

УДК 539.3

ИЗГИБ РАВНОНАПРЯЖЕННО-АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ИХ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: lab4nemir@rambler.ru

С использованием гипотез теории Рейсснера сформулирована задача равнонапряженного армирования (РА) поперечно изгибаемых упругих пластин волокнами с постоянным поперечным сечением. Выполнен анализ соответствующей системы разрешающих уравнений и граничных условий. Рассмотрены модельные задачи РА подвергаемых цилиндрическому изгибу прямоугольных удлиненных пластин при различных типах нагружения одной из продольных кромок и жестком закреплении другой. Показана возможность существования двух решений задачи РА, одно из которых является регулярным, а другое — сингулярным. Выявлены краевые эффекты, возникающие при наличии приложенного к кромке крутящего момента, который оказывает существенное влияние не только на напряженно-деформированное состояние связующего материала, но и на структуру армирования.

Ключевые слова: упругие пластины, равнонапряженное армирование, изгибное деформирование, теория Рейсснера, неединственность решения.

DOI: 10.15372/PMTF20170119

Введение. Одним из критериев рационального проектирования тонкостенных композитных элементов конструкций является условие равнонапряженности армирующих волокон вдоль их траекторий, так как несущая способность арматуры, обладающей, как правило, уникальными жесткостными и прочностными свойствами, используется при этом наиболее полно. Приведенный в [1, 2] обзор публикаций, посвященных проблеме равнонапряженного армирования (РА), показывает, что в большинстве работ рассматриваются плоские задачи теории упругости или теории безмоментных оболочек и лишь в незначительной части публикаций изучается задача РА изгибаемых пластин. При этом изгиб равнонапряженно-армированных пластин исследуется в рамках классической теории Кирхгофа [1, 3, 4]. Однако в случае сильно выраженной анизотропии композитного материала (например, при армировании полимерных пластин высокомодульными борными и углеродными волокнами [5]) при изгибе тонкостенных элементов конструкций необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [6, 7]. При использовании классической теории такой учет невозможен, поэтому в данном случае, как правило,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00156-а).

© Янковский А. П., 2017

применяется теория Рейсснера — Миндлина [6, 7]. С помощью этой теории задача РА изгибаемых пластин до настоящего времени не исследовалась.

В данной работе приводится постановка линейно-упругой задачи РА изгибаемых пластин с использованием гипотез теории Рейсснера — Миндлина, выполняется анализ этой задачи и обсуждаются особенности ее решения.

1. Исходные уравнения и граничные условия. Рассматривается пластина постоянной толщины $2h$, удовлетворяющая гипотезам теории Рейсснера [6, 7]. С пластиной связана прямоугольная декартова система координат (x_1, x_2, x_3) , при этом отсчетная плоскость x_1x_2 ($x_3 = 0$) совмещена со срединной плоскостью. Пластина усилена N семействами волокон с постоянным поперечным сечением, расположенных в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости. Армирование по толщине конструкции (в направлении x_3) полагается квазиоднородным и регулярным. Пластина нагружена только в поперечном направлении x_3 , тепловое воздействие не учитывается. Прогибы считаются малыми. При таких условиях нагружения и армирования пластины в ней реализуется поперечный изгиб (мембранные деформации и напряжения отсутствуют). Система уравнений задачи РА в случае линейно-упругих материалов фаз композиции включает следующие уравнения и соотношения (используется структурная модель полиармированного элемента [8, 9]):

— уравнения равновесия [6–8]

$$\partial_1 M_{1i} + \partial_2 M_{i2} = F_{i3} \quad (i = 1, 2), \quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} = -p_3(x_1, x_2); \quad (1)$$

— кинематические соотношения [6, 7]

$$\varepsilon_{ii} = x_3 \partial_i \theta_i, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{x_3}{2} (\partial_i \theta_j + \partial_j \theta_i), \quad \varepsilon_{i3} = \frac{5}{8h^2} (h^2 - x_3^2) (\partial_i u_3 + \theta_i), \quad (2)$$

$$j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad |x_3| \leq h;$$

— определяющие уравнения [1, 8, 9]

$$\sigma_{ii} = aEa_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki}^2, \quad \sigma_{ij} = aEa_2 \varepsilon_{ij} + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad (3)$$

$$\sigma_{i3} = 2G_{i3} \varepsilon_{i3}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_k = E_k(\varepsilon_{11} l_{k1}^2 + \varepsilon_{22} l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{k1} l_{k2}), \quad 1 \leq k \leq N; \quad (4)$$

— условия равнонапряженности арматуры [1–4]

$$\sigma_k(x_1, x_2, h) = \sigma_k^0 = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N; \quad (5)$$

— условия постоянства поперечных сечений волокон [1–4]

$$\partial_1 (\omega_k l_{k1}) + \partial_2 (\omega_k l_{k2}) = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2; \quad (7)$$

$$a_1 = (1 - \nu^2)^{-1} = \text{const}, \quad a_2 = (1 + \nu)^{-1} = \text{const}, \quad a = 1 - \sum_k \omega_k, \quad (8)$$

$$l_{k1} = \cos \psi_k, \quad l_{k2} = \sin \psi_k \quad (1 \leq k \leq N);$$

$$\frac{1}{G_{i3}} = \frac{a}{G_0} + \sum_k \frac{\omega_k}{G_k} \quad (i = 1, 2), \quad G_0 = \frac{1}{2} Ea_2; \quad (9)$$

$\theta_i(x_1, x_2)$ — углы поворота нормали к срединной плоскости вокруг оси x_l , $l = 3 - i$, $i = 1, 2$; $u_3(x_1, x_2)$ — прогиб; p_3 — распределенная поперечная нагрузка, действующая на пластину; σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров осредненных напряжений и деформаций в пластине; σ_k — напряжения в волокнах k -го семейства; σ_k^0 — фиксированное значение напряжения в арматуре k -го семейства на верхней лицевой поверхности, при котором выполняется условие РА; ω_k , ψ_k — плотность и отсчитываемый от оси x_1 угол армирования волокнами k -го семейства; E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего изотропного материала; E_k , G_k — модули упругости первого и второго рода арматуры k -го семейства; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); по индексу k проводится суммирование от 1 до N . Величина ω_k должна удовлетворять неравенствам

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad \sum_k \omega_k \leq \omega_* < 1, \quad (10)$$

где ω_* — предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике $\omega_* \approx 0,7$).

Пусть область G , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром Γ , тогда на одной части этого контура, которую обозначим Γ_p , могут быть заданы статические граничные условия

$$M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_{nn}, \quad (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2) = M_{n\tau}, \quad (11)$$

$$F_{13}n_1 + F_{23}n_2 = F_{n3}, \quad n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,$$

а на другой части, которую обозначим Γ_u , — кинематические условия

$$u_3(\Gamma_u) = u_{30}, \quad \theta_i(\Gamma_u) = \theta_{i0}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь β — угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ ; M_{nn} , $M_{n\tau}$ — изгибающий и крутящий моменты, заданные на Γ_p ; F_{n3} — заданная на кромке поперечная сила; θ_{i0} — заданные на контуре Γ_u углы поворота нормали к срединной плоскости; u_{30} — заданный на кромке прогиб.

На той части контура Γ , на которой волокна k -го семейства входят в конструкцию и которую обозначим $\Gamma_{\omega k}$, необходимо задать краевые условия для плотности армирования [1, 3, 4]:

$$\omega_k(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

(ω_{0k} — заданные на $\Gamma_{\omega k}$ значения функций ω_k).

2. Система разрешающих уравнений и граничные условия. Согласно равенствам (2), (4), (5) выражения для напряжений в волокнах при поперечном изгибе равнонапряженно-армированной пластины можно представить в следующем виде:

$$\sigma_k(x_1, x_2, x_3) = x_3 \sigma_k^0 / h, \quad \sigma_k(x_1, x_2, -h) = -\sigma_k^0 = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad |x_3| \leq h. \quad (14)$$

После подстановки соотношений (2) в равенства (3), (4), а затем (3) — в выражения (7) и, наконец, (7) — в равенства (1) с учетом (6), (8), (9), (14) получаем уравнения равновесия и условия РА в обобщенных перемещениях

$$(-1)^i \sum_k \sigma_k^0 \omega_k l_{kj} \partial_s (\psi_k, \psi_k) + h E a_1 \partial_i [a(\partial_i \theta_i + \nu \partial_j \theta_j)] +$$

$$+ 0,5 h E a_2 \partial_j [a(\partial_i \theta_j + \partial_j \theta_i)] = 2,5 h^{-1} G_{i3} (\partial_i u_3 + \theta_i), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^2 \partial_i [G_{i3} (\partial_i u_3 + \theta_i)] = -0,6 h^{-1} p_3(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (16)$$

$$\partial_s (\psi_k, \theta_1) \cos \psi_k + \partial_s (\psi_k, \theta_2) \sin \psi_k = \varepsilon_k^0 / h, \quad \varepsilon_k^0 = \sigma_k^0 / E_k = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (17)$$

где $\partial_s (\psi_k, \cdot) = \cos \psi_k \partial_1 (\cdot) + \sin \psi_k \partial_2 (\cdot)$.

Статические граничные условия (11) после подстановки в них выражений (7) с учетом (2), (3), (8), (9), (14) можно записать в обобщенных перемещениях

$$\sum_k \sigma_k^0 \omega_k \cos^2(\psi_k - \beta) + ahEa_1[(\partial_1\theta_1 + \nu \partial_2\theta_2)n_1^2 + (\partial_2\theta_2 + \nu \partial_1\theta_1)n_2^2 + (1 - \nu)(\partial_1\theta_2 + \partial_2\theta_1)n_1n_2] = 1,5h^{-2}M_{nn}, \quad (18)$$

$$\sum_k \sigma_k^0 \omega_k \sin 2(\psi_k - \beta) + ahEa_2[2(\partial_2\theta_2 - \partial_1\theta_1)n_1n_2 + (\partial_1\theta_2 + \partial_2\theta_1)(n_1^2 - n_2^2)] = 3h^{-2}M_{n\tau};$$

$$\sum_{i=1}^2 n_i G_{i3}(\partial_i u_3 + \theta_i) = 0,6h^{-1}F_{n3}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (19)$$

Таким образом, система разрешающих уравнений задачи РА поперечно изгибаемых пластин, удовлетворяющих гипотезам теории Рейсснера, состоит из $2N + 3$ уравнений (6), (15)–(17) и замкнута относительно следующих неизвестных функций: обобщенных перемещений θ_1, θ_2 , прогиба u_3 и параметров РА ψ_k, ω_k ($1 \leq k \leq N$). Для однозначного интегрирования системы разрешающих уравнений на кромке пластины должны быть заданы граничные условия (12), (18), (19) и краевые условия (13). Решение сформулированной задачи РА должно удовлетворять физическим ограничениям (10).

Согласно (9) уравнение (16) содержит оператор Лапласа Δu_3 , поэтому независимо от равенств (6), (15), (17) в силу уравнения (16) система разрешающих уравнений имеет мнимые характеристики. Соотношения (6), (15), (17) не содержат старших производных от u_3 , и главные части их операторов формально совпадают с дифференциальными операторами в разрешающих уравнениях задачи РА для пластин, нагруженных в своей плоскости [1, 10]. Кроме того, нелинейные левые части граничных условий (18) также совпадают с операторами в статических граничных условиях [1, 10]. Поэтому для рассматриваемой задачи РА справедливы все результаты анализа системы разрешающих уравнений и соответствующих ей граничных условий, полученные в [1, 10]. В частности, система уравнений (6), (15)–(17) является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа [11], причем траектории армирующих волокон являются ее действительными характеристиками. Задача РА, представляющая собой обратную задачу механики композитов, может иметь несколько решений [1, 3, 4, 10, 12].

3. Случай цилиндрического изгиба. В качестве модельной задачи рассмотрим цилиндрический изгиб равнонапряженно-армированных пластин. Рассмотрим прямоугольную удлиненную пластину шириной L , нагружение, закрепление и структура армирования которой в продольном направлении не изменяются. Систему координат введем таким образом, чтобы ось x_2 была направлена вдоль пластины, а ось x_1 была перпендикулярна оси x_2 и расположена в плоскости пластины. При таких условиях решение задачи РА зависит только от переменной x_1 , поэтому во всех приведенных выше соотношениях производные от неизвестных функций по переменной x_2 следует приравнять к нулю. В результате на основе равенств (6), (15)–(17) получаем систему разрешающих обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих производные по переменной $x_1 \in [0, L]$, которой соответствуют граничные условия, также содержащие производные по переменной x_1 .

Пластины жестко закреплены на правой кромке, т. е. в кинематических граничных условиях (12) следует принять

$$u_{30} = 0, \quad \theta_{10} = \theta_{20} = 0 \quad (x_1 = L), \quad (20)$$

и нагружены на левой кромке, т. е. согласно (11) при $\beta = \pi$ имеем

$$M_{11} = M_{nn}, \quad M_{12} = M_{n\tau}, \quad F_{13} = -F_{n3} \quad (x_1 = 0). \quad (21)$$

При цилиндрическом изгибе функции

$$F_{13}(x_1) = -F_{n3} - \int_0^{x_1} p_3(x_1) dx_1, \quad M_{11}(x_1) = M_{nn} + \int_0^{x_1} F_{13}(x_1) dx_1 \quad (22)$$

являются известными.

Исследуем некоторые простейшие случаи нагружения равнонапряженно-армированных пластин. Пусть сначала пластина нагружена только изгибающим моментом M_{nn} ($p_3 \equiv 0$, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = 0$). Рассмотрим такую структуру РА, когда в пластине имеется два ($N = 2$) семейства арматуры, изготовленных из одного и того же материала ($E_1 = E_2$, $G_1 = G_2$, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$) и уложенных с одинаковой плотностью армирования ($\omega_1 = \omega_2$) симметрично относительно оси x_1 ($\psi_1 = -\psi_2$). Тогда из уравнений (1)–(6), (11) с учетом (8), (9), (22) следует

$$\theta_2 \equiv 0, \quad F_{23} \equiv 0, \quad F_{13} \equiv 0, \quad M_{12} \equiv 0, \quad \bar{M}_{11}(x_1) = \bar{M}_{nn} = \text{const} \neq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad (23)$$

$$2\omega_1 \cos^2 \psi_1 + \lambda a_1(1 - 2\omega_1)\bar{\varepsilon}_{11} = \bar{M}_{11}; \quad (24)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} \cos^2 \psi_1 = 1; \quad (25)$$

$$\omega_k \cos \psi_k = \omega_{0k} \cos \psi_{0k} = \omega_{*k} = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (26)$$

где ω_{*k} — некоторые постоянные интегрирования; $\bar{\varepsilon}_{11}$ — приведенная линейная деформация на верхней лицевой поверхности пластины; \bar{M}_{11} , \bar{M}_{nn} — безразмерные изгибающие моменты; λ — малый параметр в случае использования высокомодульной арматуры:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{h}{\varepsilon_1^0} \frac{d\theta_1}{dx_1}, \quad \bar{M}_{11} = \frac{3}{2} \frac{M_{11}}{h^2 \sigma_1^0}, \quad \bar{M}_{nn} = \frac{3}{2} \frac{M_{nn}}{h^2 \sigma_1^0}, \quad \lambda = \frac{E}{E_1}. \quad (27)$$

На левой кромке пластины зададим краевые условия (13), тогда в формуле (26) величина ψ_{0k} представляет собой угол армирования k -м семейством на кромке $x_1 = 0$. Следует отметить, что равенство (26) справедливо и в общем случае цилиндрического изгиба (т. е. при $\psi_1 \neq -\psi_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_{*1} \neq \omega_{*2}$).

В силу (23), (25) и краевого условия (13), где $\omega_{01} = \omega_{02}$, соотношение (24) можно преобразовать в равенство

$$2\omega_{01} \cos^4 \psi_{01} - \bar{M}_{nn} \cos^2 \psi_{01} + \lambda a_1(1 - 2\omega_{01}) = 0, \quad (28)$$

которое является квадратным уравнением относительно $\cos^2 \psi_{01}$, поэтому его корни должны удовлетворять условиям

$$0 < \cos^2 \psi_{01} \leq 1. \quad (29)$$

Если корни уравнения (28) не попадают в интервал (29), то рассматриваемая задача РА при заданных значениях величин ω_{01} , \bar{M}_{nn} , λ , a_1 не имеет решения. Если неравенства (29) выполняются, то задача РА имеет два решения относительно углов армирования ψ_{01} (два дополнительных решения уравнения (28) $\bar{\psi}_{01}$ тривиальны, так как $\bar{\psi}_{01} = -\psi_{01}$).

Поскольку в рассматриваемой задаче согласно (23) равенство (28) выполняется во всех точках пластины $x_1 \in [0, L]$, то задача РА имеет два решения (если они существуют), причем при $\lambda \rightarrow 0$ одно из решений уравнения (28) стремится к некоторому значению $\psi_{01}^{(1)} \rightarrow \psi_{01}^* \neq \pm\pi/2$, а второе решение $|\psi_{01}^{(2)}| \rightarrow \pi/2$. В последнем случае из (25) следует $|\bar{\varepsilon}_{11}^{(2)}| \rightarrow \infty$, поэтому второе решение можно назвать сингулярным, а первое — регулярным.

Если уравнение (28) решено, то из (25), (26) можно всюду в пластине определить $\omega_k = \omega_{01}$ ($k = 1, 2$), $\bar{\varepsilon}_{11} = \text{const}$, а затем, проинтегрировав с учетом (12), (20) первое

равенство (27), определить угол θ_1 . На основе (1)–(3), (7) в случае цилиндрического изгиба получаем

$$G_{13}(x_1) \left(\theta_1 + \frac{du_3}{dx_1} \right) = \frac{3}{5} \frac{F_{13}(x_1)}{h}; \quad (30)$$

$$F_{23}(x_1) = \frac{5}{3} h G_{23}(x_1) \theta_2(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (31)$$

Согласно (23) равенство (31) выполняется тождественно ($0 \equiv 0$), а из (30) с учетом (9), (23) следует

$$\frac{du_3}{dx_1} = -\theta_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (32)$$

Интегрируя (32) при известной функции θ_1 , с учетом (12), (20) определим прогиб u_3 в рассматриваемой задаче РА.

Поскольку уравнение (28) может иметь два различных корня, с использованием описанной выше схемы можно получить два набора независимых решений задачи РА.

Согласно формулам (25), (27), (28), (32) полученное решение совпадает с решением задачи РА, определяемым в рамках классической теории изгиба [1], так как в этом случае отсутствуют поперечная сила: $F_{13} \equiv 0$ (ослабленное сопротивление поперечному сдвигу не оказывает влияния на решение) и крутящий момент: $M_{12} \equiv 0$ (отсутствуют эффекты, учитываемые теорией Рейсснера).

Рассмотрим более сложную задачу. Пусть на левой кромке пластина нагружена не только изгибающим моментом M_{nn} , но и поперечной силой F_{n3} ($p_3 \equiv 0$, $M_{n\tau} = 0$). Для структуры армирования остаются справедливыми принятые выше допущения ($E_1 = E_2$, $G_1 = G_2$, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$, $\omega_1 = \omega_2$, $\psi_1 = -\psi_2$), тогда из уравнений (1)–(6) с учетом (8), (9), (22) следует

$$\begin{aligned} \theta_2 \equiv 0, \quad F_{23} \equiv 0, \quad M_{12} \equiv 0, \quad F_{13} = -F_{n3} = \text{const}, \\ M_{11}(x_1) = M_{nn} - F_{n3}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (33)$$

На основе (27), (33) можно сделать вывод, что на кромке $x_1 = 0$, как и в рассмотренной выше задаче, справедливо уравнение (28), решив которое можно определить значение угла армирования ψ_{01} . Подставляя ψ_{01} в (26), определяем постоянные интегрирования $\omega_{*1} = \omega_{*2}$. В силу (25), (26) с учетом (27), (33) при известном значении ω_{*1} равенство (24) преобразуется в уравнение

$$2\omega_{*1} \cos \psi_1 + \lambda a_1 (1 - 2\omega_{*1} \cos^{-1} \psi_1) \cos^{-2} \psi_1 = \bar{M}_{11}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (34)$$

Для получения регулярного решения уравнения (34) в каждой точке пластины можно использовать простую итерацию, перенеся в правую часть слагаемое с малым параметром λ и полагая, что функция $\psi_1(x_1)$ в этом слагаемом известна из решения, полученного на предыдущей итерации. На нулевой итерации в (34) можно отбросить слагаемое, содержащее множитель λ . (Как показывают расчеты, в случае использования высоко модульной арматуры, когда $\lambda \leq 0,1$, такой итерационный процесс всегда сходится. Для улучшения сходимости процесса может быть использована итерационная процедура Эйткена [13].)

Определив из (34) углы армирования $\psi_1(x_1)$, из равенств (26) можно вычислить плотности армирования $\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1)$, а из (25) — приведенную деформацию $\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) \neq \text{const}$. Интегрируя первое равенство (27) с учетом граничных условий (12), (20) при известной функции $\bar{\varepsilon}_{11}(x_1)$, определим угол $\theta_1(x_1)$ ($0 \leq x_1 \leq L$).

На основе равенства (30) с учетом (9), (12), (20), (33) при известных плотностях армирования ω_k получаем

$$u_3(x_1) = - \int_L^{x_1} \theta_1(x_1) dx_1 - \frac{3 F_{n3}}{5 h} \int_L^{x_1} \frac{dx_1}{G_{13}(x_1)}. \quad (35)$$

Таким образом, при заданных условиях нагружения (см. (33)) задача РА полностью решена. Так как уравнение (28), выполняющееся на кромке $x_1 = 0$, может иметь два нетривиальных решения, то и рассматриваемая задача РА может иметь два решения (одно сингулярное, а другое регулярное в силу введенного выше определения), причем такие же структуры РА получаются при исследовании этой задачи в рамках классической теории [1]. Единственное различие заключается в том, что при использовании теории Кирхгофа прогиб определяется по формуле (35), в которой следует перейти к пределу $G_{13} \rightarrow \infty$. Таким образом, при использовании в данной задаче теории Рейсснера получается уточненное выражение для прогиба, а структура РА остается прежней.

Рассмотрим случай нагружения, при котором классическая теория и теория Рейсснера дают принципиально разные структуры РА. Пусть пластина на кромке $x_1 = 0$ нагружена только моментами $M_{nn} \neq 0$, $M_{n\tau} \neq 0$ ($p_3 \equiv 0$, $F_{n3} = 0$), тогда на основе (22) получаем

$$F_{13} \equiv 0, \quad M_{11}(x_1) = M_{nn} = \text{const}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (36)$$

при этом $M_{12}(x_1) \neq \text{const}$ и крутящий момент не может быть определен независимо от угла $\theta_2(x_1) \neq 0$, т. е. задача является статически неопределимой.

Как и в рассмотренной выше задаче, будем считать, что пластина армирована двумя семействами волокон, изготовленных из одного и того же материала ($E_1 = E_2$, $G_1 = G_2$, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$). Однако в рамках теории Рейсснера структура РА не обладает симметрией ($\omega_1 \neq \omega_2$, $\psi_1 \neq -\psi_2$), а задача РА не сводится к конечным зависимостям, аналогичным (28), (34). Следовательно, в этом случае требуется рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемую из равенств (1)–(6) при отбрасывании производных по переменной x_2 , при граничных условиях (11) ($\beta = \pi$ в случае $x_1 = 0$) и при граничных условиях (12), (20) в случае $x_1 = L$. Получаемая при этом нелинейная двухточечная граничная задача может быть решена численно с помощью метода пристрелки [14], причем в качестве начальных параметров используются кинематические величины θ_1 , θ_2 , u_3 на кромке $x_1 = 0$. Значения этих величин подбираются таким образом, чтобы были выполнены кинематические граничные условия (12), (20) на кромке $x_1 = L$. В силу нелинейности статических граничных условий (заданных на кромке $x_1 = 0$) относительно углов армирования ψ_1 , ψ_2 такая задача РА также может иметь несколько решений.

Так как равномерно распределенный крутящий момент, заданный на кромке пластины, не вносит вклад в обобщенную поперечную силу Кирхгофа [15], то при использовании классической теории наличие или отсутствие на кромке $x_1 = 0$ момента $M_{n\tau} = \text{const}$ не влияет на решение задачи РА. Следовательно, в рамках теории Кирхгофа при условии $\omega_{01} = \omega_{02}$ в силу равенств (36) решение этой задачи РА определяется по формулам (28), (32), причем выполняются условия симметрии структур РА ($\omega_1 = \omega_2$, $\psi_1 = -\psi_2$).

4. Обсуждение результатов расчетов. Рассмотрим решения модельных задач для прямоугольных удлиненных пластин шириной $L = 1$ м и толщиной $2h = 10$ см, изготовленных из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим аммиаком ($E = 2,8$ ГПа, $\nu = 0,25$ [16]), и армированных двумя семействами углеродных волокон кулон ($E_1 = E_2 = 500$ ГПа, $G_1 = G_2 = 192,3$ ГПа [5]). Напряжения в арматуре на верхней лицевой стороне пластины зададим равными $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = 500$ МПа и потребуем, чтобы плотности армирования на кромке $x_1 = 0$ имели значения $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,2$.

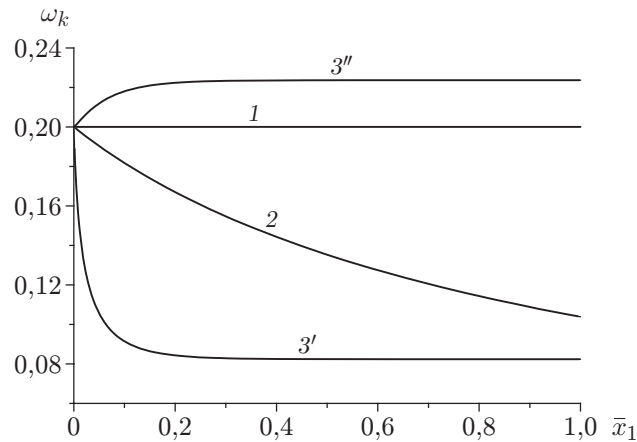


Рис. 1. Распределение плотности армирования в пластинах при цилиндрическом изгибе:

1 — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = 0$, $k = 1, 2$; 2 — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = -750$ кН/м, $k = 1, 2$; 3', 3'' — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0,04$ МН, $F_{n3} = 0$ (3' — $k = 1$, 3'' — $k = 2$)

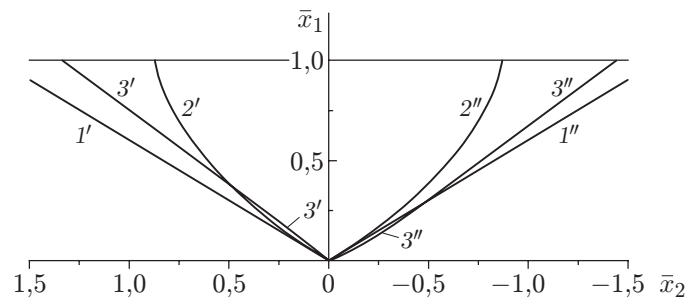


Рис. 2. Траектории волокон при равнонапряженном армировании пластин при цилиндрическом изгибе:

1', 1'' — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = 0$ (1' — $k = 1$, 1'' — $k = 2$); 2', 2'' — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = -750$ кН/м (2' — $k = 1$, 2'' — $k = 2$); 3', 3'' — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0,04$ МН, $F_{n3} = 0$ (3' — $k = 1$, 3'' — $k = 2$)

На рис. 1–4 приведены кривые, соответствующие регулярным решениям модельных задач для равнонапряженно-армированных пластин, выполненных из указанных выше материалов. В сингулярных решениях прогибы имеют порядок нескольких толщин, т. е. эти решения некорректны в рамках использованной геометрически линейной постановки задач РА и поэтому далее не обсуждаются. По координатным осям на рис. 1–4 отложены безразмерные величины $\bar{x}_k = x_k/L$, ω_k ($k = 1, 2$), $\bar{u}_3 = -u_3/(2h)$, θ_2 .

Кривые 1 на рис. 1–3 соответствуют решению рассматриваемой задачи РА, в случае когда на кромке $\bar{x}_1 = 0$ задан только изгибающий момент $M_{nn} = 0,1$ МН ($M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = 0$), а кромка $\bar{x}_1 = 1$ жестко закреплена. Решение этой задачи находится с использованием равенств (23)–(32), при этом выполняются условия симметрии структуры РА ($\omega_1 = \omega_2$, $\psi_1 = -\psi_2$), параметры армирования постоянны, поэтому линия 1 на рис. 1 является горизонтальной прямой.

На рис. 2 кривые 1'–3' соответствуют траекториям армирующих волокон первого семейства ($k = 1$), кривые 1''–3'' — траекториям армирующих волокон второго семейства ($k = 2$). Так как в рассматриваемом случае $\psi_1 = \psi_{01} = -\psi_2 = -\psi_{02} = \text{const}$, то траекто-

рии армирования являются прямолинейными и симметричными относительно оси $\bar{x}_2 = 0$ (линии $1', 1''$).

На рис. 2 представлены траектории, выходящие из точки $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$. Траектории других волокон получаются параллельным переносом вдоль оси \bar{x}_2 кривых, приведенных на рис. 2.

Кривые 2 на рис. 1–3 соответствуют решению задачи РА в том случае, когда на кромке $\bar{x}_1 = 0$ заданы изгибающий момент $M_{nn} = 0,1$ МН и поперечная сила $F_{n3} = -750$ кН/м ($M_{n\tau} = 0$). Структура РА и в этом случае обладает симметрией ($\omega_1 = \omega_2, \psi_1 = -\psi_2$), но неоднородна, а решение ищется по формулам (25), (26), (28), (34), (35). Как отмечено выше, при использовании в такой задаче РА теории Рейсснера получается уточненное выражение для прогиба (см. (35)), а структура армирования не меняется, поэтому на рис. 3 кривая 2 характеризует прогиб, полученный по уточненной теории, а линия $2'''$ — по классической теории. В данной задаче максимальная относительная разность прогибов, вычисленных по обеим теориям, по модулю не превышает 4 %, т. е. уточнение не является существенным.

Кривые $3', 3''$ на рис. 1, 2 представляют собой зависимости $\omega_k(\bar{x}_1)$ и траектории армирующих волокон первого ($k = 1$) и второго ($k = 2$) семейств, рассчитанные по теории Рейсснера, в случае когда на кромке $\bar{x}_1 = 0$ заданы моменты $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0,04$ МН ($F_{n3} = 0$). Кривая 3 на рис. 3 определяет прогиб такой пластины. Как отмечено выше, при таком нагружении пластины кривые 1, $1', 1''$ на рис. 1–3 соответствуют структуре РА и прогибу, вычисленным по классической теории, т. е. решение не зависит от крутящего момента $M_{n\tau}$.

Сравнение кривых $3', 3''$ с линией 1 на рис. 1 и кривых $3', 3''$ с линиями $1', 1''$ на рис. 2 показывает, что в рассматриваемой задаче структуры РА, определенные с использованием различных моделей деформирования, существенно различаются. Прогибы также значительно различаются (кривые 1, 3 на рис. 3), причем максимальный по модулю прогиб, вычисленный по классической теории (кривая 1), на 32,9 % больше прогиба, определенного с помощью уточненной теории (кривая 3).

На рис. 4 представлена зависимость $\theta_2(\bar{x}_1)$, полученная при решении данной задачи по теории Рейсснера. Из соотношений (2) следует, что при цилиндрическом изгибе ($\partial_2 u_3 = 0$) в срединной плоскости ($x_3 = 0$) поперечная сдвиговая деформация равна $\varepsilon_{23} = 5\theta_2/8$, поэтому график зависимости $\varepsilon_{23}(\bar{x}_1, 0)$ подобен кривой, показанной на рис. 4.

Из анализа поведения кривой на рис. 4 и линий $3', 3''$ на рис. 1 следует, что при наличии крутящего момента на кромке ($M_{n\tau} \neq 0$) решение задачи РА, полученное в рамках уточненной теории, имеет четко выраженный краевой эффект, который оказывает влияние как на напряженно-деформированное состояние связующего материала (см. рис. 4), так и на структуру РА (кривые $3', 3''$ на рис. 1, 2). Пограничный слой имеет толщину порядка двух толщин пластины. При использовании классической теории краевой эффект отсутствует (линия 1 на рис. 1).

Появление краевого эффекта при использовании уточненной теории в случае наличия крутящего момента $M_{n\tau} \neq 0$ является естественным, так как согласно принципу Сен-Венана в окрестности кромки крутящий момент создает дополнительное напряженно-деформированное состояние. В случае изотропного материала размер этой области в тонкостенной конструкции порядка ее толщины [15]. Если крутящий момент непостоянен вдоль кромки, то он оказывает влияние не только на краевой эффект, но и на основное напряженно-деформированное состояние такой конструкции [15].

Поскольку в данной работе, по сути, рассматривается обратная задача механики композитных конструкций, наличие даже однородного крутящего момента $M_{n\tau} = \text{const} \neq 0$, заданного на кромке пластины, оказывает существенное влияние на структуру армирова-

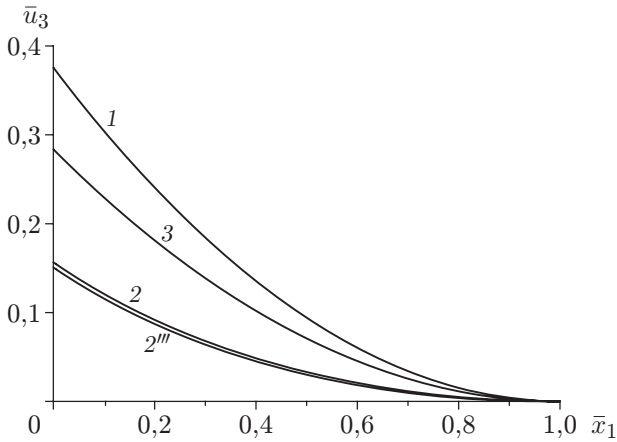


Рис. 3

Рис. 3. Распределение прогибов в равнонапряженно-армированных пластинах при цилиндрическом изгибе:

1 — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = 0$; 2, 2''' — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0$, $F_{n3} = -750$ кН/м (2 — расчет по теории Рейсснера, 2''' — расчет по классической теории); 3 — $M_{nn} = 0,1$ МН, $M_{n\tau} = 0,04$ МН, $F_{n3} = 0$

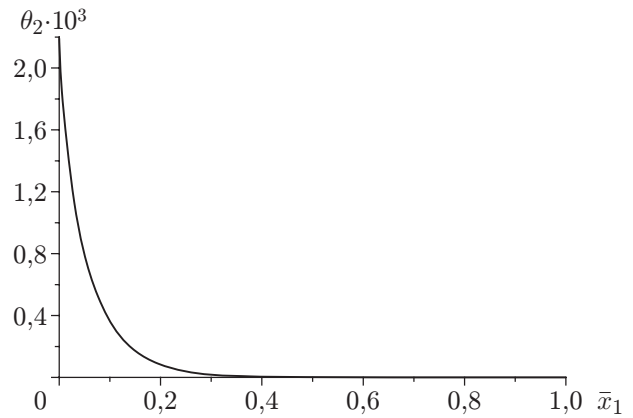


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость угла поворота нормали к срединной плоскости от координаты \bar{x}_1 при наличии крутящего момента на кромке пластины

ния (ср. кривые 1, 3', 3'' на рис. 1), что приводит к существенному изменению прогибов (ср. кривые 1, 3 на рис. 3).

Для всех полученных решений задачи РА выполняются ограничения (10) при $\omega_* = 0,7$ (см. рис. 1).

Заключение. Сформулированная в рамках гипотез теории Рейсснера — Миндлина задача РА изгибаемых упругих пластин позволяет учитывать не только их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, но и влияние крутящих моментов, заданных на кромках, на напряженно-деформированное состояние пластины. Это позволяет получать структуры РА, учитывающие особенности нагружения тонкостенных элементов конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В.** Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 2002.
2. **Голушко С. К.** Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. М.: Физматлит, 2008.
3. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О некоторых свойствах решения задачи поперечного изгиба пластины с равнонапряженной арматурой // Механика композиц. материалов и конструкций. 1996. Т. 2, № 2. С. 15–28.
4. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Применение методов теории возмущений в задачах поперечного изгиба пластин с равнонапряженной арматурой // Механика композиц. материалов и конструкций. 1997. Т. 3, № 3. С. 3–22.
5. **Композиционные материалы:** Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.
6. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988.

7. **Карпов В. В.** Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010.
8. **Немировский Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
9. **Янковский А. П.** Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Механика композитных материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
10. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О некоторых свойствах решений плоских термоупругих задач рационального армирования композитных конструкций // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 2. С. 312–321.
11. **Джураев Т. Д.** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
12. **Баничук Н. В.** Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н. В. Баничук, В. В. Кобелев, Р. Б. Рикардс. М.: Машиностроение, 1988.
13. **Березин И. С.** Методы вычислений: В 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. М.: Физматгиз, 1966. Т. 1.
14. **Холл Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. М.: Мир, 1979.
15. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977.
16. **Справочник** по композиционным материалам: В 2 кн. Кн. 1. М.: Машиностроение, 1988.

*Поступила в редакцию 11/II 2015 г.,
в окончательном варианте — 27/XI 2015 г.*
