ПМТФ, № 3, 1962

ОДНОМЕРНЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА, НЕСУЩЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, ПРИ НУЛЕВОМ ДАВЛЕНИИ

В. А. Левин

(Москва)

В работе найдены некоторые точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений холодной плазмы[1].

Систему уравнений одномерных неустановившихся движений холодной плазмы можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = \eta\,[E + F(r,t)], \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{u}{r^{\nu-1}}\frac{\partial r^{\nu-1}E}{\partial r} = 0 \qquad \left(\eta = \frac{e}{m}\right) \tag{1}$$

Здесь u — скорость, E — напряженность электрического поля, F — *внешняя* массовая сила (с ее помощью можно учитывать столкновение частиц плазмы, например, с нейтральными частицами), e — заряд частицы, m — масса, $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для движений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. Магнитное поле отсутствует вследствие одномерного характера движения.

Введем функцию $\psi = r^{\nu-1}E$ — заряд внутри сферы (цилиндра, плоского слоя) радиуса r. За независимое переменное примем ψ и u, а искомыми функциями [1] будем считать r, t.

В новых переменных система (1) приобретает вид

$$\frac{\partial r}{\partial u} = u\frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\partial t}{\partial u} = \eta^{-1}\left[\frac{\psi}{r^{\nu-1}} + F(r,t)\right]^{-1} \tag{2}$$

Для полученной системы уравнений в ряде случаев могут быть найдены точные решения.

Рассмотрим задачу о разлете заряженных частиц одного сорта в собственном электрическом поле. В этом случае $F(r,t) \equiv 0$ и общее решение системы (2), содержащее две произвольные функции, имеет вид:

$$r = \frac{u^2}{2\eta\psi} + F_1(\psi), \qquad t = \frac{u}{\eta\psi} + F_2(\psi) \qquad \text{при } \nu = 1$$

$$r = F_3(\psi)\exp\frac{u^2}{2\eta\psi}, \qquad t = \frac{F_3(\psi)}{\eta\psi}\int\limits_{u_1}^{u}\exp\frac{u^2}{2\eta\psi}\,du + F_4(\psi) \qquad \text{при } \nu = 2$$

$$r = \frac{2\eta\psi}{a^2 - u^2}, \qquad t = \frac{1}{F_5(\psi)}\left[\frac{u}{a^2-u^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u}\right] + F_6(\psi) \qquad \text{при } \nu = 3$$

$$(a^2 = 2\eta\psi F_5(\psi))$$

Пусть, например, в начальный момент однокомпонентная плазма занимает сферу (цилиндр, плоский слой) радиуса r_0, скорости частиц равны нулю и задано распределение объемного заряда ρ, т. е.

$$u = 0, \qquad \rho = \begin{cases} \rho_0 f(r/r_0) & (r \leqslant r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \qquad \text{при } t = 0 \tag{3}$$

---

[1] После того как настоящая работа была сдана в печать, появилась статья В. С. Ткалича, Н. В. Салтанова [5], в которой авторы также рассматривают нелинейные колебания холодной плазмы.

Изучим разлет частиц. Введем безразмерные величины

$$r = r_0 x, \qquad \psi = \frac{4\pi\rho_0}{\nu} r_0{}^\nu \theta, \qquad \rho = \rho_0 R, \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\rho_0\eta}}, \quad u = r_0\sqrt{4\pi\rho_0\eta}\,U \quad (4)$$

В новых переменных начальные условия имеют вид

$$U = 0, \qquad R = \begin{cases} f(x) & (x \leqslant 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases} \qquad \text{при } \tau = 0$$

$$\theta = \nu \int_0^x f(x)\, x^{\nu-1}\, dx = \Phi(x) \qquad \text{при } \tau = 0 \quad (5)$$

или

$$x = \varphi(\theta), \qquad \tau = 0 \quad \text{при } U = 0$$

Решение задачи о разлете с такими начальными условиями дается формулами

$$x = \frac{U^2}{2\theta} + \varphi(\theta), \qquad \tau = \frac{U}{\theta} \qquad \text{при } \nu = 1$$

$$x = \varphi(\theta) \exp\frac{U^2}{\theta}, \qquad \tau = \frac{2\varphi(\theta)}{\theta} \int_0^U \exp\frac{U^2}{\theta}\, dU \qquad \text{при } \nu = 2 \quad (6)$$

$$x = \frac{2}{3}\theta \frac{1}{\Theta(\theta) - U^2}, \qquad \tau = \varphi(\theta)\left\{\frac{U}{\Theta(\theta) - U^2} + \frac{1}{2\sqrt{\Theta(\theta)}} \ln\frac{\sqrt{\Theta(\theta)} + U}{\sqrt{\Theta(\theta)} - U}\right\} \text{ при } \nu = 3$$

$$\Theta(\theta) = \frac{2\theta}{3\varphi(\theta)}$$

Здесь θ меняется в интервале $(0, \theta_0)$

$$\theta_0 = \nu \int_0^1 f(x)\, x^{\nu-1}\, dx$$

Задавая θ из этого интервала, находим скорость сферической поверхности, заряд внутри которой равен θ. Скорость движения границы получаем, полагая $\theta = \theta_0$. В случаях $\nu = 1{,}2$ скорость границы растет неограниченно. При $\nu = 3$ скорость возрастает, стремясь к конечному пределу, равному $(^2/_3\theta_0)^{1/2}$. При $\nu = 3$ закон распространения фронта разлетающихся частиц имеет вид

$$\tau = \left(\frac{3}{2\theta_0}\right)^{1/2} \left[x(1 - x^{-1})^{1/2} + \frac{1}{2} \ln\frac{1 + (1 - x^{-1})^{1/2}}{1 - (1 - x^{-1})^{1/2}}\right] \quad (7)$$

Для возможности пользования полученными формулами максимальная скорость частиц должна быть много меньше скорости света. Это накладывает ограничение на начальный размер области, занятой частицами, и начальную плотность ρ_0. Для того чтобы избавиться от ограничения на скорости частиц, надо учитывать релятивистские эффекты.

Уравнения (2) с учетом релятивистских эффектов имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial u} = u \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{r^{\nu-1}}{\eta\psi}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} \quad (8)$$

Для этой системы также можно получить общее решение. Введем безразмерные величины

$$u = cU, \qquad r = r_0 x, \qquad \psi = \frac{c^2}{\eta r_0} r_0{}^{\nu-1}\theta, \qquad t = \frac{r_0}{c}\tau \quad (9)$$

Интегрируя уравнения (8) при начальных условиях

$$u = 0, \qquad \rho = \begin{cases} \rho_0 & (r \leqslant r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \qquad \text{при } t = 0 \quad (10)$$

или в безразмерном виде

$$U = 0, \qquad \theta = \alpha^\nu x^\nu, \qquad \tau = 0 \qquad \left(\alpha^\nu = \frac{4\pi\rho_0\eta r_0^2}{\nu c^2}\right)$$

получим решение в следующей форме: (11)

$$\tau = \frac{U}{\theta}(1-U^2)^{-1/2}, \qquad x = \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\theta}\left[(1-U^2)^{-1/2} - 1\right] \qquad \text{при } \nu = 1$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha\sqrt{\theta}} \int\limits_0^U (1-U^2)^{-3/2} \exp\frac{(1-U^2)^{-1/2}-1}{\theta}\, dU, \qquad x = \frac{\sqrt{\theta}}{\alpha} \exp\frac{(1-U^2)^{-1/2}-1}{\theta}$$

$$\text{при } \nu = 2$$

Из этих формул видно, что предельной скоростью разлета будет скорость света $U \to 1$ при $x \to \infty$ и $\tau \to \infty$. При $U \ll 1$ эти выражения переходят в выражения (6). Чтобы найти скорость распространений границы $U_ф$, выразим скорость через заряд и координату и положим величину заряда равной полному заряду, т. е. $\theta = \alpha^\nu$. Далее найдем

$$U_ф = [1 - (1 + \alpha(x-1))^{-2}]^{1/2} \qquad \text{при } \nu = 1$$

$$U_ф = \alpha\sqrt{\ln x}\,(1 + \alpha^2 \ln x)^{-1/2} \qquad \text{при } \nu = 2$$

Решая систему (8) при $\nu = 3$, получаем

$$x = \frac{\theta}{1 + \alpha\theta^{2/3} - (1-U^2)^{-1/2}}$$

$$\tau = \theta\left\{\frac{\sqrt{w^4 - (z+1)^2}}{(w^4-1)\,z} + (w^4-1)^{-3/2} \ln \frac{\sqrt{(w^4-1)[w^4-(z+1)^2]} + w^4 - 1 - z}{zw^2}\right\} \qquad (12)$$

$$w^2 = 1 + \alpha\theta^{2/3}, \qquad z = (1-U^2)^{1/2} w^2 - 1$$

Отсюда скорость найдется в виде

$$U = \{1 - x^2 [x(1 + \alpha\theta^{2/3}) - \theta]^{-2}\}^{1/2}$$

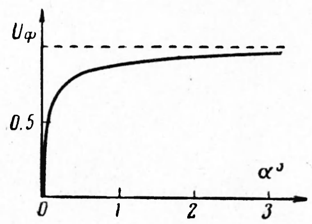
Предельное значение скорости всегда меньше единицы

$$U_{\lim} = [1 - (1 + \alpha\theta^{2/3})^{-2}]^{1/2}$$

Скорость фронта равна

$$U_ф = \{1 - x^2[x(1+\alpha^3) - \alpha^3]^{-2}\}^{1/2}$$

$$U_{ф\,\lim} = \frac{\sqrt{2\alpha^3 + \alpha^6}}{1 + \alpha^3} \qquad (13)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведена зависимость предельной скорости фронта от α^3.

Рассмотрим теперь колебания электронной плазмы в предположении, что ионы остаются неподвижными. В работах [2,3] решалась задача о нелинейных колебаниях электронной плазмы в случае плоских волн ($\nu = 1$) в предположении, что ионная решетка безгранична. Ниже исследуются нелинейные колебания электронной плазмы в цилиндрическом и сферическом случаях в той же постановке, а также в случае, когда ионы не заполняют все пространство.

Движение электронной плазмы в однородной безграничной ионной решетке описывается уравнениями (ρ_i — плотность ионов)

$$\frac{\partial r}{\partial u} = u\frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\psi}{r^{\nu-1}} + \frac{4\pi\rho_i r}{\nu}\right]^{-1} \qquad (14)$$

Пусть в начальный момент скорости электронов равны нулю и задано начальное распределение их плотности; примем для простоты

$$\rho_e = \begin{cases} \rho_0 & (r \leqslant r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \qquad \text{при } t = 0$$

В безразмерных переменных (4) уравнения (14) примут вид

$$\frac{\partial x}{\partial U} = U\frac{\partial \tau}{\partial U}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial U} = \frac{\nu x^{\nu-1}}{\theta - \beta^2 x^\nu}, \qquad \beta^2 = -\frac{\rho_i}{\rho_0} \qquad (15)$$

Начальные условия $\tau = 0$, $x = \theta^{1/\nu}$ при $U = 0$.

В случае $\nu = 2$ выражение для скорости

$$V^2 = \ln z - \frac{\beta^2}{2}(z^2 - 1), \qquad V = \frac{U}{\sqrt{\theta}}, \qquad z = \frac{x}{\sqrt{\theta}} \tag{16}$$

Для периода колебаний получим

$$T = 2\int\limits_1^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{\ln z - {}^1/_2\beta^2(z^2 - 1)}} \tag{17}$$

Здесь $z = 1$ и $z = z_2$ — корни уравнения $V = 0$.

Положение равновесия для заряда θ определяется выражением $z^\circ = 1/\beta$.

В случае $\beta = 1$ имеет место покой. Это следует из того, что уравнение $V = 0$ имеет один корень $z = 1$.

В случае $\beta > 1$ уравнение $V = 0$ имеет два различных корня $z_1 = 1$ и $z = z_2$, причем $z_2 > z^\circ$. Происходят колебания. Устремляя β к нулю, получим разлет цилиндрического столба заряженных частиц.

В случае $\beta > 1$ уравнение $V = 0$ имеет также два корня $z_1 = 1$ и $z_2 < z^\circ$. Период колебаний находится по формуле (17). Интеграл в этой формуле не выражается через элементарные функции.

Перейдем к случаю $\nu = 3$; для скорости имеем выражение

$$W^2 = \frac{\beta^2}{3z}(z - 1)\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 8} - \beta}{2\beta} - z\right)\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 8} + \beta}{2\beta} + z\right) \tag{18}$$

$$\left(W = \frac{U}{\theta^{1/3}}, \quad z = \frac{x}{\theta^{1/3}}\right)$$

Положение равновесия $z^\circ = \beta^{-2/3}$. Корни уравнения $W = 0$ будут

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 8} - \beta}{2\beta}$$

При $\beta = 1$ имеем положение равновесия, при этом $z_1 = z_2 = z^\circ = 1$. При $\beta < 1$ имеем $z_1 < z^\circ < z_2$, при $\beta > 1$ будет $z_1 > z^\circ > z_2$. В этих случаях плазма совершает колебания. В случае $\beta < 1$ плазма из начального положения расширяется, останавливается в точке z_2, а затем сжимается до первоначального положения, после чего все повторяется сначала.

В случае $\beta > 1$ происходит сжатие до остановки в положении, отличающемся от равновесия, затем плазма расширяется до первоначального положения. Период колебаний находится по формуле

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{\beta}\int\limits_1^{z_2} (z - 1)^{-1/2}(z_2 - z)^{-1/2}(z_2 + 1 + z)^{-1/2} z^{1/2}\, dz \tag{19}$$

Подстановка $z = (1 - t^2)^{-1}$ сводит интеграл к эллиптическому интегралу третьего рода. В работах [2,3] показано, что при $\nu = 1$ частоты линейных и нелинейных колебаний совпадают. В случаях $\nu = 2$, $\nu = 3$ частота нелинейных колебаний зависит от амплитуды [4].

Пусть теперь ионы занимают сферу радиуса r_1, их плотность постоянна и равна ρ_i. В начальный момент скорость электронов равна нулю и

$$\rho_e = \begin{cases} \rho_0 & (r \leqslant r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

Для простоты примем, что $r_1 \geqslant r_0$. Движение электронов описывается уравнениями и начальными условиями при $x \leqslant x_0 = r_1 / r_0$

$$\frac{\partial x}{\partial U} = U\frac{\partial \tau}{\partial U}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial U} = \frac{\nu x^{\nu - 1}}{\theta - \beta^2 x^\nu}, \quad \tau = 0, \quad x = \theta^{1/\nu}, \quad U = 0$$

при $x > x_0$ уравнениями

$$\frac{\partial x}{\partial U} = U\frac{\partial \tau}{\partial U}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial U} = \frac{\nu x^{\nu - 1}}{\theta - \beta^2 x_0^\nu}, \quad x = x_0, \quad U = U_0, \quad \tau = \tau_0 \tag{20}$$

Если $\beta^2 > 1$, то колебания электронов происходят внутри ионной сферы и никакого граничного эффекта нет.

Пусть $\beta^2 < 1$ (первоначальная плотность электронов больше плотности ионов).

При $\nu = 1$ решение системы (15) с соответствующими начальными условиями имеет вид

$$x = \theta\,[\beta^{-2} - (\beta^{-2} - 1)\cos\beta\tau], \qquad x_{\max} = \theta_0 (2/\beta^2 - 1)$$
$$U = \theta (1/\beta - 1)\sin\beta\tau \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0) \tag{21}$$

Здесь θ_0 — полный заряд электронов. Если $x_{\max} \leqslant x_0$, то электроны колеблются внутри ионного слоя. Если $x_{\max} > x_0$, то часть электронов вылетает за пределы его. Движение электронов за пределами слоя описывается системой (20). Ее решение имеет вид

$$\tau = \tau_0 + \frac{U - U_0}{\theta - \beta^2 x_0}, \qquad x = x_0 + \frac{U^2 - U_0^2}{2(\theta - \beta^2 x_0)} \tag{22}$$

Формулы (22) описывают поведение вылетевших частиц. Момент вылета τ_0 и скорость U_0 находятся из уравнений (21). Может оказаться, что суммарный заряд электронов больше суммарного заряда ионов, т. е. $\theta_0 > \beta^2 x_0$. В этом случае слой электронов с зарядом, большим $\beta^2 x_0$, улетает и оставшийся слой в целом становится нейтральным. Для значений θ, удовлетворяющих неравенствам

$$\beta^2 x_0 > \theta > \frac{x_0}{2/\beta^2 - 1} = \theta^*$$

частицы вылетают из слоя ионов, останавливаются и возвращаются назад, т. е. колеблются. Частицы с зарядом $0 \leqslant \theta \leqslant \theta^*$ не выходят из границ ионного слоя и колеблются внутри по формулам (21).

Необходимо заметить, что при $\theta \geqslant \beta^2 x_0$ и $\theta \leqslant \theta^*$ найденные решения пригодны в любой момент времени. При $\beta^2 x_0 > \theta > \theta^*$ найденное решение пригодно только до остановки соответствующих частиц ввиду того, что периоды колебаний разных частиц различные и с течением времени происходит перемешивание частиц.

Перейдем к случаю $\nu = 3$. Решение системы (15) имеет вид

$$U^2 = \frac{\beta^2}{3x}(x - \theta^{1/3})\left(\theta^{1/3}\frac{\sqrt{\beta^2+8} - \beta}{2\beta} - x\right)\left(\theta^{1/3}\frac{\sqrt{\beta^2+8} + \beta}{2\beta} + x\right)$$
$$\tau = \int_{\theta^{1/3}}^{x} \frac{dx}{U} \qquad \left(x_{\max} = \theta_0^{1/3}\frac{\sqrt{\beta^2+8} - \beta}{2\beta}\right) \tag{23}$$

Если $x_0 \geqslant x_{\max}$, то электроны колеблются внутри ионной сферы. Если $x_0 < x_{\max}$, то часть частиц покидает границы области. Электроны вылетают со скоростью U_0 в момент τ_0, где U_0 и τ_0 находятся из формул (23). Границы сферы покидают частицы, удовлетворяющие условию

$$\theta > 8\beta^3 x_0^3 (\sqrt{\beta^2 + 8} - \beta)^{-3} = \theta^*$$

При $0 \leqslant \theta \leqslant \theta^*$ электроны не выходят за пределы сферы и колеблются целиком внутри нее по формулам (23).

Решая систему (20), найдем ($\theta^\circ = \beta^2 x_0^3$ — равновесный заряд)

$$U^2 = U_0^2 + \tfrac{2}{3}(\theta - \theta^\circ)\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right) \tag{24}$$

При $x \to \infty$ величина U^2 стремится к конечному пределу, который будет неотрицателен, если $\theta \geqslant \vartheta$, где ϑ есть решение уравнения $\theta^\circ - {}^3/_2 x_0 U_0^2 = \vartheta$.

Решив это уравнение, найдем

$$\vartheta = \theta^\circ \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \beta\,(1 + \beta^2/2)^{-3/2} \tag{25}$$