

САМОВОСПЛАМЕНЕНИЕ В ЛАМИНАРНОМ СЛОЕ СМЕШЕНИЯ РЕАГЕНТОВ

А. И. Кузьмин, С. С. Харченко

РНЦ «Прикладная химия», 197198 Санкт-Петербург

На основе уравнений пограничного слоя исследовано воспламенение в ламинарном слое смешения реагентов. С использованием ряда допущений получены аналитические решения. Проведены расчеты по полученным уравнениям и формулам, а также по модели пограничного слоя, установлено их хорошее соответствие. Исследованы общие закономерности воспламенения в слое смешения.

ВВЕДЕНИЕ

Для оценки задержки воспламенения обычно используют численные методы, позволяющие при наличии необходимой кинетической информации моделировать воспламенение. Но при этом остается нерешенным ряд вопросов — выбор определяющих параметров и способа обработки результатов численного (или физического) эксперимента, выявление общих закономерностей. Для их решения необходимы теоретические исследования. Кроме того, для расчета устройств с горением желательны иметь простые формулы, чтобы быстро проводить соответствующие оценки. Наличие таких формул позволило бы решить и обратную задачу: по задержке воспламенения, определенной в экспериментах по воспламенению в слое смешения, найти кинетические константы реакции.

Весьма важным и неочевидным вопросом при описании воспламенения является выбор его критерия. В качестве такового в [1] (повидимому, первой работе, посвященной данной теме) было предложено рассматривать появление локального максимума на профиле температур. В [2, 3] указано на неудовлетворительность данного критерия.

В [4] критерием воспламенения служит стремление к бесконечности температуры или ее производной, которое появляется при определенном упрощении исходного уравнения. Достоинство такого подхода в том, что выделяются присущие задаче особенности, недостаток — неуниверсальность (особенности выделяются для отдельных предельных случаев).

Исследование воспламенения в турбулентном слое смешения полубесконечных потоков горючего и окислителя, и в частности анализ различных критериев воспламенения, проведе-

ны в [3]. Результаты получены на основе численного интегрирования уравнений пограничного слоя. Помимо использованного в [1] критерия, основанного на появлении локального максимума на профиле температуры, рассматривались еще три критерия. Численные расчеты в [3] показали, что продольные и поперечные координаты точки воспламенения, определенные по этим трем критериям, достаточно близки. Наиболее физически обоснованным признан следующий критерий: воспламенение происходит в точке, где максимальная в сечении скорость тепловыделения в e раз больше ее значения в этой же точке, рассчитанного по параметрам химически замороженного течения. Этот критерий используется в настоящей работе.

Для теоретического анализа рассматриваемой проблемы использован ряд приближенных методов: разложение в степенной ряд по продольной координате [1], метод итераций [2], асимптотический анализ [4, 5], локальная автомодельность [5]. Исследован случай с несколькими реакциями (см. [6] и приведенную там библиографию). Тем не менее в литературе не удалось найти теорию, полностью соответствующую потребностям практики, т. е. дающую алгебраические выражения для задержки воспламенения, пригодные для любого значения разницы температур и скоростей потоков. Нет ясности с определяющими критериями рассматриваемого процесса.

Цель данной работы — разработка приближенного метода определения задержки воспламенения, анализ основных параметров, вывод общего соотношения для длины задержки воспламенения в ламинарном слое смешения двух полубесконечных потоков и проверка его применимости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется самовоспламенение в системе смешивающихся струй горючего и окислителя. Предполагается тепловой механизм воспламенения. Потери тепла в газовых потоках не учитываются. Горение описывается элементарной необратимой реакцией вида

Горючее + окислитель → продукты реакции, скорость которой подчиняется зависимости арениусовского типа. Числа Льюиса для всех компонентов полагаются равными единице.

Потоки существенно дозвуковые. Соответственно кинетическая энергия потока много меньше тепловой, и выделением тепла за счет трения можно пренебречь.

В приближении пограничного слоя уравнения неразрывности, движения, энергии и сохранения компонентов выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \rho W \Delta Q, \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) - \rho W, \quad (4)$$

$$\rho u \frac{\partial Y_2}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right) - \Psi \rho W. \quad (5)$$

Здесь ρ — плотность; u, v — продольная и поперечная скорости; x, y — продольная и поперечная координаты; μ — вязкость; Pr — число Прандтля; ΔQ — тепловой эффект реакции; Ψ — массовый стехиометрический коэффициент; Y_1, Y_2 — массовые концентрации окислителя и горючего; W — скорость реакции; h — удельная энтальпия смеси, $h = \int c_p dT$, c_p — удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении; T — температура.

Система уравнений (1)–(5) дополняется уравнением состояния

$$p = \rho RT/m, \quad (6)$$

где m — молекулярная масса, R — газовая постоянная. Начальные условия:

$$x = 0, \quad -\infty < y < 0: \quad u = U_{1,0}, \quad T = T_{1,0}, \\ Y_2 = 0, \quad Y_1 = Y_{1,0};$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y < +\infty: \quad u = U_{2,0}, \quad T = T_{2,0}, \\ Y_2 = Y_{2,0}, \quad Y_1 = 0.$$

Граничные условия:

$$y = -\infty: \quad u = U_{1,0}, \quad v = 0, \quad T = T_{1,0}, \\ Y_2 = 0, \quad Y_1 = Y_{1,0};$$

$$y = +\infty: \quad u = U_{2,0}, \quad v = 0, \quad T = T_{2,0}, \\ Y_2 = Y_{2,0}, \quad Y_1 = 0.$$

Здесь $U_{1,2}$ — начальные скорости потоков. Для определенности полагаем, что окислитель подается в потоке 1, а горючее в потоке 2, $T_{1,0} \geq T_{2,0}$.

В численных расчетах по приведенной системе уравнений вязкость и теплопроводность определяли по формулам молекулярно-кинетической теории газов. Скорость реакции находили по формуле

$$W = m_1 A \left(\frac{\rho Y_1}{m_1} \right)^a \left(\frac{\rho Y_2}{m_2} \right)^b \exp \left(- \frac{E}{RT} \right). \quad (7)$$

При определении положения точки воспламенения пользовались критерием, указанным выше, в соответствии с которым

$$W/W_f = e, \quad (8)$$

где W_f — скорость реакции, рассчитанная по параметрам химически замороженного течения.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Приведем уравнения (1)–(7) к безразмерному виду. В качестве масштаба продольной координаты используем характерную длину горения, рассчитанную по параметрам горячего потока:

$$\Lambda_B = \frac{c_p T_{1,0}}{\Delta Q} \frac{RT_{1,0}}{E} \frac{U_{1,0}}{W_0}.$$

Здесь

$$W_0 = A m_f \left(\frac{\rho_{1,0} Y_{1,0}}{m_1} \right)^a \left(\frac{\rho_{1,0} Y_{2,0}}{m_2} \right)^b \exp \left(- \frac{E}{RT_{1,0}} \right),$$

где m_f — молекулярная масса замороженного потока. Введем безразмерные величины:

$$\bar{x} = \frac{x}{\Lambda_B}, \quad \bar{y} = \frac{y Re^{1/2}}{\Lambda_B}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{1,0}}, \quad \bar{v} = \frac{v Re^{1/2}}{U_{1,0}}, \\ T = \frac{T}{T_{1,0}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{1,0}}, \quad Re = \frac{\rho_{1,0} U_{1,0} \Lambda_B}{\mu_{1,0}}.$$

В дальнейшем будем использовать обычные для подобных задач предположения (подчеркнем, что при численном решении уравнений (1)–(6) они не используются).

1. Теплоемкость компонентов одинакова и постоянна.

2. Изменение молекулярной массы смеси в реакции не учитывается.

3. Произведение $\rho\mu$ считается постоянным.

Перейдем к новым переменным ξ и η , используя преобразование Дородницына:

$$\xi = \bar{x}, \quad \eta = \int_0^y \rho dy.$$

В результате принятых допущений система уравнений (1)–(6) преобразуется в следующую:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0, \quad (9)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \quad (10)$$

$$\bar{u} \frac{\partial f_i}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial f_i}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta^2} + \frac{c_p T_{1,0}}{\Delta Q} \frac{RT_{1,0}}{E} \bar{W}. \quad (11)$$

Здесь $\bar{v} = \rho \bar{v} + (\partial \eta / \partial x) \bar{u}$; $W = W/W_0$; $f_i = c_p T / \Delta Q$, Y_1 / Ψ , Y_2 . В полученных уравнениях в силу предположения о постоянстве $\rho\mu$ отсутствует явная зависимость от вязкости газа. Справедливость такого допущения будет показана ниже при обсуждении результатов численного решения исходных уравнений (1)–(6).

Отсутствие явной зависимости от вязкости приводит к тому, что распределение скоростей газа не зависит от концентраций и распределения температуры: уравнения для скорости (9) и (10) решаются независимо и допускают автомодельное решение относительно переменной $\zeta = \eta / 2\xi^{1/2}$. При этом уравнения сводятся к уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$\varphi(0) = 0$; $\varphi'(-\infty) = 2$; $\varphi'(+\infty) = 2U_{2,0}/U_{1,0}$, где φ — безразмерная функция тока, $\varphi' = 2\bar{u}$, штрихи означают дифференцирование по ζ .

Таким образом, для определения профиля скорости имеем уравнение Блазиуса (12), для которого получено много численных и приближенных аналитических решений, в том числе и для слоя смешения [7]. Это позволяет считать распределение скорости известным, и задача сводится к решению уравнений (11) для температуры и концентраций реагентов. Воспользовавшись процедурой Шваба — Зельдовича, ее можно свести к решению одного нелинейного уравнения.

Введем безразмерную избыточную (относительно температуры химически замороженного течения T_f) температуру Θ и пассивную скалярную величину z :

$$\Theta = \frac{E(T - T_f)}{RT_{1,0}^2}, \quad z = \frac{Y_2 - (Y_1 - Y_{1,0})/\Psi}{Y_{2,0} + Y_{1,0}/\Psi}.$$

Из уравнений (11) для введенных функций получим уравнения в координатах ξ и ζ :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + Pr\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 4Pr\xi \left(\bar{u} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \bar{W} \right), \quad (13)$$

$$\frac{d^2 z}{d\zeta^2} + Pr\varphi \frac{dz}{d\zeta} = 0 \quad (14)$$

с начальными и граничными условиями

$$\Theta(0, \zeta) = 0, \quad \Theta(\zeta, -\infty) = 0, \quad \Theta(\xi, +\infty) = 0, \\ z(-\infty) = 0, \quad z(+\infty) = 1.$$

Решения уравнения (14) для величины z и ее производной имеют вид

$$z' = (\varphi'')^{Pr} / \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'')^{Pr} d\zeta, \quad (15)$$

$$z = 1 - \int_{\zeta}^{+\infty} (\varphi'')^{Pr} d\zeta / \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'')^{Pr} d\zeta, \quad (16)$$

или при $U_{1,0} = U_{2,0}$ ($\varphi' = \text{const}$) —

$$z' = \sqrt{Pr/\pi} \exp(-Pr\zeta^2), \quad (15')$$

$$z = 0,5(1 + \text{erf}(\sqrt{Pr}\zeta)). \quad (16')$$

Температура и концентрации выражаются через Θ и z следующим образом:

$$\frac{T}{T_{1,0}} = 1 - \frac{z\Delta T}{T_{1,0}} + \frac{\Theta\Delta Q}{c_p T_{1,0}},$$

$$\frac{Y_1}{Y_{1,0}} = 1 - z - \frac{\Theta\Psi}{Y_{1,0}}, \quad \frac{Y_2}{Y_{2,0}} = z - \frac{\Theta}{Y_{2,0}}.$$

Величина z является функцией только переменной ζ и монотонно растет от 0 до 1 для $\zeta \in [-\infty; +\infty]$. Это позволяет в уравнении (13) перейти от переменной ζ к переменной z . Используя уравнение (14), получаем

$$N(z) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \xi \left(\bar{u}(z) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \bar{W}(\xi, z) \right), \quad (17)$$

$$\Theta(0, z) = \Theta(\xi, 0) = \Theta(\xi, 1) = 0.$$

Здесь $N(z) = (z'/2\sqrt{Pr})^2$. Аналогичная величина — скалярная диссипация — используется в теории турбулентности [8], она описывает выравнивание неоднородностей за счет молекулярной диффузии. Коэффициент диффузии

здесь явно не присутствует в результате предположения $\bar{\rho}\bar{\mu} = 1$.

Для нахождения решения на начальном этапе развития горения используем итерационный метод [2]: левую часть (17) отнесем к n -й итерации, а правую — к $(n-1)$ -й. Его преимуществом является явное выражение для n -го приближения, если известно $(n-1)$ -е. Нулевое приближение соответствует $W = 0$, откуда из (17) с учетом граничных и начальных условий следует $\Theta^{(0)} \equiv 0$. Подставляя эту величину в правую часть уравнения (17) и решая его, получаем распределение Θ в первом приближении. Далее процедуру можно продолжить аналогичным образом. Как следует из [1, 2], большая часть участка до момента воспламенения хорошо описывается уже первым приближением:

$$\Theta^{(1)} = \xi \left(z \int_0^1 F(z) dz - \int_0^z F(z) dz \right), \quad (18)$$

$$F(z) = \int_0^z \frac{\bar{W}^{(1)}(z)}{N(z)} dz,$$

$W^{(1)}(z)$ — скорость реакции, рассчитанная по результатам нулевого приближения ($\Theta^{(0)} \equiv 0$),

$$W^{(1)} = (1-z)^a z^b \left(1 - \frac{z\Delta T}{T_{1,0}} \right)^{a-b} \exp \left(-\frac{\beta z}{1 - z\Delta T/T_{1,0}} \right), \quad (19)$$

где

$$\Delta T = T_{1,0} - T_{2,0}, \quad \beta = \frac{E}{RT_{1,0}} \frac{\Delta T}{T_{1,0}}. \quad (20)$$

Величина z в точке воспламенения определяется условием максимума тепловыделения в сечении. В первом приближении

$$\left. \frac{dW^{(1)}}{dz} \right|_{z_*} = 0, \quad \left. \frac{d^2W^{(1)}}{dz^2} \right|_{z_*} < 0. \quad (21)$$

При малой разнице температур комплексом $z\Delta T/T_{1,0}$ в (19) можно пренебречь. Правильная оценка скорости реакции наиболее важна в окрестности ее максимума. При большой начальной разнице температур, как вытекает из (19) и (21), $z_*\Delta T/T_{1,0} \sim RT_{1,0}/E$. Следовательно, при больших энергиях активации комплекс $z\Delta T/T_{1,0}$ мал в наиболее существенной области — зоне активного тепловыделения. Поэтому им можно пренебречь. Тогда

$$\bar{W}^{(1)} \approx (1-z)^a z^b \exp(-\beta z). \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем

$$z_* = (\beta + 2 - (\beta^2 + 4)^{1/2})/2\beta. \quad (23)$$

При $\beta \gg 1$

$$z_* = 1/\beta, \quad (24)$$

т. е. воспламенение происходит на «горячем» крае слоя смешения.

При малых значениях β (когда разность температур мала, но величина $E/RT_{1,0}$ остается большой)

$$z_* = 0,5 - \beta/8, \quad (25)$$

и координата точки воспламенения стремится к середине слоя смешения.

Длину задержки воспламенения определим, исходя из условия (8): в точке воспламенения $\bar{W}(\xi_*, z_*)/\bar{W}^{(1)}(z_*) = e$. Применяя преобразование Франк-Каменецкого и пренебрегая влиянием температуры в предэкспоненте, получим $W \sim \exp(\Theta - \beta z)$ и $W^{(1)} \sim \exp(-\beta z)$. Используя эти результаты, запишем приближенное соотношение для избыточной температуры Θ в точке воспламенения:

$$\Theta(\xi_*, z_*) = 1. \quad (26)$$

Оно эквивалентно следующему условию:

$$\frac{T_* - T_f}{T_{1,0}} = \frac{RT_{1,0}}{E},$$

т. е. при больших энергиях активации отклонение температуры от ее значения в химически замороженном течении мало вплоть до момента воспламенения и можно воспользоваться первым приближением для Θ . Тогда, приравняв правые части (18) и (26), получаем в первом приближении выражение для безразмерной задержки воспламенения:

$$\xi_* = \left(z_* \int_0^1 F(z) dz - \int_0^{z_*} F(z) dz \right)^{-1}. \quad (27)$$

Уравнения (21) и (27) определяют положение точки воспламенения в слое смешения согласно принятому критерию. Как видно из вышеприведенных соотношений, при принятых допущениях значение ξ_* определяется четырьмя безразмерными параметрами: комплексом β (20), разницей температур потоков $(T_{1,0} - T_{2,0})/T_{1,0}$, разницей скоростей потоков $(U_{1,0} - U_{2,0})/U_{1,0}$ и числом Прандтля (последние два определяют вид функции $N(z)$). Ниже будет показано, что влияние первого параметра преобладающее.

Для расчета координаты задержки воспламенения ξ требуется определить явный вид функции $N(z)$. Воспользуемся следующими соображениями. Функция $N(z)$ входит в подинтегральное выражение функции $F(z)$ вместе с безразмерной скоростью реакции $\bar{W}^{(1)}(z)$, имеющей куполообразную форму. При вычислении интеграла основной вклад дает сравнительно узкая зона около максимума тепловыделения. В этой области выражения (16) или (16') можно заменить линейным приближением: $z = z_* + z'_*\zeta$, где z'_* — значение производной $dz/d\zeta$ в точке максимального тепловыделения. При уменьшении начальной разницы температур ширина зоны, где в основном протекает реакция, растет, но при этом точка максимального тепловыделения смещается к центру слоя смещения, где линейное приближение для z является удовлетворительным. В итоге при вычислении интеграла функцию $N(z)$ можно считать постоянной величиной:

$$N(z) \approx N(z_*) = (z'_*/2\sqrt{Pr})^2. \quad (28)$$

Выражение (27) принимает вид

$$\xi_* = N(z_*) \left(z_* \int_0^1 \int_0^z \bar{W}^{(1)} dz - \int_0^{z_*} \int_0^z \bar{W}^{(1)} dz \right)^{-1}. \quad (29)$$

При сделанных упрощениях взятие интегралов в (29) при целых значениях порядков реакции a и b возможно аналитически. Для примера приведем выражение для случая, когда скорость реакции имеет первый порядок как по горючему, так и по окислителю ($a = b = 1$). Подставляя выражение для $\bar{W}^{(1)} = (1-z)z \exp(-\beta z)$ в (29) и дважды интегрируя, получаем

$$\xi_* = \beta^4 N(z_*) \{ \exp(-\beta z_*) (z_*^2 \beta^2 + \beta(4-\beta)z_* + 6-2\beta) + 2\beta - 6 - z_*(2 \exp(-\beta)(\beta+3) + 2\beta - 6) \}^{-1}. \quad (30)$$

Основное физическое условие справедливости этой формулы — $E/RT_{1,0} \gg 1$. В рамках данного подхода, в отличие от известных теорий, удается получить выражение для задержки воспламенения, пригодное для различных значений указанных выше определяющих параметров.

Предельные случаи на основе формул (24), (25), (30) будут рассмотрены ниже.

При $\beta \gg 1$, пренебрегая величинами, малы по сравнению с β , из (30) получим

$$\xi_* = \frac{\beta^3 N(z_*) e}{2e-3} \approx 1,1156 \beta^3 N(z_*). \quad (31)$$

Параметр $N(z_*)$ зависит от β и начальной разницы скоростей потоков. При равных скоростях потоков для больших значений β воспламенение происходит у края слоя смещения, при больших по абсолютной величине значениях автомоделной координаты ζ . Подобно [4] используем асимптотику для интеграла ошибок при больших значениях ζ :

$$\operatorname{erf}(\zeta Pr^{1/2}) \approx -1 - \frac{\exp(-Pr\zeta^2)}{\zeta Pr^{1/2} \pi^{1/2}}$$

и из (16') и (24) получим

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{0,5 \exp(-Pr\zeta_*^2)}{\zeta_* Pr^{1/2} \pi^{1/2}}. \quad (32)$$

Из выражения (15') с учетом (32) вытекает

$$(z'_*)^2 = 4Pr^2 \zeta_*^2 / \beta^2.$$

Тогда $N(z_*) = \chi^2 / \beta^2$, где $\chi^2 = (Pr^{1/2} \zeta_*)^2$ определяем из уравнения, следующего из (32):

$$\chi^2 = \ln(\beta/2\pi^{1/2}) - \ln \chi.$$

Полученный результат совпадает с [4].

В общем случае, когда скорости потоков различны, данный подход также применим. А именно, при больших значениях ζ $\varphi'' \approx A \exp(-(\zeta+B)^2)$ [9], где A и B — константы, зависящие от соотношения скоростей струй (при равных скоростях струй $B=0$). Подставляя данные выражения в (15) и (16), получим соотношения, отличающиеся от (15') и (16') только постоянными коэффициентами:

$$z' = \sqrt{\Gamma/\pi} \bar{A} \exp(-Pr(\zeta+B)^2),$$

$$z = 0,5 \bar{A} (1 + \operatorname{erf}(Pr^{1/2}(\zeta+B))),$$

$$\bar{A} = \sqrt{\pi/Pr} A^{Pr} / \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'')^{Pr} d\zeta.$$

Аналогично выводим

$$N(z_*) = \chi^2 / \beta^2, \quad (33)$$

где $\chi^2 = (Pr^{1/2}(\zeta+B))^2$ определяется из уравнения

$$\chi^2 = \ln(\bar{A}\beta/2\pi^{1/2}) - \ln \chi.$$

Коэффициент \bar{A} целиком определяется автомоделным профилем скорости в слое смещения и не зависит от распределения температуры, концентрации и кинетики протекающих реакций. Таким образом, зависимость $N(z_*)$ от β осталась принципиально такой же, как и в случае равных скоростей.

Таким образом, из (31) и (33) следует

$$\xi_* = C\chi^2\beta, \quad (34)$$

что совпадает с выводом работы [4] для $\beta \gg 1$, где этот результат получен для частного случая равных скоростей. Постоянная C , согласно (31), равна 1,1156. Значение, полученное обработкой результатов численных расчетов, дано ниже.

При малых значениях β (когда разница температур мала, но величина $E/RT_{1,0}$ остается большой) из (30) следует

$$\xi_* \approx 76,8N(z_*)/(2 - \beta).$$

При равных скоростях потоков, используя (28), разлагая функции в (15'), (16') по степеням ζ в окрестности $\zeta = 0$ и используя линейные приближения указанных уравнений, а также (25), получим $N(z_*) \approx (1/4\pi)(1 - \pi\beta^2/64)^2$. Тогда

$$\xi_* \approx 6,11(1 - \pi\beta^2/64)^2/(2 - \beta). \quad (35)$$

При разных скоростях вид функции $z'(z_*)$ определяется профилем скорости (автомодельным) и числом Прандтля согласно выражениям (15) и (16). При подобии профилей температуры и скорости ($Pr = 1$) $\bar{u} = 1 - z\Delta\bar{u}$ и $z'_* = u'_*/\Delta u$, где u'_* — производная скорости по автомодельной переменной ζ в точке воспламенения (лежащей в данном случае в окрестности $\zeta = 0$). Используя приведенные выше формулы, получим оценку

$$\xi_* \approx 19,2(u'_*)^2/(\Delta u)^2(2 - \beta).$$

Таким образом, воспламенение подчиняется общим закономерностям (23), (30). При предельных значениях β указанные закономерности упрощаются. При больших значениях β безразмерная длина задержки воспламенения линейно растет с увеличением β и воспламенение происходит на «горячем» краю слоя смешения. При $\beta \rightarrow 0$ координата ξ стремится к конечной величине, равной длине задержки воспламенения в потоке с постоянной по сечению температурой, воспламенение происходит вблизи центра слоя смешения.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СОПОСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Результаты расчетов по различным моделям представлены на рис. 1. Для расчетов по системе (1)–(6) взята модельная реакция первого порядка по обоим реагентам. Скорость реакции $1,2 \cdot 10^6 \exp(-10\,570/T)$ [м³/(моль · с)], тепловой эффект реакции $Q = 5,26 \cdot 10^5$ Дж/кг,

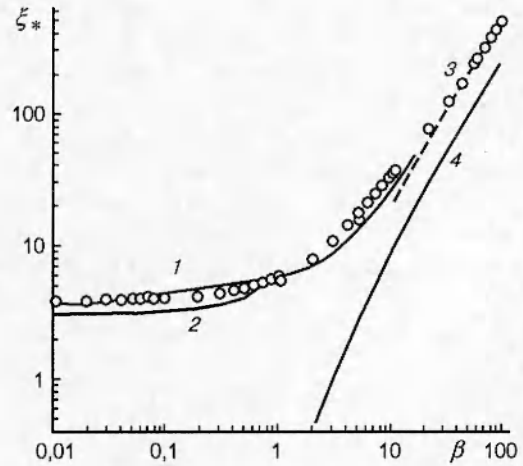


Рис. 1. Зависимость безразмерной задержки воспламенения от параметра β :

точки — численное решение уравнения (17); 1 — результаты численного решения системы уравнений (1)–(6), 2, 4 — расчет по формулам (34), (35), 3 — по формуле (35) с уточненным множителем

давление $p = 10^6$ Па. Для каждой точки проведено два расчета — без реакции и с реакцией. По результатам этих расчетов строили распределение W в расчетной области и определяли точку, где $W/W_f = e$ и значение W максимально в сечении. Расчеты показали, что вместо второго условия можно использовать положение абсолютного минимума (по продольной координате) кривой $W/W_f = e$.

При численном решении (17) (точки на рис. 1) каждый расчет проводили до тех пор, пока в одной из точек сечения не достигалось $\Theta = 1$. Расчеты выполнены для различных значений начальной разницы температур $\Delta T_0/T_{1,0}$ из интервала $0 \div 1$, однако с точностью до нескольких процентов результат целиком определялся параметром β .

Как видно из рис. 1, результаты аналитического исследования качественно полностью совпадают с численными. Для количественного совпадения при $\beta \gg 1$ постоянный множитель в (34) должен быть принят равным 2,07 (штриховая кривая на рис. 1). Напомним, что формула (34) получена в рамках итерационного метода и может быть уточнена переходом к следующему приближению.

Проведены расчеты по формулам (21), (27), их результаты также хорошо согласуются с результатами численного решения системы уравнений пограничного слоя.

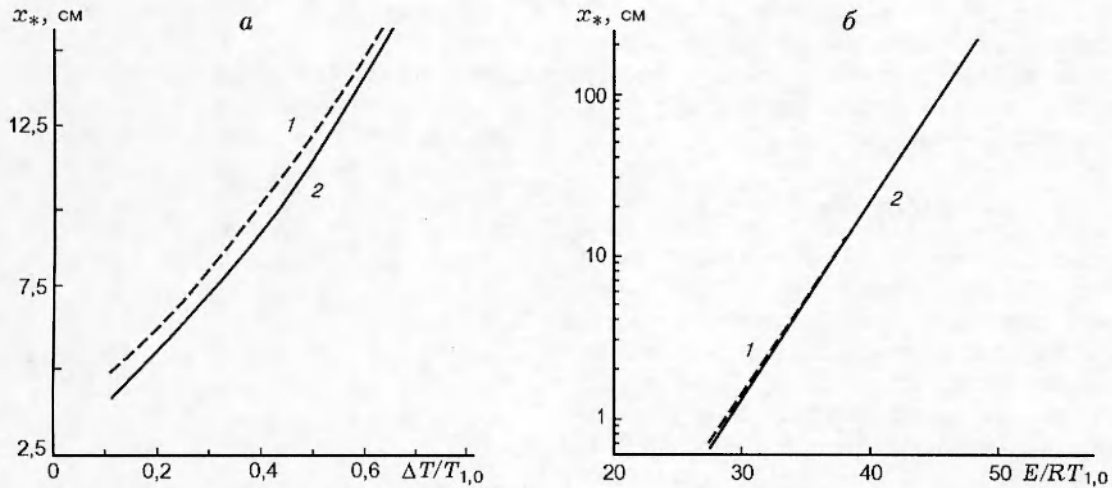


Рис. 2. Зависимость продольной координаты точки воспламенения от безразмерной разницы температур потоков (а) и от параметра $E/RT_{1,0}$ (б):

1 — численное решение системы (1)–(6); 2 — расчет по формуле (27)

Как уже отмечалось, в предположении постоянства $\rho\mu$ безразмерная длина задержки воспламенения ξ_* не зависит от вязкости газа. При переходе к размерным параметрам длина задержки воспламенения также не будет зависеть от вязкости, поскольку введенный масштаб продольной длины не содержит такой зависимости. Таким образом, при данном допущении от вязкости газа зависит лишь поперечная координата точки воспламенения. Этот факт ранее отмечался в [4]. Для проверки справедливости данного вывода были проведены расчеты зависимости задержки воспламенения от вязкости газа на основе исходной системы уравнений пограничного слоя. Результаты расчетов показали, что в широком интервале изменения вязкости (изменение на порядок) величина задержки воспламенения x_* меняется в пределах $1 \div 2\%$, что свидетельствует в пользу предположения о постоянстве $\rho\mu$.

Для получения задержки воспламенения в размерном виде величину ξ_* следует умножить на характерную длину реакции Λ_B . Размерная задержка воспламенения, разумеется, будет зависеть уже не только от комплекса β , но по отдельности от безразмерной энергии активации и безразмерной разницы температур потоков.

На рис. 2,а приведена зависимость положения точки воспламенения от безразмерной разницы температур потоков, полученная численным решением системы (1)–(6) и по формуле (27). При уменьшении этой разницы максимум

тепловыделения, а следовательно, и точка воспламенения, как следует из проведенного анализа и подтверждено расчетами, сдвигаются к центру слоя смешения, т. е. $\zeta_* \rightarrow 0$, $z_* \rightarrow 1/2$.

Зависимость положения точки воспламенения от параметра $E/RT_{1,0}$ показана на рис. 2,б. Эта зависимость имеет экспоненциальный характер в силу экспоненциальной зависимости характерной длины реагирования Λ_B от данного параметра.

Известно [5], что разница скоростей сверхзвуковых потоков сильно влияет на положение точки воспламенения. Расчеты, проведенные по системе уравнений (1)–(6) (рис. 3), пока-

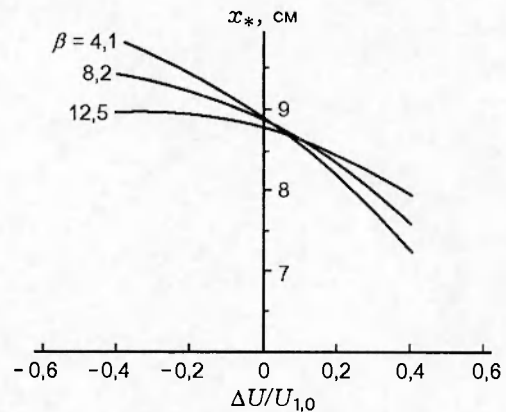


Рис. 3. Зависимость продольной координаты точки воспламенения от безразмерной разницы скоростей потоков

зали, что при числе Маха $M \rightarrow 0$ разница скоростей потоков оказывает относительно слабое влияние на задержку воспламенения. Роль этого фактора может оказаться заметной при малых значениях β (см. рис. 1).

ВЫВОДЫ

Построена теория для дозвуковых слоев смешения, которая, в отличие от известных, позволяет получить аналитические решения для определения всех основных параметров. При равных скоростях потоков безразмерная длина задержки воспламенения зависит практически от одного параметра β , при различных скоростях потоков — от разницы этих скоростей и числа Прандтля. Полученные формулы можно использовать для решения прямой задачи расчета задержки воспламенения по известной кинетической константе и для решения обратной задачи.

Авторы благодарят В. Б. Улыбина за обсуждение работы и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marble F. E., Adamson T. C., Jr. Ignition and combustion in a laminar mixing region // *Jet Propulsion*. 1954. V. 24. P. 85.
2. Вильямс Ф. А. Теория горения. М.: Наука, 1971.
3. Зимонт В. Л., Мещеряков Е. А., Сабельников В. А. Модели для расчета задержки воспламенения перемешанных газов в турбулентных потоках // *Физика горения и взрыва*. 1989. Т. 25, № 2. С. 7–16.
4. Linan A., Crespo A. An asymptotic analysis of unsteady diffusion flames for large activation energy // *Combust. Sci. Technol.* 1976. V. 14. P. 95–117.
5. Im H. G., Chao V. H., Bechtold J. K., Law C. K. Analysis of thermal ignition in a supersonic mixing layer // *AIAA Paper N 93-0449*. 1993.
6. Niioka T. An asymptotic analysis of branched-chain ignition of cold combustible gas by hot inert gas // *Combust. Flame*. 1989. V. 76. P. 143–149.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. Кузнецов В. Р., Сабельников В. А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986.
9. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1951. V. 4, N 1. P. 42–63.

*Поступила в редакцию 18/VIII 1997 г.,
в окончательном варианте — 6/VII 1998 г.*