

О ВЗРЫВЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

В. М. Кузнецов

(Новосибирск)

М. А. Лаврентьевым была предложена новая постановка задачи о ближней зоне действия взрыва в некоторых твердых средах при наличии свободной поверхности. В области, примыкающей к заряду ВВ, среда считается идеальной несжимаемой жидкостью. Граница этой области с невозмущенной средой является твердой стенкой, вдоль которой скорость постоянна и равна некоторой величине, характерной для данной среды. В работе [1] в этой постановке была рассмотрена задача о взрыве на поверхности грунта. Ниже в аналогичной постановке рассматривается задача о взрыве на поверхности тонкой пластинки.

Действие взрыва описывается как действие импульсивного давления

$$P = \int_0^{\tau} p dt \quad (p - \text{давление, } t - \text{время}) \quad (1)$$

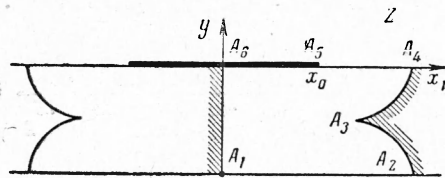
на границе взрывчатого вещества с пластинкой. Потенциал φ на этой границе связан с импульсивным давлением соотношением

$$\varphi = -\varphi_0 \equiv -\frac{P}{\rho} \quad (\rho - \text{плотность жидкости}) \quad (2)$$

Пусть x_0 — половина ширины заряда, h — толщина пластинки, c_0 — значение скорости на твердой границе. Введем также функцию тока ψ и безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad y' = \frac{y}{x_0}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \psi' = \frac{\psi}{\varphi_0}, \quad c_0' = \frac{c_0 x_0}{\varphi_0}, \quad h' = \frac{h}{x_0} \quad (3)$$

В дальнейшем для простоты штрихи у безразмерных величин опускаются. Область течения в плоскости $z = x + iy$ изображена на фиг. 1.



Фиг. 1

В силу симметрии относительно оси y можно ограничиться рассмотрением половины области. Введем комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ и комплексную скорость

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Рассмотрим

$$f(w) = \ln \frac{dw}{dz} \quad (4)$$

Для функции $f(w)$ имеются следующие граничные условия:

$$\text{Im } f(w) = \frac{\pi}{2} \quad \text{на отрезках } A_1A_2, A_5A_6 \text{ и } A_1A_6$$

$$\text{Im } f(w) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{на отрезке } A_4A_5 \quad (5)$$

$$\text{Re } f(w) = \ln c_0 \quad \text{на границе } A_2A_3A_4$$

A_1A_6 и $A_2A_3A_4$ являются по условию линиями тока. Выбирая надлежащим образом постоянную, можно положить

$$\psi = 0 \quad \text{вдоль } A_1A_6, \quad \psi = \psi' \equiv \text{const} \quad \text{вдоль } A_2A_3A_4 \quad (6)$$

Легко видеть, что в плоскости комплексного потенциала область течения представляется полуполосой $-1 \leq \varphi \leq 0$, $\psi \geq 0$ с поперечным вырезом $\psi = \psi'$, $0 \geq \varphi \geq -\varphi'$ (φ' — значение потенциала в точке A_3 , фиг. 2). Функция

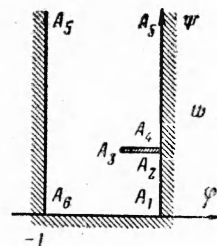
$$\zeta_1 = \cos \pi w \quad (7)$$

преобразует эту полуполосу в верхнюю полуплоскость с вырезанной дугой эллипса

$$\zeta_1 = \operatorname{ch} \pi \psi' \cos \pi \varphi, \quad \eta_1 = \operatorname{sh} \pi \psi' \sin \pi \varphi, \quad -\varphi' \leq \varphi \leq 0$$

Предположим, что $\psi' \gg 1$. Тогда, пренебрегая $e^{-\pi \psi'}$ по сравнению с $e^{+\pi \psi'}$, получим

$$\operatorname{ch} \pi \psi' \approx \operatorname{sh} \pi \psi' \approx \frac{1}{2} e^{\pi \psi'} \gg 1 \quad (9)$$



Фиг. 2

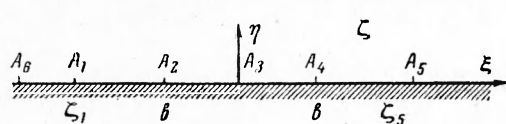
С этой точностью можно заменить дугу эллипса дугой окружности

$$\xi_1 = a \cos \pi \varphi, \quad \eta_1 = -a \sin \pi \varphi, \quad -\varphi' \leq \varphi \leq 0 \quad \left(a = \frac{e^{\pi \psi'}}{2} \right) \quad (10)$$

Отображение верхней полуплоскости с вырезанной дугой окружности известно [2]; оно имеет вид

$$\zeta = \sqrt{\left(\frac{\xi_1 - a}{\xi_1 + a} \right)^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\cos \pi w - a}{\cos \pi w + a} \right)^2 + b^2} \quad \left(b = \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi'}{2} \right) \quad (11)$$

Соответствие представлено на фиг. 3, где



Фиг. 3

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\sqrt{\left(\frac{1-a}{1+a} \right)^2 + b^2} \\ \zeta_5 &= \sqrt{1 + b^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Введем вместо $f(w)$ функцию

$$F(w) = f(w) - \ln c_0 - \frac{1}{2} \pi i \quad (13)$$

Для функции $F[w(\zeta)] \equiv F(\zeta)$ имеются в плоскости ζ вследствие (5) следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F &= 0 && \text{при } -b \leq \zeta \leq +b \\ \operatorname{Im} F &= 0 && \text{при } \zeta < -b, \zeta > \sqrt{1+b^2} \\ \operatorname{Im} F &= -\pi && \text{при } b < \zeta < \sqrt{1+b^2} \end{aligned} \quad (14)$$

По этим условиям $F(\zeta)$ определяется при помощи формулы Келдыша — Седова [2], принимающей в данном случае следующий вид:

$$F(\zeta) = -\frac{1}{g(\zeta)} \int_b^{\sqrt{1+b^2}} \sqrt{\frac{t-b}{t+b}} \frac{dt}{t-\zeta} + \frac{F(\infty)}{g(\zeta)} \quad \left(g(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-b}{\zeta+b}} \right) \quad (15)$$

После вычисления интеграла получаем

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= -\sqrt{\frac{\zeta+b}{\zeta-b}} \ln \frac{1 + \sqrt{1+b^2}}{b^2} + \ln \frac{\zeta \sqrt{1+b^2} - b^2 + \sqrt{\zeta^2 - b^2}}{b(\zeta - \sqrt{1+b^2})} + \\ &+ F(\infty) \sqrt{\frac{\zeta+b}{\zeta-b}} \end{aligned} \quad (16)$$

Значение функции $F(\zeta)$ на бесконечности определяется из условия $F(b) = -\pi$, которое следует из (14). Таким образом, получаем

$$F(\infty) = \ln \frac{1 + \sqrt{1+b^2}}{b}, \quad F(\zeta) = \ln \frac{\zeta \sqrt{1+b^2} - b^2 + \sqrt{\zeta^2 - b^2}}{b(\zeta - \sqrt{1+b^2})} \quad (17)$$

Из последнего соотношения и из формул (4), (13) получаем

$$\frac{dw}{dz} = c_0 i \frac{\xi \sqrt{1+b^2} - b^2 + \sqrt{\xi^2 - b^2}}{b(\xi - \sqrt{1+b^2})} \quad (18)$$

где ξ определяется выражением (11).

Окончательно решение (с учетом условия $z = 1$ при $w \rightarrow \infty$) имеет вид

$$z - 1 = -\frac{bi}{c_0 \sqrt{1+b^2}} \int_{\infty}^w \frac{\left\{ \left[\frac{(\cos \pi w - a)^2}{(\cos \pi w + a)^2} + b^2 \right]^{1/2} - (1+b^2)^{1/2} \right\} dw}{\left[\frac{(\cos \pi w - a)^2}{(\cos \pi w + a)^2} + b^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \frac{\cos \pi w - a}{\cos \pi w + a} - \frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}}} \quad (19)$$

Далее предположим, что $b \ll 1$. Рассмотрим переход от точки A_1 к точке A_6 вдоль отрезка $A_1 A_6$, т. е. при $\psi = 0$. При таком переходе z получает приращение $\Delta z = ih$. При этом вследствие (9) имеем $|(\cos \pi \varphi - a)(\cos \pi \varphi + a)| \approx 1$, так что под интегралом можно пренебречь величиной b^2 . Таким образом, имеем

$$ih \approx -\frac{bi}{c_0} \int_0^{-1} \frac{\xi - 1}{2\xi} d\varphi \approx \frac{bi}{c_0}, \quad \text{или} \quad b \approx c_0 h \quad (20)$$

Второе необходимое соотношение получается из условия перехода от A_5 к A_6 вдоль отрезка $A_5 A_6$, т. е. при $\varphi = -1$; при этом $|(\operatorname{ch} \pi \psi + a)/(\operatorname{ch} \pi \psi - a)| \gg 1$, так что по-прежнему можно пренебречь величиной b^2 под корнем. Из (19) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{a d\psi}{\operatorname{ch} \pi \psi + a} - \frac{c_0}{b} = \frac{1}{h} \quad (21)$$

Отсюда, пренебрегая единицей по сравнению с a^2 , получаем

$$a = \frac{1}{2} \exp \frac{\pi}{h}, \quad \psi' = \frac{1}{h} \quad (22)$$

Рассмотрим далее интеграл (19) вдоль границы $A_2 A_3 A_4$. Положим $\psi = \psi'$. Тогда из (11) имеем

$$\xi = \sqrt{(b^2 - t g^2 \pi \varphi / 2)} \quad (23)$$

Вдоль $A_2 A_3 A_4$ потенциала φ меняется в пределах от 0 до φ' , так что ξ меняется от 0 до b на участке $A_3 A_4$ и от 0 до $-b$ на участке $A_2 A_3$ (фиг. 3). В соответствии с этим можно считать в (19) величину ξ малой. Пренебрегая этой величиной, а также b и b^2 по сравнению с единицей, получим

$$\Delta z_1 = \frac{2bi}{\pi c_0} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2 - it}} \quad (T = -\frac{\pi \varphi'}{2}) \quad (24)$$

при переходе от A_4 к A_3 и

$$\Delta z_2 = -\frac{2bi}{\pi c_0} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2 - it}} \quad (25)$$

при переходе от A_2 к A_3 . После вычислений получаем

$$\Delta z_1 = -\frac{b}{\pi c_0} - \frac{b}{2c_0} i, \quad \Delta z_2 = -\frac{b}{\pi c_0} + \frac{b}{2c_0} i \quad (26)$$

Отсюда, учитывая (20), заключаем, что точка A_3 разветвления линий тока находится на половине толщины пластинки и смещена относительно краев пробойны на h/π влево. Отсюда также следует, что ширина верхней части пробойны равна ширине нижней. Выражение,

определяющее эту величину, получается из (19), где нужно положить $\varphi = 0$, а верхний предел взять равным ψ'

$$x_1 - 1 = \frac{b}{c_0} \int_0^{\psi'} \frac{\xi - \sqrt{1+b^2}}{\xi \sqrt{1+b^2} + \sqrt{\xi^2 - b^2 - b^2}} d\xi, \quad \xi = \left[\frac{(\operatorname{ch} \pi\psi - \operatorname{ch} \pi\psi')^2}{(\operatorname{ch} \pi\psi + \operatorname{ch} \pi\psi')} + b^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

Вводя вместо ψ новую переменную y

$$y = \frac{\operatorname{ch} \pi\psi - \operatorname{ch} \pi\psi'}{\operatorname{ch} \pi\psi + \operatorname{ch} \pi\psi'} \quad (28)$$

и пренебрегая в подынтегральном выражении величиной

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \pi\psi'} \approx \frac{1}{a^2}$$

по сравнению с единицей, получим

$$x_1 - 1 = \frac{b}{\pi c_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{1+b^2} - \sqrt{y^2+b^2}}{(1-y^2)(y + \sqrt{y^2+b^2-b^2})} dy \quad (29)$$

При $b \ll 1$, $0 \ll y \ll 1$ имеем

$$\frac{1}{2} \ll \frac{\sqrt{1+b^2} - \sqrt{y^2+b^2}}{1-y^2} \ll 1 \quad (30)$$

Поэтому для оценки можно принять, что

$$x_1 - 1 \approx \frac{b}{\pi c_0} \int_0^1 \frac{dy}{y + \sqrt{y^2+b^2-b^2}} \quad (31)$$

Пренебрегая в последнем выражении величиной b по сравнению с единицей, получаем

$$x_1 - 1 \approx \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{2}}{b} \quad (32)$$

Численное вычисление интеграла (29) дает

$$x_1 - 1 = 1.25 \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{2}}{b} \quad (33)$$

Переходя к размерным величинам и пользуясь (20), получаем

$$x_1 - x_0 = 0.4 \ln \frac{P}{\rho c_0 h} \quad (34)$$

Для сравнения приведем здесь аналогичные формулы, полученные в работе [1] для случая взрыва на поверхности полупространства. Если ширина заряда очень велика, то воронки образуются на его концах и имеют ширину

$$x_1 - x_0 = \frac{P}{\pi \rho c_0} \quad (35)$$

В случае «сильного», почти точечного взрыва

$$x_1 = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{P x_0}{\rho c_0}} \quad (36)$$

(см. формулы (21) и (27) работы [1]).

Таким образом, при взрыве на поверхности пластинки ширина пробоины растет с увеличением импульса взрыва медленнее, чем при взрыве на поверхности полупространства. Скорости определяются выражением (18). Максимальная скорость на нижней стороне пластинки достигается в точке A_1 и равна $P/\rho h$, что имеет, очевидно, простой физический смысл.

Поступила 15 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта, ПМТФ, 1960, № 3.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.