уравнений авторами в работе [7] была построена разностная схема для численного решения этого уравнения:

$$\vec{U}_{j+1}^h = e^{\Delta z_j L_{j+1/2}} \vec{U}_j^h, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (2)$$

где $\{z_j\}_{j=1}^J$ — узлы произвольной неравномерной на отрезке $[0, z_{\max}]$ вычислительной сетки; $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$ — длины сеточных ячеек; $\vec{U}_j^h \approx \vec{U}(z_j)$ — приближенное решение уравнения (1) в узлах сетки; $\sigma_{j+1/2} = \frac{\sigma(z_j) + \sigma(z_{j+1})}{2}$; $k_{j+1/2} = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_{j+1/2}}{2}}$; $e^{\Delta z_j L_{j+1/2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\Delta z_j k_{j+1/2}) & -\frac{\sigma_{j+1/2}}{k_{j+1/2}} \operatorname{sh}(\Delta z_j k_{j+1/2}) \\ \frac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}} \operatorname{sh}(\Delta z_j k_{j+1/2}) & \operatorname{ch}(\Delta z_j k_{j+1/2}) \end{pmatrix}$ — матричная экспонента.

Наряду с основной разностной схемой (2) в работе [7] с помощью метода локальных интегральных уравнений были предложены и формулы естественного варианта интерполяции получаемого приближенного решения. Так в предположении, что известна сеточная функция $\vec{U}^h = \{\vec{U}_j^h\}_{j=1}^J$, найденная как приближенное решение задачи (1) с помощью разностной схемы (2), в качестве интерполянта в [7] было предложено рассматривать непрерывную вектор-функцию $\vec{U}^h(z)$, значения которой во внутренних точках каждой сеточной ячейки определяются по формуле

$$\vec{U}^h(z) = e^{(z-z_j)L_{j+1/2}} \vec{U}_j^h, \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (3)$$

где

$$e^{(z-z_j)L_{j+1/2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}[(z-z_j)k_{j+1/2}] & -\frac{\sigma_{j+1/2}}{k_{j+1/2}} \operatorname{sh}[(z-z_j)k_{j+1/2}] \\ \frac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}} \operatorname{sh}[(z-z_j)k_{j+1/2}] & \operatorname{ch}[(z-z_j)k_{j+1/2}] \end{pmatrix}.$$

Если в качестве вектор-функции $\vec{U}(z)$ в матричном дифференциальном уравнении (1) использовать вектор $\begin{pmatrix} H(z) \\ E(z) \end{pmatrix}$, то это уравнение, переписанное в покомпонентной форме, примет вид системы

$$\begin{cases} \frac{dH(z)}{dz} = -\sigma(z)E(z), \\ \frac{dE(z)}{dz} = i\omega\mu_0H(z), \end{cases} \quad z \in (0, z_{\max}). \quad (4)$$

Наделяя функции и константы системы (4) физическим смыслом, можно убедиться, что она соответствует математической модели, описывающей поведение электромагнитного поля в одномерной геологической среде [1–6]: $z \in (0, z_{\max})$ — пространственная координата, вдоль которой меняются свойства среды (ось Oz направлена вглубь Земли); $H(z)$ и $E(z)$ — взаимно-ортогональные комплекснозначные компоненты напряженности магнитного и электрического полей соответственно; $\sigma(z)$ — удельная электрическая проводимость среды; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ — магнитная постоянная; ω — частота электромагнитного поля.

Отметим, что система (4) вместе с начальными условиями

$$\begin{cases} H(0) = H_0, \\ E(0) = E_0, \end{cases} \text{ или в матричном виде } \vec{U}(0) = \vec{U}_1^h = \begin{pmatrix} H_0 \\ E_0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где H_0 и E_0 — заданные комплексные постоянные, составляет прямую одномерную задачу магнитотеллурического зондирования или так называемую задачу Тихонова–Каньера [1–6]. При этом наиболее распространенным способом анализа решений прямых задач МТЗ на практике считается изучение свойств функции магнитотеллурического импеданса (импеданса Тихонова–Каньера), в одномерном случае определяемого отношением

$$Z(z) = \frac{E(z)}{H(z)}. \quad (6)$$

Поэтому во многих работах, рассматривающих подходы к решению прямой одномерной задачи МТЗ, внимание авторов преимущественно направлено на вычисление импеданса, а не на вычисление функций $E(z)$ и $H(z)$. Однако возможность эффективного вычисления этих функций для одномерных сред представляет интерес и практическую значимость, например, для определения граничных значений компонент электромагнитного поля при его моделировании в двумерных средах [4, 6, 10].

Обратим внимание на то, что в работе [7] была доказана и оценка сходимости приближенного решения задачи (4), (5), получаемого по формуле (2), к ее точному решению:

$$\max \left\{ |H(z_j) - H_j^h|, |E(z_j) - E_j^h| \right\} \leq K (\Delta z)^2, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

где $H(z_j)$, $E(z_j)$ и H_j^h , E_j^h — точные и приближенные решения системы (4) в узлах сетки, K — константа, не зависящая от $\Delta z \equiv \max_{1 \leq j \leq J-1} \Delta z_j$, т. е. разностная схема (2) характеризуется вторым порядком сходимости к точному решению рассматриваемой задачи относительно шага сетки.

Доказана также аналогичная оценка для интерполянта (3):

$$\max \left\{ |H(z) - H^h(z)|, |E(z) - E^h(z)| \right\} \leq K (\Delta z)^2, \quad 0 \leq z \leq z_{\max},$$

где $H(z)$, $E(z)$ и $H^h(z)$, $E^h(z)$ — точные и проинтерполированные приближенные решения системы (4), K — константа, не зависящая от $\Delta z \equiv \max_{1 \leq j \leq J-1} \Delta z_j$, т. е. интерполянт, получаемый по формуле (3), обладает сходимостью второго порядка при $\Delta z \rightarrow 0$.

Описанные выше численные методы были реализованы в программном обеспечении *MT1Dhlm* и протестированы на различных тестовых задачах [11, 12].

Алгоритм построения адаптивной вычислительной сетки на основе оптимизации кусочно-постоянного интерполянта

На отрезке $[a, b]$ рассмотрим произвольную неравномерную сетку $\{z_j\}_{j=1}^J$:

$$a = z_1 < z_2 < \dots < z_{J-1} < z_J = b. \quad (7)$$

Пусть $f(z)$ — достаточно гладкая функция, определенная на отрезке $[a, b]$, для аппроксимации которой на выбранной сетке (7) будем использовать кусочно-постоянную функцию

$$f(z, \theta) \equiv \begin{cases} f_j(\theta) \equiv (1 - \theta)f(z_j) + \theta f(z_{j+1}), \\ z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, J - 1, \end{cases} \quad (8)$$

где $\theta \in [0, 1]$ — произвольный параметр. Тогда из формулы (8) следует равенство

$$f(z) - f_j(\theta) = (1 - \theta) \int_{z_j}^z f'(s) ds - \theta \int_z^{z_{j+1}} f'(s) ds, \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, \dots, J - 1, \quad (9)$$

с помощью которого можно получить оценку, характеризующую дефект площадей, возникающий на отрезке $[a, b]$ при аппроксимации функции $f(z)$ по формуле (8):

$$\|f - f(\cdot, \theta)\|_{L_1} \leq \sum_{j=1}^{J-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |\theta(s - z_j) + (1 - \theta)(z_{j+1} - s)| |f'(s)| ds \equiv \varphi(\vec{z}, \theta), \quad (10)$$

где $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{J-1}, z_J)$ — вектор, компонентами которого являются узлы вычислительной сетки (7).

Конструирование адаптивной вычислительной сетки осуществляется с помощью решения следующей оптимизационной задачи:

$$\varphi(\vec{z}, \theta) \rightarrow \min_{\vec{z}} \text{ (параметр } \theta \in [0, 1] \text{ фиксирован).} \quad (11)$$

Решение задачи (11) может быть сведено к системе нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(\vec{z}) \equiv z_1 - a = 0, \\ F_j(\vec{z}) = 0, \quad j = 2, \dots, J - 1, \\ F_J(\vec{z}) \equiv z_J - b = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$F_j(\vec{z}) = \frac{\partial \varphi(\vec{z}, \theta)}{\partial z_j}, \quad j = 2, \dots, J - 1. \quad (13)$$

Система (12) может быть решена, например, итерационным методом Ньютона:

$$\begin{cases} \vec{z}^{(0)} \text{ задано,} \\ F'(\vec{z}^{(k-1)}) (\vec{z}^{(k)} - \vec{z}^{(k-1)}) = -F(\vec{z}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (14)$$

где k — номер итерации, $\vec{z}^{(k)} \equiv (z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_J^{(k)})$, $F(\vec{z}^{(k)}) = (F_1(\vec{z}^{(k)}), F_2(\vec{z}^{(k)}), \dots, F_J(\vec{z}^{(k)}))$, $F'(\vec{z}^{(k)}) = \left(\frac{\partial F_i(\vec{z}^{(k)})}{\partial z_j} \right)_{i,j=1}^J$ — матрица Якоби.

Заменяя в (14) вектор \vec{z} на вектор \vec{v} с компонентами

$$v_j^{(k)} = z_j^{(k)} - z_j^{(k-1)}, \quad j = 1, \dots, J,$$

и применяя некоторые специальные аппроксимации (подробно описанные в работе [13]) для вычисления компонент вектор-функции $F(\vec{z})$ и матрицы Якоби $F'(\vec{z})$, на k -м итерационном шаге задачу (14) сводим к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} B_1^{(k-1)} v_1^{(k)} - C_1^{(k-1)} v_2^{(k)} = g_1^{(k-1)}, \\ -A_j^{(k-1)} v_{j-1}^{(k)} + B_j^{(k-1)} v_j^{(k)} - C_j^{(k-1)} v_{j+1}^{(k)} = g_j^{(k-1)}, \quad j = 2, \dots, J-1, \\ -A_J^{(k-1)} v_{J-1}^{(k)} + B_J^{(k-1)} v_J^{(k)} = g_J^{(k-1)}, \end{cases} \quad (15)$$

коэффициенты которой определены следующим образом:

$$\begin{aligned} B_1^{(k-1)} &= 1, & C_1^{(k-1)} &= 0, & g_1^{(k-1)} &= 0, \\ A_J^{(k-1)} &= 0, & B_J^{(k-1)} &= 1, & g_J^{(k-1)} &= 0; \\ A_j^{(k-1)} &= (1 - \theta) w_{j-1}^{(k-1)} + \theta w_j^{(k-1)}, \\ C_j^{(k-1)} &= (1 - \theta) w_j^{(k-1)} + \theta w_{j+1}^{(k-1)}, \\ B_j^{(k-1)} &= 3w_j^{(k-1)} - \theta w_{j-1}^{(k-1)} - (1 - \theta) w_{j+1}^{(k-1)}, \\ g_j^{(k-1)} &= \left(z_{j+1}^{(k-1)} - 2z_j^{(k-1)} + z_{j-1}^{(k-1)} \right) w_j^{(k-1)} + \frac{\theta}{2} \left(z_{j+1}^{(k-1)} - z_j^{(k-1)} \right) \left(w_{j+1}^{(k-1)} - w_j^{(k-1)} \right) + \\ &\quad \frac{1 - \theta}{2} \left(z_j^{(k-1)} - z_{j-1}^{(k-1)} \right) \left(w_j^{(k-1)} - w_{j-1}^{(k-1)} \right), \quad j = 2, \dots, J-1, \end{aligned}$$

где используются вспомогательные функции w_j :

$$\begin{aligned} w_1 &= \left| \frac{z_3 - z_1}{(z_3 - z_2)(z_2 - z_1)} (f(z_2) - f(z_1)) - \frac{z_2 - z_1}{(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)} (f(z_3) - f(z_1)) \right|, \\ w_j &= \left| \frac{z_j - z_{j-1}}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_{j+1} - z_j)} (f(z_{j+1}) - f(z_j)) + \right. \\ &\quad \left. \frac{z_{j+1} - z_j}{(z_{j+1} - z_{j-1})(z_j - z_{j-1})} (f(z_j) - f(z_{j-1})) \right|, \quad j = 2, \dots, J-1, \\ w_J &= \left| \frac{z_J - z_{J-2}}{(z_{J-1} - z_{J-2})(z_J - z_{J-1})} (f(z_J) - f(z_{J-1})) - \right. \\ &\quad \left. \frac{z_J - z_{J-1}}{(z_{J-1} - z_{J-2})(z_J - z_{J-2})} (f(z_J) - f(z_{J-2})) \right|. \end{aligned}$$

В рамках данной работы для решения системы (15) будем использовать метод прогонки [14]. Для регуляризации прогонки, в смысле соблюдения условия строгого диагонального преобладания, будем формировать диагональные коэффициенты $B_j^{(k-1)}$ следующим образом:

$$B_j^{(k-1)} = \max \left(A_j^{(k-1)} + C_j^{(k-1)} + E, 3w_j^{(k-1)} - \theta w_{j-1}^{(k-1)} - (1 - \theta)w_{j+1}^{(k-1)} \right),$$

где $E > 0$ — достаточно малое положительное число.

В качестве начального приближения для итерационного процесса (14) будем использовать равномерную на $[a, b]$ сетку

$$z_j^{(0)} = a + \frac{j-1}{J-1}(b-a), \quad j = 1, \dots, J,$$

а в качестве критерия остановки итерационного процесса (14) — условие выполнения неравенства

$$\|\vec{v}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq J} |v_j| < \delta \quad (16)$$

с наперед заданным достаточно малым параметром $\delta = O((J-1)^{-3})$.

Аналитическое решение прямой одномерной задачи МТЗ для модели Като–Кикучи (тестовая задача)

Одним из известных примеров градиентной функции удельной электропроводности σ , используемой в задачах МТЗ, является степенная функция, соответствующая модели Като–Кикучи [3]:

$$\sigma(z) = \sigma_0(1 + pz)^{-2}, \quad (17)$$

где σ_0 и p — некоторые положительные числа. При определенных значениях σ_0 и p эта функция формирует пограничный слой вблизи точки $z = 0$. Отметим, что для случая функции (17) известно аналитическое решение соответствующей прямой одномерной задачи МТЗ [3, 11, 12], что является дополнительным преимуществом данной модели при проведении численных экспериментов по тестированию эффективности разностной схемы (2).

Рассмотрим прямую одномерную задачу магнитотеллурического зондирования для случая вертикально-градиентной геологической среды, описываемой степенной моделью Като–Кикучи [3]. Математической моделью такой задачи является система уравнений (4) (или, что то же самое, матричное уравнение (1)) вместе с начальными условиями (5) (при этом функция удельной электрической проводимости σ определяется по формуле (17)):

$$\begin{cases} \frac{dH(z)}{dz} = -\sigma_0(1 + pz)^{-2}E(z), & z \in (0, z_{\max}), \\ \frac{dE(z)}{dz} = i\omega\mu_0H(z), & \end{cases} \quad \begin{cases} H(0) = H_0, \\ E(0) = E_0, \end{cases} \quad (18)$$

где z — пространственная координата; $H(z)$ и $E(z)$ — неизвестные функции напряженности магнитного и электрического полей; σ_0 и p — положительные вещественные числа; i — мнимая единица; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ — магнитная постоянная; ω — частота электромагнитного поля.

В работе [11] было показано, что точное решение этой задачи имеет вид

$$E(z) = E_0(1 + pz)^{\nu + \frac{1}{2}}, \quad H(z) = H_0(1 + pz)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k_0^2}{p^2}}, \quad z \in [0, z_{\max}], \quad (19)$$

где $k_0^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$, при этом для обеспечения разрешимости задачи (18) комплексные постоянные H_0 и E_0 связаны между собой соотношением $p\left(\frac{1}{2} - \nu\right)H_0 = \sigma_0 E_0$. Магнитотеллурический импеданс (6) в этом случае описывается функцией

$$Z(z) = \frac{E_0}{H_0}(1 + pz), \quad z \in [0, z_{\max}]. \quad (20)$$

Численное решение прямой одномерной задачи МТЗ с применением адаптивных вычислительных сеток

В данном пункте статьи представим результаты численных экспериментов по решению прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования (18) с помощью разностной схемы (2) с применением равномерных и адаптивных вычислительных сеток. Основной целью расчетов является анализ эффективности применения адаптивных сеток при численном решении задачи Тихонова–Каньяра в случае градиентной среды (модель Като–Кикучи), для которой известны соответствующие точные решения этой задачи (19), (20).

Вычисления осуществлялись в среде MatLab в матричном виде для разных наборов параметров самой задачи и вычислительной сетки. Для этого было усовершенствовано программное обеспечение *MT1Dhlm*¹ за счет имплементации алгоритма по построению адаптивных вычислительных сеток.

Аппроксимация функции импеданса $Z(z)$ выполнялась по формуле (6) как отношение соответствующих приближенных функций $E(z)$ и $H(z)$.

Точности всех получаемых приближенных решений оценивались по двум видам погрешностей:

$$rel_error_max = \frac{\|(Y)^h - Y^h\|_{\infty}}{\|(Y)^h\|_{\infty}} 100\%, \quad (21)$$

и

$$rel_error_L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{J-1} (z_{j+1} - z_j) \left| \frac{(Y)_{j+1}^h + (Y)_j^h}{2} - \frac{Y_{j+1}^h + Y_j^h}{2} \right|}{\sum_{j=1}^{J-1} (z_{j+1} - z_j) \left| \frac{(Y)_{j+1}^h + (Y)_j^h}{2} \right|} 100\%, \quad (22)$$

где $(Y)_j^h$ — проекция точного решения задачи (18) на j -й узел сетки, Y_j^h — приближенное решение задачи (18) в j -м узле, $\|(Y)^h - Y^h\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq J} |(Y)_j^h - Y_j^h|$, $\|(Y)^h\|_{\infty} =$

¹Забинякова О.Б., Скляр С.Н. Программа для моделирования магнитотеллурического поля в горизонтально-слоистых средах *MT1Dhlm*. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2022683182, дата регистрации 01.12.2022. Заявка № 2022682325 от 21.11.2022.

$\max_{1 \leq j \leq J} |(Y)_j^h|$. Оценка осуществлялась по отдельности для решений, получаемых на равномерной и адаптивной сетках. Для сравнения результатов, получаемых на равномерной и адаптивной сетках, использовалась контрольная равномерная сетка с большим числом узлов, на которой выполнялось построение соответствующих интерполянтов по формуле (3) для приближенных решений, полученных на базовых равномерной и адаптивной сетках.

Обратим внимание, что в работе [7] при построении разностных схем для решения системы (4) подразумевалась возможность кусочно-постоянной аппроксимации функции удельной электрической проводимости $\sigma(z)$, при которой внутри каждой сеточной ячейки используется значение функции, соответствующее полусумме ее значений на концах этой ячейки. Поэтому, придерживаясь этой логики, при построении адаптивных сеток и соответствующих кусочно-постоянных интерполянтов в рассматриваемой тестовой задаче будем использовать значение параметра $\theta = \frac{1}{2}$.

Отметим, что была выполнена серия численных экспериментов с разными значениями начальных условий (5). В данной работе, для конкретности, приведем результаты, полученные при произвольно выбранном значении $H_0 = 100 + 100i$. Также, для конкретности, зафиксируем значение параметра-критерия остановки итерационного процесса по подбору узлов адаптивной сетки в формуле (16) $\delta = 0.01$ и количество узлов контрольной равномерной сетки, равное 1001.

В таблицах 1–3 приведены относительные погрешности функций $H(z)$, $E(z)$ и $Z(z)$ соответственно, полученные при разных значениях параметров задачи (18) и вычислительной сетки (в заголовках таблиц используются сокращения: UG — равномерная сетка, AG — адаптивная сетка). При выполнении численных экспериментов было установлено, что погрешности интерполянтов на любых сетках не превышают погрешности соответствующих сеточных функций, поэтому отдельные таблицы погрешностей интерполянтов в данной работе приводить не будем.

Таблица 1. Относительные погрешности функции $H(z)$, получаемые при разных значениях параметров задачи (18) и вычислительной сетки, %

№	Параметры задачи и вычислительной сетки					Погрешности аппроксимации			
	z_{\max}	J	σ_0	p	ω	rel_error_max		rel_error_L1	
						формула (21), %	формула (22), %	UG	AG
1	1	5	10	100	100	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$
2		10				$5 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$
3		20				$1.1 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$2.2 \cdot 10^{-5}$
4		5				19.8	$6.5 \cdot 10^{-2}$	17.31	$4 \cdot 10^{-2}$
5		10				3.94	0.014	3.72	$8.2 \cdot 10^{-3}$
6		20				0.9	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.88	$2.2 \cdot 10^{-3}$
7	10	5	100	10	1	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$
8		10				$4.3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
9		20				10^{-3}	$5.6 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	$3.1 \cdot 10^{-5}$
10		5				198.62	$4.3 \cdot 10^{-2}$	173.79	0.0257
11	1000	10				38.87	$1.1 \cdot 10^{-2}$	36.71	0.0056
12		20				8.74	$2.2 \cdot 10^{-3}$	8.51	0.0013
13		50				1.32	$4.7 \cdot 10^{-4}$	1.31	$2.7 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2. Относительные погрешности функции $E(z)$, получаемые при разных значениях параметров задачи (18) и вычислительной сетки, %

№	Параметры задачи и вычислительной сетки					Погрешности аппроксимации			
	z_{\max}	J	σ_0	p	ω	rel_error_max формула (21), %		rel_error_L1 формула (22), %	
						UG	AG	UG	AG
1	1	5	10	100	100	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	0.0013	$2.4 \cdot 10^{-4}$
2		10				$3.9 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
3		20				$9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$
4		5				16.48	$3.3 \cdot 10^{-2}$	14.0	$3.1 \cdot 10^{-2}$
5		10				3.65	$6.6 \cdot 10^{-3}$	3.39	$5.8 \cdot 10^{-3}$
6		20				0.87	$1.8 \cdot 10^{-3}$	0.84	$1.5 \cdot 10^{-3}$
7	10	5	100	10	1	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$
8		10				$4 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$
9		20				$9.8 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
10		5				165.22	$2 \cdot 10^{-2}$	140.23	$2 \cdot 10^{-2}$
11		10				35.99	$4.2 \cdot 10^{-3}$	33.43	$4 \cdot 10^{-3}$
12		20				8.4	10^{-3}	8.14	$9.1 \cdot 10^{-4}$
13		50				1.3	$2.3 \cdot 10^{-4}$	1.28	$1.9 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3. Относительные погрешности функции $Z(z)$, получаемые при разных значениях параметров задачи (18) и вычислительной сетки, %

№	Параметры задачи и вычислительной сетки					Погрешности аппроксимации			
	z_{\max}	J	σ_0	p	ω	rel_error_max формула (21), %		rel_error_L1 формула (22), %	
						UG	AG	UG	AG
1	1	5	10	100	100	$7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$4 \cdot 10^{-4}$
2		10				$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$
3		20				$2.4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
4		5				3.3	$3.2 \cdot 10^{-2}$	5.7	$3 \cdot 10^{-2}$
5		10				0.29	$7.7 \cdot 10^{-3}$	0.56	$6.9 \cdot 10^{-3}$
6		20				$3.2 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
7	10	5	100	10	1	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$
8		10				$3.7 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-5}$
9		20				$5 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$
10		5				17.48	$2.3 \cdot 10^{-2}$	30.58	$2.2 \cdot 10^{-2}$
11		10				2.75	$6.3 \cdot 10^{-3}$	5.19	$6 \cdot 10^{-3}$
12		20				0.31	$1.2 \cdot 10^{-3}$	0.6	$1.1 \cdot 10^{-3}$
13		50				$2 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$

На рисунках 1, 3, 5 приведены примеры графиков градиентных функций $\sigma(z)$ (линия 1) и их аппроксиманты, построенные с помощью кусочно-постоянной интерполяции (линия 2 — на равномерных сетках, линия 3 — на аддитивных сетках). Визуальный анализ графиков, представленных на указанных рисунках, позволяет заметить явное преимущество применения аддитивных сеток для кусочно-постоянной интерполяции функций $\sigma(z)$: в отличие от равномерных сеток плотность узлов аддитивных сеток увеличивается в области пограничного слоя функции и позволяет более точно выполнять ее

аппроксимацию в этой области. На рисунках 2, 4, 6 на примере функции $H(z)$ сопоставляются результаты численного решения задачи (18) с ее соответствующими точными решениями для разных $\sigma(z)$ на разных сетках (см. подрисуточные подписи): линия 1 изображает известные аналитические решения (19); линия 2 и ■ — приближенное решение и интерполянт, полученные с помощью разностной схемы (2) и формулы естественной интерполяции (3) на равномерной вычислительной сетке; линия 3 и ● — приближенное решение и интерполянт, полученные с помощью основной разностной схемы (2) и формулы естественной интерполяции (3) на адаптивной вычислительной сетке.

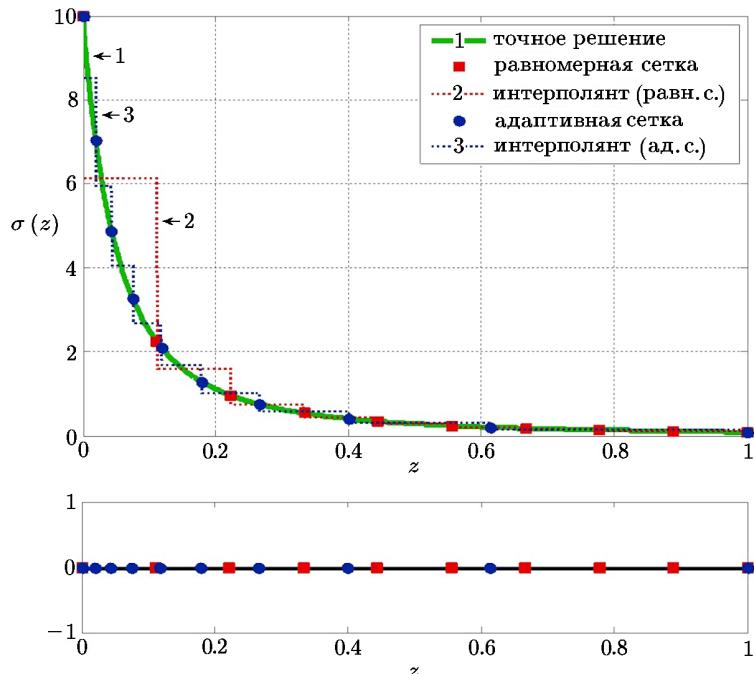


Рис. 1. Верхний график — функция $\sigma(z)$ и ее сеточные аппроксимации для варианта №2 сочетания параметров из таблиц 1–3; нижний график — узлы равномерной и адаптивной вычислительных сеток

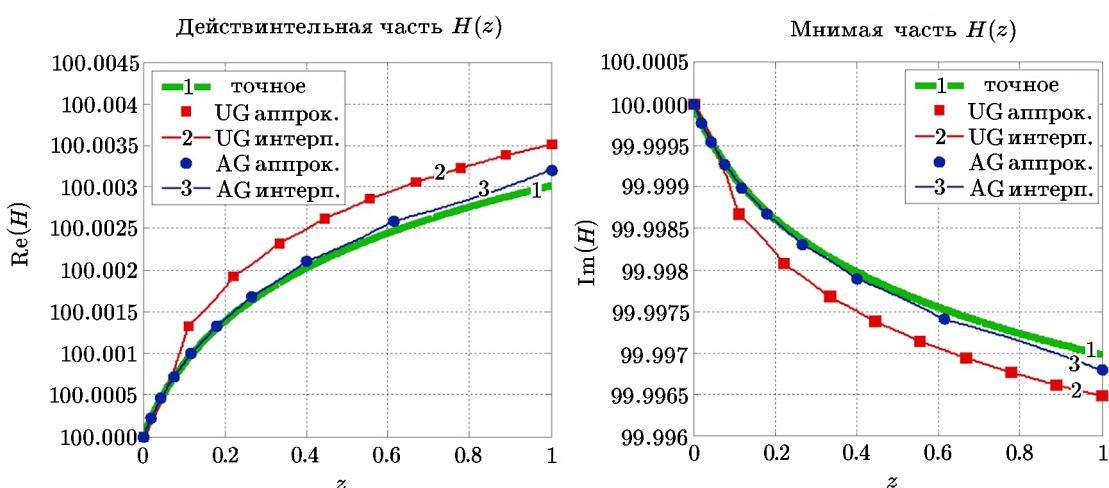


Рис. 2. Графики действительной и мнимой частей функции $H(z)$ для варианта №2 сочетания параметров из таблиц 1–3

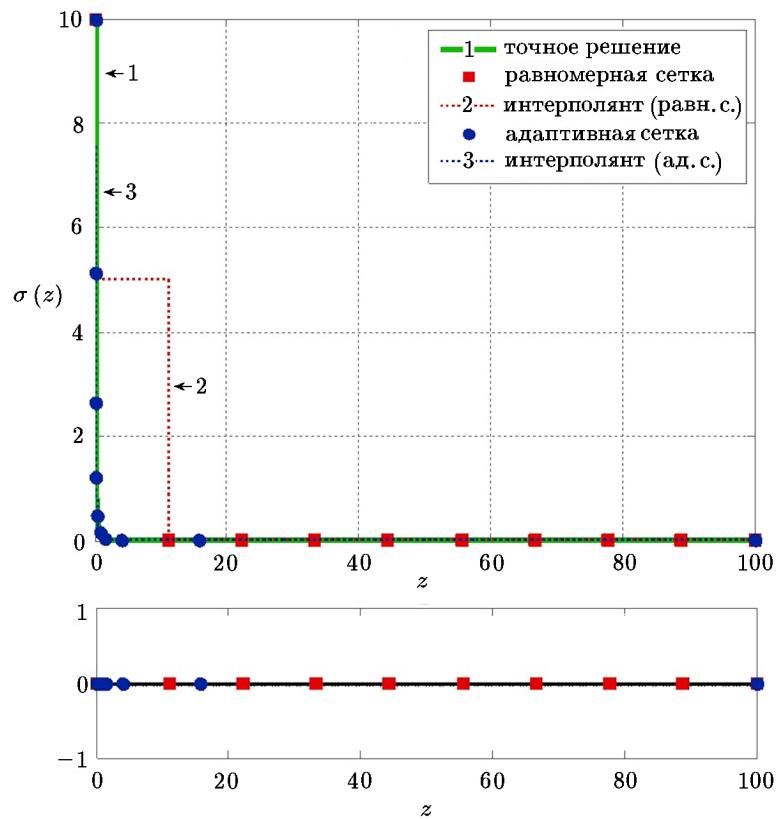


Рис. 3. Верхний график — функция $\sigma(z)$ и ее сеточные аппроксимации для варианта №5 сочетания параметров из таблиц 1–3; нижний график — узлы равномерной и адаптивной вычислительных сеток

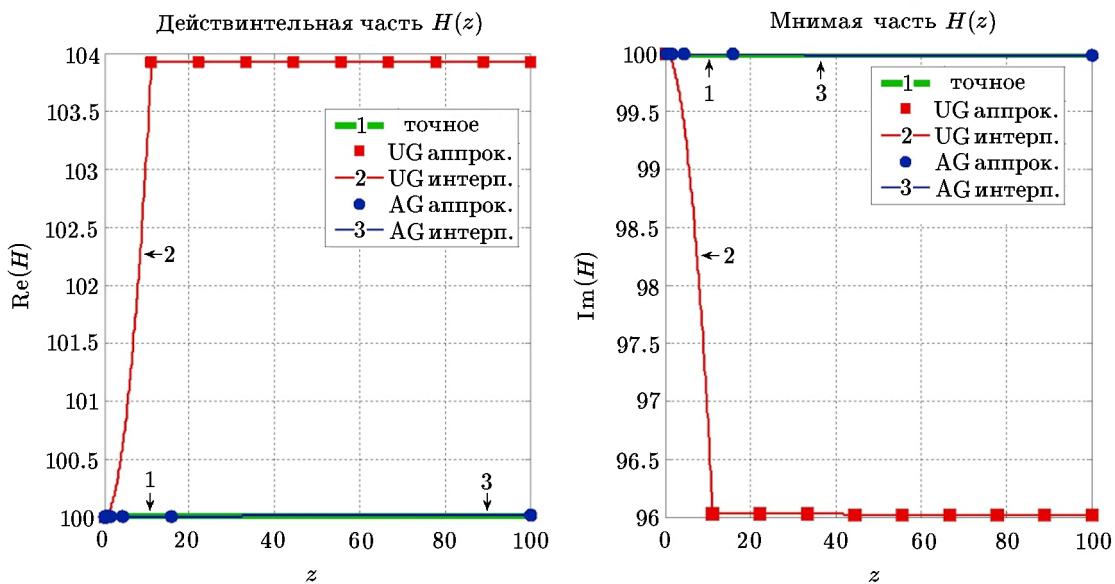


Рис. 4. Графики действительной и мнимой частей функции $H(z)$ для варианта №5 сочетания параметров из таблиц 1–3

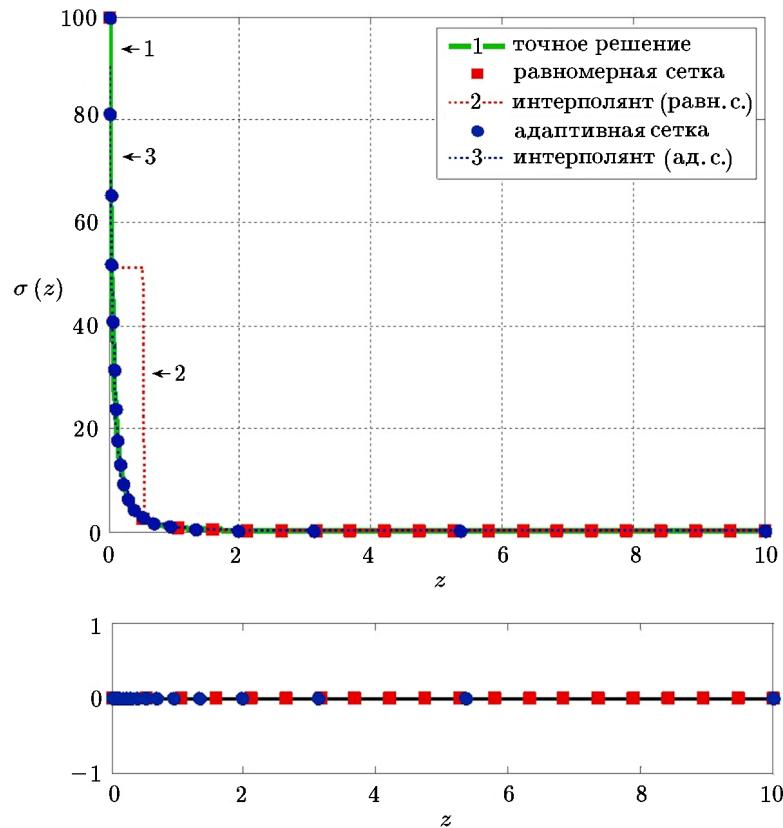


Рис. 5. Верхний график — функция $\sigma(z)$ и ее сеточные аппроксимации для варианта №9 сочетания параметров из таблиц 1–3; нижний график — узлы равномерной и адаптивной вычислительных сеток

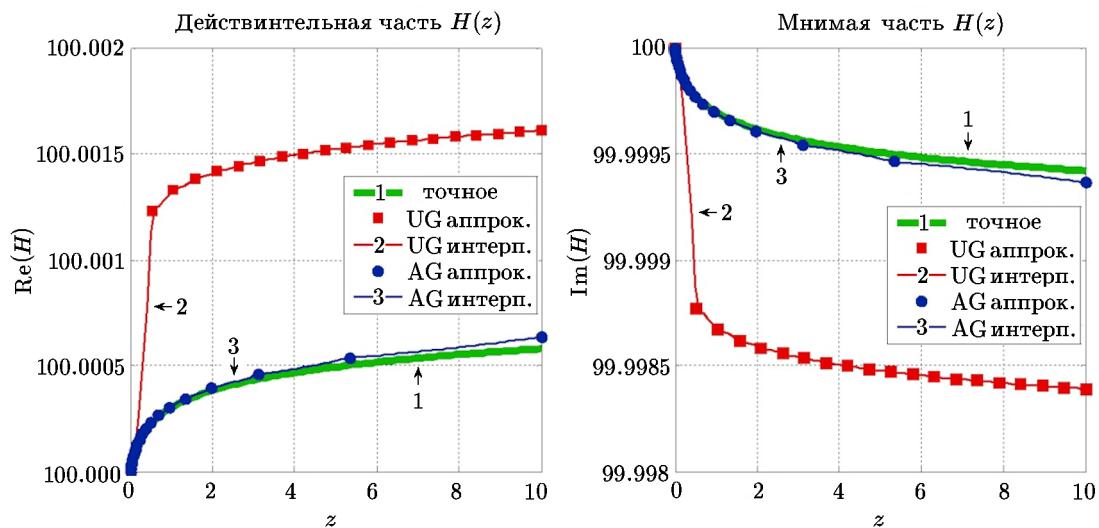


Рис. 6. Графики действительной и мнимой частей функции $H(z)$ для варианта №9 сочетания параметров из таблиц 1–3

Из таблиц погрешностей и графических примеров, представленных в данном пункте, видно, что при моделировании компонент электромагнитного поля с помощью разностной схемы (2) имеет место сходимость приближенного решения к точному, что связано с увеличением числа узлов вычислительной сетки. Это закономерно как для равномерной, так и для адаптивной сеток. При этом эффективность применения адаптивных вычислительных сеток (по сравнению с равномерными сетками) при решении прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования для случая градиентной среды очевидна, что наиболее явно проявилось в случаях численных экспериментов с небольшим количеством узлов и достаточно большим значением z_{\max} .

Заключение

Таким образом, в работе рассматривался вопрос повышения точности численного моделирования компонент электромагнитного поля при решении прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования для случая градиентной геологической среды с помощью разностных схем, полученных методом локальных интегральных уравнений и подразумевающих использование кусочно-постоянных интерполянтов функции удельной электропроводности. Показано, что существует возможность повышать точность получаемых приближенных решений рассматриваемой задачи при использовании специальных вычислительных сеток, адаптированных под свойства этой функции. Результаты численных экспериментов по решению задачи Тихонова–Каньера для модели Като–Кикучи подтвердили эффективность применения предложенных адаптивных вычислительных сеток, точность моделирования компонент электромагнитного поля увеличилась на 1–3 порядка.

Литература

1. **Тихонов А.Н.** Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 73, № 2. — С. 295–297.
2. **Cagniard L.** Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting // Geophysics. — 1953. — Vol. 18, iss. 3. — P. 605–635.
3. **Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.** Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. — М.: Недра, 1992.
4. **Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.** Модели и методы магнитотеллурики. — М.: Научный мир, 2009. Перевод: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Models and Methods of Magnetotellurics. — Berlin: Springer, 2009.
5. **Жамалетдинов А.А.** Магнитотеллурический метод изучения строения массивов горных пород. — Апатиты, 2014. — (Учебное пособие).
6. **Жданов М.С.** Электроразведка. Учебник для вузов. — М.: Недра, 1986.
7. **Забинякова О.Б., Скляр С.Н.** Метод численного моделирования магнитотеллурического поля в горизонтально-однородной среде: разностные схемы, оценки сходимости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 1. — С. 33–51. — DOI: 10.15372/SJNM20220103. Перевод: Zabinyakova O., Sklyar S. A method of numerical modelling of a magnetotelluric field in a horizontally homogeneous medium: difference schemes and convergence estimates // Numerical Analysis and Applications. — 2022. — Vol. 15, № 1. — P. 27–43. — DOI: 10.1134/S1995423922010037.

8. Александров П.Н., Забинякова О.Б. Математическое моделирование магнитотеллурического поля в одномерных кусочно-градиентных средах // Вестник КРАУНЦ. Серия: Науки о Земле. — 2020. — Вып. 47, № 3. — С. 75–85. — DOI: 10.31431/1816-5524-2020-3-47-75-85.
9. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. — North-Holland, New York, 1985.
10. Новожинский К., Пушкарев П.Ю. Анализ эффективности программ для двумерной инверсии магнитотеллурических данных // Физика Земли. — 2001. — № 6. — С. 72–85.
11. Забинякова О.Б., Скляр С.Н. Результаты численных экспериментов по моделированию магнитотеллурического поля в вертикально градиентной среде // Проблемы информатики. — 2020. — № 2. — С. 15–36. — DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10006.
12. Забинякова О.Б., Скляр С.Н. Численное моделирование магнитотеллурического импеданса в вертикально градиентной среде на основе метода локальных интегральных уравнений // Сб. материалов XII Междунар. конф. молодых ученых и студентов “Современные техника и технологии в научных исследованиях”. — Бишкек: НС РАН, 2020. — С. 371–379.
13. Забинякова О.Б., Скляр С.Н. Об оптимальной аппроксимации функции при помощи кусочно-постоянного интерполянта // Сб. материалов XV Междунар. конф. молодых ученых и студентов “Современные техника и технологии в научных исследованиях”. — Бишкек: НС РАН, 2023. — С. 403–411.
14. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ // Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика. — М.: Изд. центр “Академия”, 2013.

Поступила в редакцию 19 января 2024 г.

После исправления 13 марта 2024 г.

Принята к печати 19 апреля 2024 г.

Литература в транслитерации

1. Tikhonov A.N. Ob opredelenii elektricheskikh kharakteristik glubokikh sloev zemnoi kory // Dokl. AN SSSR. — 1950. — T. 73, № 2. — S. 295–297.
2. Cagniard L. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting // Geophysics. — 1953. — Vol. 18, iss. 3. — P. 605–635.
3. Berdichevskii M.N., Dmitriev V.I. Magnitotelluricheskoe zondirovaniye gorizonta no-odnorodnykh sred. — M.: Nedra, 1992.
4. Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Modeli i metody magnitotelluriki. — M.: Nauchnyi mir, 2009. Perevod: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Models and Methods of Magnetotellurics. — Berlin: Springer, 2009.
5. Zhamaletdinov A.A. Magnitotelluricheskii metod izucheniya stroeniya massivov gornykh porod. — Apatity, 2014. — (Uchebnoe posobie).
6. Zhdanov M.S. Elektrorazvedka. Uchebnik dlya vuzov. — M.: Nedra, 1986.
7. Zabinyakova O.B., Sklyar S.N. Metod chislennogo modelirovaniya magnitotelluricheskogo polya v gorizonta no-odnorodnoi srede: raznostnye skhemy, ocenki skhodimosti // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2022. — T. 25, № 1. — S. 33–51. — DOI: 10.15372/SJNM20220103. Perevod: Zabinyakova O., Sklyar S. A method of numerical modelling of a magnetotelluric field in a horizontally homogeneous medium: difference schemes and convergence estimates // Numerical Analysis and Applications. — 2022. — Vol. 15, № 1. — P. 27–43. — DOI: 10.1134/S1995423922010037.

8. **Aleksandrov P.N., Zabinyakova O.B.** Matematicheskoe modelirovanie magnitotelluricheskogo polya v odnomernykh kusochno-gradientnykh sredakh // Vestnik KRAUNC. Seriya: Nauki o Zemle. — 2020. — Vyp. 47, № 3. — S. 75–85. — DOI: 10.31431/1816-5524-2020-3-47-75-85.
9. **Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.** Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. — North-Holland, New York, 1985.
10. **Novozhinskii K., Pushkarev P.Yu.** Analiz effektivnosti programm dlya dvumernoi inversii magnitotelluricheskikh dannykh // Fizika Zemli. — 2001. — № 6. — S. 72–85.
11. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Rezul'taty chislennykh eksperimentov po modelirovaniyu magnitotelluricheskogo polya v vertikal'no gradientnoi srede // Problemy informatiki. — 2020. — № 2. — S. 15–36. — DOI: 10.24411/2073-0667-2020-10006.
12. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Chislennoe modelirovanie magnitotelluricheskogo impedansa v vertikal'no gradientnoi srede na osnove metoda lokal'nykh integral'nykh uravnenii // Sb. materialov XII Mezhdunar. konf. molodykh uchenykh i studentov “Sovremennye tekhnika i tekhnologii v nauchnykh issledovaniyakh”. — Bishkek: NS RAN, 2020. — S. 371–379.
13. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Ob optimal'noi approksimacii funktsii pri pomoshchi kusochno-postoyannogo interpolyanta // Sb. materialov XV Mezhdunar. konf. molodykh uchenykh i studentov “Sovremennye tekhnika i tekhnologii v nauchnykh issledovaniyakh”. — Bishkek: NS RAN, 2023. — S. 403–411.
14. **Kalitkin N.N., Al'shina E.A.** Chislennye metody: v 2 kn. Kn. 1. Chislennyi analiz // Universitetskii uchebnik. Ser. Prikladnaya matematika i informatika. — M.: Izd. centr “Akademiya”, 2013.