УДК 539.376

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Л. В. Степанова

Самарский государственный университет, 443011 Самара
E-mail: lst@ssu.samara.ru

Обсуждается проблема нахождения спектра собственных чисел в задаче определения полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим соотношением. Показано, что метод возмущений позволяет найти аналитическую зависимость собственного значения от показателя нелинейности материала и собственного числа линейной задачи. Таким образом, можно найти весь спектр собственных чисел, а не только собственное число задачи Хатчинсона — Райса — Розенгрена.

Ключевые слова: трещина антиплоского сдвига, степенные определяющие уравнения, собственное значение, спектр собственных чисел, метод возмущений.

1. Проблема определения собственных значений в нелинейной механике разрушения. В современной нелинейной механике разрушения при исследовании напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в материале с нелинейными определяющими уравнениями часто возникает задача на собственные значения. Например, при изучении полей напряжений и деформаций (скоростей деформаций) в материале со степенными определяющими соотношениями (степенной закон нелинейно-упругого деформирования, степенной закон упрочнения деформационной теории пластичности, закон Бейли — Нортона теории установившейся ползучести) методом разложения по собственным функциям необходимо найти решение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины и условиями симметрии на ее продолжении. Следует отметить, что получающаяся система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений содержит параметр (собственное значение), который необходимо определить для нахождения нетривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющего сформулированным граничным условиям. В нелинейной механике разрушения известно одно собственное число задачи Хатчинсона — Райса — Розенгрена [1, 2]. Поле напряжений в окрестности вершины трещины в материале со степенным законом упрочнения

$$\varepsilon_{ij} = (3/2)B\sigma_e^{n-1}s_{ij}, \tag{1.1}$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; σ_e — интенсивность напряжений; B — постоянная материала, определяемая экс-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-01059).

периментально; n — показатель нелинейности материала, представляется в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = (J/(BI_n r))^{1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{ij}(\theta,n). \tag{1.2}$$

Здесь J — инвариантный интеграл нелинейной механики разрушения [3]; I_n — безразмерный J-интеграл; $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta,n)$ — универсальное угловое распределение напряжений, определяемое из решения краевой задачи. Соотношения (1.2) представляют собой классическое распределение напряжений Хатчинсона — Райса — Розенгрена в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими соотношениями (1.1).

В течение длительного времени интерес исследователей вызывало построение высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины по заданному главному члену асимптотического разложения — решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена [4–10]. Однако в настоящее время представляется актуальным нахождение всего спектра собственных чисел. Так, в задаче о маломасштабном пластическом течении с асимптотическим граничным условием в бесконечно удаленной точке необходимо более тщательное исследование асимптотики дальнего поля напряжений и, следовательно, определение других собственных чисел в разложениях напряжений по собственным функциям (см. [11]). В [12] предпринята попытка определения собственных чисел, отличных от собственного числа задачи Хатчинсона — Райса — Розенгрена, при различных значениях показателя нелинейности. Для получения решения использовался численный метод определения собственных чисел (метод Рунге — Кутты — Фельберга) совместно с методом пристрелки. В данном случае пристрелка является однопараметрической и собственные значения легко определяются.

Спектр собственных чисел задачи о растяжении пространства с полубесконечной трещиной в материале со степенными определяющими уравнениями изучался в [13]. Авторы работы [13] указывают на недостаточность одного найденного собственного значения и высших приближений в задаче Хатчинсона — Райса — Розенгрена [4]. Следует отметить, что с математической точки зрения задачи о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига являются более сложными. В [13] численно найдены собственные значения лишь для отдельных показателей степенного закона ($n = 3,\ 5$).

В данной работе показано, что с использованием методов теории возмущений можно найти аналитическую зависимость собственного значения от показателя нелинейности материала и собственного числа линейной задачи.

2. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим трещину антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими соотношениями

$$\gamma_{rz} = (3/2)B\tau_e^{n-1}\tau_{rz}, \qquad \gamma_{\theta z} = (3/2)B\tau_e^{n-1}\tau_{\theta z}, \qquad \tau_e^2 = 3(\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2), \tag{2.1}$$

где τ_e — интенсивность касательных напряжений. В полярной системе координат с полюсом в вершине трещины уравнение равновесия и условие совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta z}) = \frac{\partial\gamma_{rz}}{\partial\theta}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее предполагается, что компоненты тензора напряжений и деформаций отнесены к τ_0 и γ_0 соответственно (τ_0 — предел пропорциональности материала, в случае если рассматриваемые определяющие соотношения описывают нелинейно-упругую или пластическую деформацию в рамках деформационной теории пластичности; γ_0 — значение интенсивности деформации, соответствующее τ_0).

Введение функции напряжений

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r}\,\frac{\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r} \tag{2.3}$$

позволяет тождественно удовлетворить уравнению равновесия. Из условия совместности деформаций получается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $\Phi(r,\theta)$. Как известно, использование степенной зависимости между деформациями и напряжениями приводит к разделению переменных r и θ, поэтому решение задачи будем искать в виде

$$\Phi(r,\theta) = r^s f(\theta) + \dots . \tag{2.4}$$

Компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\tau_{ij}(r,\theta) = r^{s-1}\tilde{\tau}_{ij}(\theta) + \dots .$$

Подставляя (2.4) в (2.3), (2.1) и в условие совместности (во второе уравнение системы (2.2)), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(\theta)$:

$$f''(nf'^2 + s^2 f^2) + f(C_1 f'^2 + C_2 f^2) = 0. \tag{2.5}$$

Здесь $C_1 = s(n-1)(2s-1) + s^2$, $C_2 = s^3(n-1)(s-1) + s^4$.

Уравнение (2.5) с граничными условиями

$$f\big|_{\theta=\pm\pi} = 0 \tag{2.6}$$

определяет нелинейную задачу на собственные значения: найти значение параметра s, при котором задача (2.5), (2.6) имеет нетривиальное решение.

3. Собственные значения. Аналитическое выражение для собственного значения s как функции показателя нелинейности материала n и собственного числа s_0 "невозмущенной" линейной задачи ($n = 1$) может быть найдено с помощью представления

$$s = s_0 + \varepsilon, \tag{3.1}$$

где ε — отклонение значения собственного числа s от значения собственного числа s_0 при изменении n.

Для того чтобы оценить влияние изменения n на собственное значение s, показатель нелинейности материала и искомую функцию представим в виде

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots; \tag{3.2}$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots, \tag{3.3}$$

где $f_0(\theta)$ — решение линейной задачи ($n = 1$).

Подставляя (3.1)–(3.3) в (2.5) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получим систему неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, ...:

$$f_0'' + s_0^2 f_0 = 0; \tag{3.4}$$

$$f_1'' + s_0^2 f_1 = -s_0[n_1(s_0-1) + 2]f_0;$$

$$f_2'' + s_0^2 f_2 = -[(n_2 f_0'^2 + f_0^2)f_0'' + (C_1^2 f_0'^2 + C_2^2 f_0^2)f_0]/s_0^2 \quad \dots . \tag{3.5}$$

Здесь $C_1^2 = n_2 s_0^2 - 1 + 3n_1 s_0 + s_0 n_2(s_0-1)$; $C_2^2 = s_0^3[n_2(s_0-1) + n_1]$.

Решение уравнения (3.4), удовлетворяющее граничным условиям $f_0\big|_{\theta=\pm\pi} = 0$, имеет вид

$$f_0(\theta) = A\cos s_0\theta, \qquad s_0 = m/2, \qquad m = \pm1, \pm3, \pm5, \dots \tag{3.6}$$

или

$$f_0(\theta) = B\sin s_0\theta, \qquad s_0 = m/2, \qquad m = 0, \pm2, \pm4, \dots .$$

Используя полученное решение для функции $f_0(\theta)$, можно последовательно найти функции $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $\ldots$. Так, для определения функции $f_1(\theta)$ имеем следующую краевую задачу:

$$f_1'' + s_0^2 f_1 = -s_0[n_1(s_0 - 1) + 2] f_0; \qquad (3.7)$$

$$f_1\big|_{\theta=\pm\pi} = 0. \qquad (3.8)$$

Поскольку соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, неоднородная задача будет иметь решение при выполнении некоторого условия разрешимости, которое позволит определить коэффициенты n_k разложения (3.2).

4. Условие разрешимости. Следует отметить, что при использовании методов возмущений возникают совокупности задач, которые должны решаться последовательно [14]. При этом задача первого порядка обычно оказывается однородной, в то время как задачи высших порядков будут неоднородными, но линейными. Если соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, то неоднородная задача не будет иметь решения, если не будет выполнено соответствующее условие разрешимости.

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x), \qquad a < x < b; \qquad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) + \alpha_{13}y'(b) + \alpha_{14}y(b) = \beta_1, \\ \alpha_{21}y'(a) + \alpha_{22}y(a) + \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = \beta_2, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где граничные операторы линейно независимы, т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2, и, следовательно, существует по крайней мере одна невырожденная матрица размером 2×2. Таким образом, по крайней мере один из определителей

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{22} & \alpha_{24} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{34} = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

В общем случае граничные условия могут быть смешанными (или неразделенными), т. е. содержать значения искомой функции и ее производной на концах отрезка $[a, b]$. С учетом граничных условий исследуемой задачи (3.8) рассмотрим случай, когда определитель $\Delta_{24} \neq 0$. Разрешая уравнения (4.2) относительно $y(a)$ и $y(b)$, получим

$$y(a) = \gamma_{11}y'(a) + \gamma_{12}y'(b) + \delta_1, \qquad y(b) = \gamma_{21}y'(a) + \gamma_{22}y'(b) + \delta_2, \qquad (4.3)$$

где

$$\gamma_{11} = -\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{12} = -\frac{\Delta_{34}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{22} = -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{24}},$$

$$\delta_1 = \frac{\beta_1\alpha_{24} - \beta_2\alpha_{14}}{\Delta_{24}}, \qquad \delta_2 = \frac{\beta_2\alpha_{12} - \beta_1\alpha_{22}}{\Delta_{24}}.$$

Для нахождения условия разрешимости в общем случае рассмотрим сопряженную задачу. Умножим уравнение (4.1) на функцию $u(x)$, которая называется сопряженным решением, подлежащим определению. В результате получим

$$p_2uy'' + p_1uy' + p_0uy = gu, \qquad a < x < b.$$

Почленно интегрируя это соотношение от a до b, находим

$$\int_a^b p_2 u y''\,dx + \int_a^b p_1 u y'\,dx + \int_a^b p_0 u y\,dx = \int_a^b g u\,dx.$$

Далее, интегрируя по частям первые два слагаемых, после ряда преобразований получим

$$\int_a^b [p_2 u'' + (2p_2' - p_1)u' + (p_2'' - p_1' + p_0)u] y\,dx + \\ + \{p_2 u y' + [(p_1 - p_2')u - p_2 u']y\}\big|_a^b = \int_a^b g u\,dx. \tag{4.4}$$

Приравнивая к нулю подынтегральное выражение в левой части последнего равенства, получим дифференциальное уравнение относительно функции u:

$$p_2 u'' + (2p_2' - p_1)u' + (p_2'' - p_1' + p_0)u = 0, \tag{4.5}$$

которое обычно называют сопряженным по отношению к однородному уравнению (4.1). Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (4.1), называется самосопряженным, если оно совпадает с сопряженным ему уравнением (4.5). Эти уравнения совпадают в том случае, если справедливы равенства $2p_2' - p_1 = p_1$, $p_2'' - p_1' = 0$ или $p_1 = p_2'$. При этом однородное уравнение, соответствующее (4.1), имеет вид

$$p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y = 0.$$

Для того чтобы определить вид граничных условий, необходимых для замыкания сопряженной задачи, рассмотрим однородную задачу, соответствующую (4.1), (4.2). Тогда соотношение (4.4) принимает вид (в случае самосопряженного уравнения)

$$\{p_2[uy' - u'y]\}\big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Используя равенства (4.3), последнее соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$[-\gamma_{21} p_2(b) u'(b) - p_2(a) u(a) + \gamma_{11} p_2(a) u'(a)] y'(a) + \\ + [p_2(b) u(b) - \gamma_{22} p_2(b) u'(b) + \gamma_{12} p_2(a) u'(a)] y'(b) = 0.$$

Граничные условия сопряженной задачи выберем таким образом, чтобы каждый коэффициент при $y'(a)$ и $y'(b)$ обращался в нуль:

$$\begin{aligned} p_2(a)u(a) - \gamma_{11} p_2(a) u'(a) + \gamma_{21} p_2(b) u'(b) = 0, \\ p_2(b)u(b) + \gamma_{12} p_2(a) u'(a) - \gamma_{22} p_2(b) u'(b) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Таким образом, функция u представляет собой решение краевой задачи для уравнения

$$p_2 u'' + p_2' u' + p_0 u = 0 \tag{4.7}$$

с граничными условиями (4.6).

Сформулировав сопряженную задачу, вернемся к исходной неоднородной задаче (4.1), (4.2) и найдем условие ее разрешимости. Поскольку функция u удовлетворяет уравнению (4.7), выражение (4.4) принимает вид

$$\{p_2[uy' - u'y]\}\big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g u\,dx.$$

Так как решение сопряженной краевой задачи u удовлетворяет граничным условиям (4.2), последнее соотношение может быть представлено в виде

$$\delta_1 p_2(a)u'(a) - \delta_2 p_2(b)u'(b) = \int\limits_a^b gu\,dx. \qquad (4.8)$$

Равенство (4.8) является искомым условием разрешимости, где u представляет собой решение сопряженной краевой задачи.

5. Условие разрешимости задачи (3.7), (3.8). Возвращаясь к краевой задаче для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3.7), решение которого должно удовлетворять граничным условиям (3.8), легко установить, что это уравнение является самосопряженным, поскольку в данном случае $p_2 = 1$, $p_1 = 0$ и $p_2' = p_1$, а условие разрешимости формулируется следующим образом:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} gu\,d\theta = 0. \qquad (5.1)$$

Здесь g — правая часть уравнения (3.7):

$$g(\theta) = -s_0[n_1(s_0 - 1) + 2]f_0(\theta),$$

функция u — сопряженное решение, совпадающее с функцией $f_0(\theta)$. Для нечетных чисел m функция $f_0(\theta)$ определяется соотношением (3.6). В этом случае сопряженное решение имеет вид

$$u = \cos s_0\theta. \qquad (5.2)$$

Выполнив несложные вычисления, можно показать, что условие разрешимости удовлетворяется только за счет выбора коэффициента $n_1 = -2/(s_0 - 1)$.

Аналогично для функции $f_2(\theta)$ можно заключить, что условие разрешимости (5.1) и сопряженное решение (5.2) будут иметь тот же вид. При этом необходимо положить

$$g(\theta) = -[(n_2 f_0'^2 + f_0^2)f_0'' + (C_1^2 f_0'^2 + C_2^2 f_0^2)f_0]/s_0^2.$$

Вновь проводя необходимые вычисления, установим, что условие разрешимости выполняется лишь при $n_2 = (4s_0 - 1)/(s_0(s_0 - 1)^2)$.

Обобщая полученные результаты для произвольного коэффициента n_k, находим

$$n = 1 + \frac{s_0}{s_0 - 1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{\varepsilon}{s_0 - s_*}\Big)^k - \frac{1}{s_0 - 1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{\varepsilon}{s_0 - 1}\Big)^k = \frac{s}{s - s_*} - \frac{s}{s - 1},$$

где $s_* = s_0^2/(2s_0 - 1)$.

Разрешая полученное уравнение относительно s, найдем зависимость собственного значения от показателя нелинейности материала n и собственного числа линейной задачи s_0:

$$s = \frac{n(s_0^2 + 2s_0 - 1) + (s_0 - 1)^2}{2n(2s_0 - 1)} + \frac{\sqrt{[n(s_0^2 + 2s_0 - 1) + (s_0 - 1)^2]^2 - 4n^2 s_0^2(2s_0 - 1)}}{2n(2s_0 - 1)}.$$

В случае, когда $s_0 = 1/2$, асимптотическое разложение для показателя нелинейности материала принимает вид

$$n = 1 - \frac{1}{s_0 - 1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{\varepsilon}{s_0 - 1}\Big)^k = -\frac{s}{s - 1},$$

откуда получаем известную зависимость собственного числа от показателя нелинейности, соответствующую решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена:

$$s = n/(n + 1).$$

6. Выводы. В работе предложен способ определения собственных значений в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим уравнением, основанный на методе возмущений. Следует отметить, что метод возмущений для определения собственных значений в задаче о трещине использован в [15], где получены выражения для коэффициентов разложения n_k путем исключения вековых слагаемых в решениях уравнений относительно функций f_k. Однако наличие вековых слагаемых в решении исследуемой задачи не является противоречием, поскольку решение разыскивается на конечном отрезке $[-\pi, \pi]$, а не на полубесконечном интервале (как известно из теории возмущений, именно наличие бесконечной области является источником возникновения неравномерно пригодных разложений — в данном случае разложений, имеющих вековые слагаемые). Второй причиной обращения к решению данной задачи является невозможность обобщения подхода, развитого в [15], на случай более сложных с математической точки зрения задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига. При исследовании таких видов нагружения тела с трещиной оказалось, что в соответствующих задачах появляются вековые слагаемые двух видов, при исключении которых получаются два уравнения для определения одной неизвестной величины n_k на k-м шаге. Представленный в работе подход лишен указанных ограничений и может быть применен к решению задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hutchinson J. W.** Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
2. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
3. **Rice J. R.** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. P. 287–298.
4. **Yang S., Yuan F. G., Cai X.** Higher order asymptotic elastic-plastic crack-tip fields under antiplane shear // Engng Fracture Mech. 1996. V. 54, N 3. P. 405–422.
5. **Chao Y. J., Zhu X. K., Zhang L.** Higher-order asymptotic crack-tip fields in a power-law creeping material // Intern. J. Solids Struct. 2001. V. 38, N 21. P. 3853–3875.
6. **Chao Y., Yang S.** Higher order crack tip field and its application for fracture of solids under mode II conditions // Engng Fracture Mech. 1996. V. 54, N 3. P. 405–422.
7. **Xia L., Wang T. C., Shih C. F.** Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1993. V. 41, N 4. P. 665–687.
8. **Yang S., Chao Y. J., Sutton M. A.** Higher order asymptotic crack tip fields in a power-law hardening material // Engng Fracture Mech. 1993. V. 45, N 1. P. 1–20.
9. **Nikishkov G. P.** An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields // Engng Fracture Mech. 1995. V. 50, N 1. P. 65–83.
10. **Nguyen B. N., Onck P. R., Van Der Giessen E.** On higher-order crack-tip fields in creeping solids // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 2000. V. 67, N 2. P. 372–382.
11. **Hui C. Y., Ruina A.** Why K? High order singularities and small scale yielding // Intern. J. Fracture. 1995. V. 72. P. 97–120.

12. **Степанова Л. В., Федина М. Е.** О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке задачи (связка “ползучесть — поврежденность”) // Вестн. Сам. гос. ун-та. 2001. № 2. С. 87–113.
13. **Lu M., Lee S. B.** Eigenspectra and order of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // Intern. J. Fracture. 1998. V. 92. P. 55–70.
14. **Найфе А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
15. **Anheuser M., Gross D.** Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Arch. Appl. Mech. 1994. V. 64. P. 509–518.

Поступила в редакцию 10/I 2007 г.