

Вытекающие из (4.7), (4.6) зависимости  $\Phi(\tau)$  и  $Q(\tau)$  представлены на фигуре, откуда видно, что на большей части диапазона изменения расход жидкости удовлетворительно аппроксимируется двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора,  $Q/Q_0 \approx 1 - 2\tau$ . Движение жидкости прекращается при

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \frac{5\Phi d\Phi}{(1+\Phi)^2 - 1} \approx 0,5756.$$

Если же постоянным поддерживается расход жидкости, то  $\Phi = \tau$  и из (4.5) для перепада давления получаем

$$\frac{P}{P_0} = \frac{(1+\tau)^5 - 1}{5\tau}, \quad P_0 \equiv P(0) = \frac{8\mu_0 QL}{\pi R_0^4},$$

а из (4.4) для изменения во времени радиуса канала имеем

$$(4.8) \quad \frac{R_0}{R} = 1 + \frac{\pi^2 \pi R_0^2 z}{16 Q t_*^2} t.$$

Линейность изменения отношения  $R_0/R$  позволяет эмпирически определить величину  $t_*$  из опытов с постоянным расходом жидкости.

В заключение укажем, что если наряду с изменением вязкости происходит также изменение плотности жидкости от исходного значения  $\rho_0$  до  $\rho_1$ , то вместо (4.1) будем иметь

$$(4.9) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\pi^2 \rho_0 U^2}{16 \rho_1 Q t_*^2}$$

и в выражениях (4.3), (4.7) и (4.8) появятся соответствующие (4.9) дополнения. Величина  $t_*$  при этом, как и прежде, определяется соотношением  $t_*/t_0 \equiv (\pi/4)/a$ , только в уравнениях (3.16), (3.18), служащих для нахождения параметра  $a$  (или  $t_*$ ), вместо (1.3) будет стоять уже функция  $f(\theta) = \mu_0 \rho_0 / \rho \mu$ .

Автор благодарит В. Г. Абрамова и А. М. Столина за ценные советы и обсуждения.

Поступила 6 II 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. Variable-viscosity flows in channels with high heat generation.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 83, N 1.
2. Ockendon H., Ockendon J. R. Variable-viscosity flows in heated and cooled channels.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 83, N 1.
3. Ваганов Д. А. Некоторые двумерные эффекты при течении реагирующей жидкости со свойствами, меняющимися с глубиной превращения.— ПМТФ, 1977, № 1.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.

УДК 536.21 : 620.191.33

### ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СИЛЬНОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В. И. Селяков

(Москва)

Вопрос об эффективной проводимости среды с малой концентрацией включений рассматривался во многих работах (например, в [1]). Случай среды с хаотическим распределением круговых включений, характеризующимся бинарной коррелятивной

функцией, рассмотрен в [2]. При этом использовался аппарат ансамблевых усреднений. В данной работе с использованием методов теории функций комплексного переменного решается плоская задача об эффективной проницаемости среды с трансляционной симметрией расположения круговых включений. Поскольку при упорядоченном расположении включений отпадает необходимость в определении коррелятивной функции, эффективная проницаемость среды может быть определена в случае, когда концентрация включений не является малой. Использование методов теории функций комплексного переменного позволяет получать эффективное решение такого рода задач для включений произвольной формы, реализуя их конформное отображение на внешность единичного круга. В этом смысле приводится решение основной задачи. При решении задачи использован подход, развитый в работах [3, 4] для определения напряженного состояния плоскости, ослабленной бесконечным числом отверстий круговой формы. Основная идея такого подхода заключается в представлении искомого решения в виде ряда Лорана, разложении его по параметру малости  $\varepsilon = 1/l$ , где  $l$  — расстояние между центрами включений, и использовании основной идеи метода Бубнова — Галеркина для нахождения коэффициентов этого разложения. Как и в случае задач упругости, удается получить эффективный способ решения задач проводимости в среде с бесконечным числом включений. Усредняя полученное решение по макрообъему, можно определить эффективный коэффициент проводимости такой среды.

**Фильтрация в среде с круговыми включениями.** Рассмотрим стационарную фильтрацию флюида в среде с круговыми включениями, схема расположения которых приведена на фиг. 1. Без ограничения общности в дальнейшем радиусы окружностей будем считать равными единице. Расстояние между соседними центрами окружностей вдоль осей  $x$  и  $y$  полагаются равными  $l$ . Таким образом, положение центров окружностей определяется формулой

$$z_{n,p} = l(n + ip),$$

где  $i$  — мнимая единица;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ ;  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ . Для описания фильтрационного течения, согласно работе [5], удобно ввести комплексные потенциалы:

$$\varphi_v = (k_v/\mu)P_v + i\psi_v, \quad v = 0, 1.$$

Здесь потенциал с индексом  $v = 0$  соответствует области фильтрации в среде вне включения, с индексом  $v = 1$  — области внутри включения;  $k_v$  — коэффициент проницаемости соответственно среды и включения;  $\mu$  — вязкость флюида;  $P_v$  — давление флюида соответственно в среде и внутри включения;  $\psi_v$  — функции тока. Комплексные потенциалы должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$(1) \quad \Delta \varphi_v = 0$$

и являются аналитическими функциями в соответствующих областях определений. Кроме того, на границе контура включения должны выполняться условия сшивки потенциалов:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial n_1} \operatorname{Re} \varphi_0 = \frac{\partial}{\partial n_1} \operatorname{Re} \varphi_1;$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} \frac{1}{k_0} \varphi_0 = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} \frac{1}{k_1} \varphi_1.$$

Здесь первое соотношение означает сохранение потока, направленного по нормали  $n_1$  к границе контура, второе соотношение получено из условия равенства давлений на контуре включения после дифференцирования этого условия по координате  $s$ , совпадающей с границей контура. Выражение  $\operatorname{Re} \varphi_v = (1/2)(\varphi_v + \overline{\varphi_v})$  означает действительную часть потенциала. Здесь и в дальнейшем черточка сверху означает, что берется сопряженное значение комплексной функции. Проводя дифференцирование и складывая равенства (2), (3), можно получить соотношение на контуре окружности включения единичного радиуса [5]:

$$(4) \quad \sigma \varphi_0'(\sigma) = \frac{1+\alpha}{2} \sigma \varphi_1'(\sigma) + \frac{1-\alpha}{1} \overline{\sigma \varphi_1'(\sigma)},$$

где  $\sigma = \exp(i\theta)$ ;  $\alpha = k_0/k_1$ .

Аналогичные условия должны выполняться на любом контуре включения. Кроме того, действительные части потенциалов должны быть ограничены в областях их определения и удовлетворять условию на бесконечности. В случае, когда на бесконечности задается поток  $u_0$ , параллельный оси  $x$ , потенциал  $\varphi_0$  можно представить в виде

$$\varphi_0 = u_0 z + \varphi_0^1,$$

где  $\varphi_0^1$  — функция, аналитическая в области вне включений. Искомые потенциалы можно представить в виде рядов Лорана, которые с учетом вышесказанного имеют вид

$$(5) \quad \varphi_0 = u_0 z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[z - l(n + ip)]^k};$$

$$(6) \quad \varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Интересно отметить, что выражение для потенциала  $\varphi_0$ , по существу, представляет собой сумму плоских мультиполей, размещенных в центрах включений.

Таким образом, решение задачи сводится к определению неизвестных коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ , которые можно найти из условия (4). Из симметрии задачи следует, что если потенциалы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  удовлетворяют условию (4) на контуре, то они будут автоматически удовлетворять такому условию и на любом другом контуре ( $\sigma = z_{n,p}$ ). Поэтому достаточно рассмотреть случай  $\sigma = \exp(i\theta)$ . Отметим, что из симметрии задачи также следует, что четные коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  должны быть равны нулю.

Выражение для потенциала (5) содержит параметр малости  $\varepsilon = 1/l < 1/2$ . Это позволяет существенно упростить процедуру определения коэффициентов, используя основную идею Бубнова — Галеркина. Разложим в ряд по степеням  $\varepsilon$  члены типа  $[z - (1/\varepsilon)(n + ip)]^{-k}$  потенциала (5) и подставим это разложение, а также выражение для потенциала  $\varphi_1$  в условие на контуре (4). В результате имеем

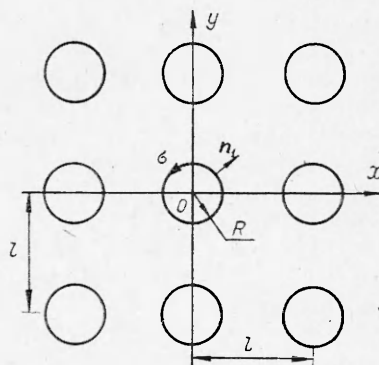
$$F(\sigma) = \sigma \varphi_0(\sigma) - \frac{1+\alpha}{2} \sigma \varphi_1(\sigma) - \frac{1-\alpha}{2} \overline{\sigma \varphi_1(\sigma)} = 0.$$

Потребовав, чтобы функция  $F(\sigma)$  была ортогональна к системе функций  $\sigma^{\pm k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения  $a_k$  и  $b_k$ . Удерживая в суммах выражений (5), (6) ограниченное число членов, можно получить конечную систему алгебраических уравнений и приближенное решение задачи, точность которого растет с повышением порядка приближения. Например, во втором приближении  $k = 1, 2, 3$  система уравнений для определения  $a_k$  и  $b_k$  имеет вид

$$\begin{aligned} [(1-\alpha)/2]b_1 &= -a_1, \quad [(1-\alpha)/2]b_3 = -a_3, \\ [(1+\alpha)/2]b_1 &= u_0 - 2a_1\lambda_2\varepsilon^2 - 12a_3\lambda_5\varepsilon^5, \quad [(1+\alpha)/2]b_3 = -a_1\lambda_4\varepsilon^4 - \\ &\quad - 10a_3\lambda_6\varepsilon^6, \end{aligned}$$

$$\text{где } \lambda_t = \sum_{\substack{n=-\infty, p=-\infty \\ n \neq 0, p \neq 0}}^* \left( \frac{1}{n + ip} \right)^t.$$

Здесь звездочка над знаком суммы означает отсутствие в сумме нулевого члена  $n = p = 0$ . Необходимо отметить, что коэффициенты  $\lambda_t$  быстро



Ф и г. 1

убывают с ростом  $t$ , а последовательные приближения хорошо сходятся даже при  $\varepsilon \rightarrow 1/2$ .

Представляет интерес рассмотреть предельный переход к случаю, когда включения в среде являются редкими ( $\varepsilon \ll 1/2$ ) и абсолютно непроницаемыми ( $\alpha \rightarrow \infty$ ). В этом случае  $\varphi_1 \rightarrow b_1 z \rightarrow 0$ , так как  $b_1 \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , а  $\varphi_0 \rightarrow u_0 z + a_1/z$ , где  $a_1 = u_0(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ . Таким образом, при предельном переходе полученное решение совпадает с известным решением задачи об обтекании цилиндра несжимаемой жидкостью [5]:  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_0 = u_0(1 + 1/z)$ .

В случае однородной среды ( $\alpha = 1$ ), как и следовало ожидать, решение определяет потенциальное течение жидкости со скоростью  $u_0$ . Необходимо отметить, что если концентрация включений не является малой, то величина  $u_0$  теряет свой физический смысл. Чтобы показать наличие этого эффекта, вычислим  $\langle q \rangle$  — величину фильтрационного потока, усредненного по макрообъему. Из симметрии задачи следует

$$\langle q \rangle = \frac{1}{l/2} \int_0^{l/2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \varphi_0 \Big|_{x=l/2} dy.$$

Воспользовавшись выражением (5), в третьем приближении получаем

$$(7) \quad \langle q \rangle = u_0 - 2a_1\beta_1\varepsilon^2 - 2a_3\beta_2\varepsilon^4,$$

где

$$\beta_1 = \sum_{n,p} \frac{\left(\frac{1}{2} - p\right)}{\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - n\right)^2} \approx 1,57; \quad a_1 = \frac{\alpha - 1}{2} b_1;$$

$$\beta_2 = \sum_{n,p} \frac{\left(\frac{1}{2} - p\right) \left[ 3\left(\frac{1}{2} - n\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - p\right)^2 \right]}{\left[ \left(\frac{1}{2} - n\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - p\right)^2 \right]^3} \approx 1,65 \cdot 10^{-2}; \quad a_3 = \frac{\alpha - 1}{2} b_3.$$

Из выражения (7) видно, что при малых концентрациях включений ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) величина  $u_0$  совпадает с  $\langle q \rangle$  и имеет смысл среднего значения плотности потока в среде. В случае сильнопористой среды ( $\alpha = 0$ ) величины  $a_k < 0$ , и среднее значение плотности потока превышает величину  $u_0$ , которая теряет свой первоначальный физический смысл. В то же время потенциалы (5), (6) удовлетворяют решению задачи (1)–(3), но соответствуют случаю, когда среднее значение плотности потока определяется выражением (7).

**Эффективная проницаемость среды.** Для практических целей весьма важно бывает знать эффективный коэффициент проницаемости среды. Наиболее просто усреднение по макроскопическому объему  $V$  можно провести, воспользовавшись соотношением, приведенном в [1]:

$$\frac{1}{V} \int \left( q - \frac{k_0}{\mu} \nabla P \right) dv = \langle q \rangle - \frac{k_0}{\mu} \langle \nabla P \rangle,$$

где  $q(z)$  — фильтрационный поток вне и внутри включений;  $\langle q \rangle$  и  $\langle \nabla P \rangle$  — значения потока и градиента давления, усредненные по макрообъему. Подынтегральное значение отлично от нуля только внутри включений, концентрация которых равна  $N$ . В результате среднее значение градиента давления равно

$$\langle \nabla P \rangle = \frac{\mu}{k_0} \left[ \langle q \rangle - (k_1 - k_0) \frac{LN}{k_1} \right].$$

Здесь  $L = \int \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \varphi_1 dv$ , при этом интегрирование ведется не по всему макрообъему, а лишь внутри одного из включений. Соответственно эф-

эффективный коэффициент проницаемости среды определяется по формуле  $\langle K \rangle = \mu \langle q \rangle / \langle \nabla P \rangle$  и имеет вид

$$(8) \quad \langle K \rangle = k_0 \left[ 1 - \frac{(k_1 - k_0)}{k_1 \langle q \rangle} LN \right]^{-1},$$

где  $\langle q \rangle$  определяется выражением (7). Таким образом, для вычисления эффективной проницаемости необходимо знать значения коэффициентов в выражении (6). В первом приближении, удерживая в суммах (5), (6) лишь члены с  $k = 1$ , получаем  $b_1 = 2u_0/(\alpha + 1)$  и соответственно выражение для эффективного коэффициента проницаемости

$$(9) \quad \langle K \rangle = k_0 \left[ 1 - 2 \frac{k_1 - k_0}{k_1 + k_0} \frac{N\pi R^2}{\langle q \rangle} \right]^{-1},$$

где  $R$  — радиус включения. Выражение (9) при  $N\pi R^2 \ll 1$  дает известную формулу для эффективной проводимости среды с редкими не взаимодействующими круговыми включениями:

$$\langle K \rangle = k_0 \left[ 1 + 2 \frac{k_1 - k_0}{k_1 + k_0} N\pi R^2 \right].$$

Последующие приближения позволяют уточнить формулу (9) и получить выражение для случая, когда концентрация включений не является малой. Как легко показать, и для последующих приближений  $L = b_1 \pi R^2$ , однако значение  $b_1$  меняется:  $b_1 = 2u_0 (\alpha + 1) [(\alpha + 1)^2 - 3(\alpha - 1)^2 \lambda_4^2 \varepsilon^8]^{-1}$  во втором приближении,  $b_1 = 2u_0 (\alpha + 1) \left[ (\alpha + 1)^2 - \frac{3(\alpha - 1)^2 \lambda_4^2 \varepsilon^8 (\alpha + 1)^2}{(\alpha + 1)^2 - 735 \lambda_4^2 (\alpha - 1)^2 \varepsilon^{16}} \right]^{-1}$  в третьем приближении. Здесь  $\varepsilon = 1/l = R\sqrt{N}$ ;  $\lambda_4 \approx 3,247$ ;  $\lambda_8 \approx 2,068$ .

Представляет интерес рассмотреть предельный случай сильнопористой среды ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Формула, соответствующая этому случаю, имеет вид

$$(10) \quad \langle K \rangle = k_0 \left\{ 1 - \frac{2m_0}{[1 - 0,313m_0^4 (1 - 0,331m_0^8)^{-1}] [1 + 0,999m_0 + 0,0021m_0^4]} \right\}^{-1},$$

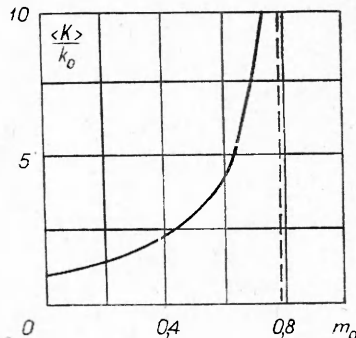
где  $m_0 = \pi R^2 N$  — пористость среды.

На фиг. 2 приведена величина  $\langle K \rangle / k_0$  приведенной эффективной проницаемости среды в зависимости от ее пористости. Из графика видно, что известная линейная зависимость (8) хорошо описывает эффективную проницаемость лишь для малопористых сред ( $m_0 < 0,1$ ). При  $m_0 \rightarrow \pi/4$  величина  $\langle K \rangle / k_0 \rightarrow \infty$ , а при  $m_0 = \pi/4$  включения соприкасаются между собой и происходит образование бесконечного кластера. При этом имеет место скачок проводимости. В случае системы с хаотическим распределением включений такой кластер образуется при значительно меньших значениях пористости [6].

Необходимо отметить, что формула (10) получена в предположении линейного закона Дарси, который нарушается при высоких скоростях фильтрации. В этом случае фильтрация может быть описана двучленным уравнением вида [7]

$$(11) \quad \nabla P = (\mu / \langle K \rangle) v + (\rho / k_0) v^2,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $v$  — скорость флюида. В случае, когда второй член в правой части уравнения (11) мал по сравнению с первым, уравнение (11) переходит в линейный закон Дарси. С увеличением скорости



Ф и г. 2

фильтрации квадратичный по скорости член растет быстрее линейного и с некоторого значения  $v_h$  становится главным. В уравнении, описывающем фильтрацию флюида с более высокими скоростями, уже необходимо учитывать инерционные члены.

Представляет интерес оценить границы применимости линейного закона Дарси для описания фильтрации в сильнопористой среде. Для этого необходимо знать коэффициент  $k_p$  в уравнении (11). Оценим его, воспользовавшись подходом, развитым в [7]. Согласно [7], квадратичный член связан с  $\nabla P_p$  — градиентом давления, необходимым для преодоления фильтрационного сопротивления, связанного со структурой среды — с сужением и расширением поровых каналов. Соответственно линейный член связан с градиентом давления  $\nabla P_\mu$ , необходимым для преодоления сопротивления внутреннего трения вязкой жидкости и силы трения о стенки поровых каналов, а полный градиент давления определяется суммой градиентов  $\nabla P_p$  и  $\nabla P_\mu$ .

Перепад давления  $\Delta P_p$ , связанный с внезапным расширением струи жидкости, согласно теореме Борда — Карно, определяется соотношением

$$\Delta P_p = (\rho/2)(u_c - u_p)^2,$$

где  $u_c$  — средняя скорость течения в узком участке канала;  $u_p$  — средняя скорость течения в расширенной части канала.

Учитывая, что характерное расстояние между порами в среде равно  $lR$ , можно оценить среднее значение градиента давления  $\nabla P_p$  в виде

$$(12) \quad \nabla P_p \approx (\rho/2lR)(u_c - u_p)^2.$$

Величина  $(u_c - u_p)$  для стационарного течения равна

$$(13) \quad u_c - u_p = \langle q \rangle (1/S_c - 1/S_p),$$

где  $S_c$  и  $S_p$  — площади просвета поровых каналов соответственно в узкой и расширенной частях течения. Вводя  $\langle 1/S \rangle$  (среднее значение величины  $1/S(x)$ , где  $S(x)$  — площадь просвета поровых каналов в сечении с координатой  $x$ ), среднее значение плотности потока в среде можно записать в виде

$$(14) \quad \langle q \rangle = (v/m_0) \langle 1/S \rangle.$$

Подставляя (13), (14) в (12) и сравнивая полученное выражение с формулой (11), получаем

$$(15) \quad k_p = 2lRm_0^2 \left( \frac{S_c S_p}{S_c + S_p} \langle \frac{1}{S} \rangle \right)^2.$$

Введем величину  $m_c$ , характеризующую пористость среды вне пор. Тогда величина  $S_c$  равна

$$S_c = m_c lR.$$

Величина  $S_p$  соответствует сечению, проходящему через центр поры:

$$S_p = 2[1 + (l - 1)m_c]R.$$

Проводя усреднение величины  $1/S(x)$  по элементарному объему, содержащему пору, получаем

$$\left\langle \frac{1}{S} \right\rangle = \frac{1 - 2\varepsilon}{Rl m_c} + \frac{1}{Rl(1 - m_c)} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \ln \frac{(a + 1 - \sqrt{1 - a^2})(1 + \sqrt{1 - a^2})}{(a + 1 + \sqrt{1 - a^2})(1 - \sqrt{1 - a^2})} \right],$$

где  $a = lm_c/2(1 - m_c)$ .

Подставляя полученные выражения для  $S_c$ ,  $S_p$  и  $\langle 1/S \rangle$  в формулу (15), получаем окончательное выражение для  $k_p$ , которое в случае  $lm_c \ll 1$  имеет вид

$$(16) \quad k_p \approx 2Rl m_0^2 \left\{ 1 - 2\varepsilon + m_c \frac{\pi}{2} \right\}^2.$$

Оценим скорость фильтрации  $v_k$ , при которой линейный и квадратичный члены в двучленном уравнении (11) оказываются равными. Используя зависимость (16), находим

$$(17) \quad v_k = \frac{2\mu R l m_0^2}{\langle K \rangle \rho_1} \left( 1 - 2\varepsilon + m_c \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Подставляя в формулу (17)  $\mu = 10^{-2}$  П,  $Rl = 10^{-3}$  м,  $m_0 = 0,636$ ,  $m_c = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 0,45$ ,  $k_0 = 10^{-1}$  Д и определяя значение  $\langle K \rangle/k_0$  из фиг. 2, получаем  $v_k \approx 10$  м/с.

Таким образом, увеличение пористости среды при  $m_0 \rightarrow \pi/4$  приводит к резкому росту эффективного коэффициента проницаемости  $\langle K \rangle$ , что в свою очередь при фиксированном перепаде давлений приводит к увеличению скорости фильтрации и росту квадратичного члена в двучленном уравнении фильтрации. В результате, начиная с некоторого значения скорости, квадратичный член становится главным и дальнейшее увеличение  $\langle K \rangle$  практически не влияет на скорость фильтрации.

Полученные в работе зависимости позволяют не только определять эффективную проводимость среды с круговыми включениями произвольной концентрации, но и получать аналитическое решение плоской задачи фильтрации в среде с трансляционной симметрией включений. Аналитическое решение может быть получено с любой точностью. Приведенное в данной работе решение получено в третьем приближении с точностью  $\sim \varepsilon^3$ . Используемый метод можно применить и для решения задач проводимости в среде с включениями произвольной формы. Весьма интересным оказывается тот факт, что в случае, когда концентрация включений не является малой, величина  $u_0$ , характеризующая плотность потока на бесконечности в случае задачи с редкими включениями, теряет свой первоначальный физический смысл и получаемое решение соответствует фильтрации в среде потока со средней плотностью, отличной от  $u_0$ . Отметим, что такой эффект имеет место и при рассмотрении процессов переноса в кристаллической решетке. Этот факт необходимо учитывать и при рассмотрении задач упругости, для решения которых и был первоначально разработан метод, использованный в данной работе.

Автор выражает благодарность В. С. Фетисову, обратившему внимание на вопрос, связанный с физическим смыслом плотности потока, задаваемого на бесконечности в случае среды с трансляционной симметрией включений.

Поступила 29 IV 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959.
2. Бувич Ю. А., Марков В. Г. О стационарном переносе в волокнистых композитных материалах. — ИФЖ, 1979, т. 36, № 5.
3. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Донецк: изд. ДГУ, 1975.
4. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк: изд. ДГУ, 1972.
5. Гуссейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М.: Недра, 1965.
6. Дульнев Г. Н., Новиков В. В. Проводимость неоднородных систем. — ИФЖ, 1979, т. 36, № 5.
7. Пыхачев Г. В., Исачев Р. Г. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1973.