

УДК 353:361:551.6:621.371

О применимости асимптотических формул восстановления параметров «оптической» турбулентности из данных импульсного лидарного зондирования.

II. Результаты численного моделирования

В.В. Воробьев*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
119017, г. Москва, Пыжевский пер., 3*

Поступила в редакцию 2.06.2016 г.

В численном эксперименте исследована применимость сформулированных в первой части статьи формул. Показано, что геометрическое приближение применимо только на коротких трассах протяженностью в сотни раз меньше, чем соответствующие дифракционные длины. Ограничения обусловлены осцилляциями ядра исходного интегрального уравнения. Они приводят к сильным осцилляциям третьей производной измеренных данных. Формулы, основанные на асимптотической формуле ядра для точечного приемника, мало чувствительны к осцилляциям измеренных данных. Применение формул для точечного приемника, в случае приемников конечного радиуса, приводит к сглаживанию восстановленных распределений и их сдвигу относительно заданных. Предложена методика учета этих факторов при восстановлении. Вместе со сглаживанием восстановленных распределений приближения точечного приемника приводит к частичной потере в восстановленных данных информации о спектре турбулентности. Это позволяет упростить процедуру восстановления, сведя ее к вычислению обычных производных второго порядка.

Ключевые слова: лидары, турбулентность, усиление обратного рассеяния, уравнения Вольтерра и Абеля; lidar, turbulence, backscattering enhancement, Volterra equations and Abel equations.

Введение

В первой части работы [1] были найдены асимптотические решения интегрального уравнения связи распределения структурной характеристики флуктуаций показателя преломления по трассе лидарного зондирования и фактора усиления обратного рассеяния. Условия задачи подробно рассмотрены в [1] и соответствуют теоретическим исследованиям [2, 3] и экспериментам [4, 5]. Асимптотические решения сводятся к нахождению обычных либо дробных производных измеряемых величин. В настоящей статье представлены результаты численного исследования области применимости асимптотических решений, простые модификации формул восстановления для расширения областей их применимости.

Методика исследования областей применимости тривиальна. Для заданного распределения нормированной структурной характеристики $y(x) = \hat{C}_{n,\gamma}^2(x)/\hat{C}_{n,\gamma}^2(0)$ рассчитывается измеряемая величина – фактор усиления принимаемой мощности $q(x)$ – по формулам

$$q(x) = \int_0^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где через $K(x, \xi)$ обозначена функция (ядро интегрального уравнения),

$$K(x, \xi) =$$

$$= A \int_0^\infty \kappa_\perp^{-\gamma} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\xi(x-\xi)}{k_0 x} \kappa_\perp^2\right) \right\} \frac{x}{\xi R} J_1\left(\frac{\xi R}{x} \kappa_\perp\right) d\kappa_\perp. \quad (2)$$

Здесь $A = 16\pi^2 k_0^2 \hat{C}_{n,\gamma}^2(0)$ – постоянная, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ – длина световой волны; R – радиус приемной апертуры; J_1 – функция Бесселя. Как показано в [1], функция $K(x, \xi)$ в общем случае является сложной осциллирующей функцией.

Далее по функции $q(x)$ по асимптотическим формулам восстанавливается функция $Y(x)$, которая будет обозначаться заглавной буквой, чтобы отличать ее от заданной. По различиям функций $Y(x)$ и $y(x)$ оценивается применимость приближенных формул.

1. Геометрооптическое приближение

Решение обратной задачи в геометрическом приближении определяется соотношением [1]:

$$y(x) B_g(R) = \frac{1}{x^{\gamma-4}} \frac{d^3}{dx^3} (x^{\gamma-4} q(x)), \quad (3)$$

где γ – показатель степени трехмерного спектра ($\Phi_n(\mathbf{\kappa}) \sim \kappa^{-\gamma}$) флуктуаций показателя преломления; величина $B_g(R)$ определена формулами (20) и (25) в [1].

* Валерий Васильевич Воробьев.

Поскольку измеряемая величина $q(x)$ может меняться в больших пределах, удобнее перейти к функции $f(x) = q(x)/q_{0,0}(x)$, где $q_{0,0}(x)$ – фактор усиления обратного рассеяния в статистически однородной среде ($y = 1$), рассчитываемый в геометрооптическом приближении:

$$q_{0,0}(x) = \int_0^{x_n} K_g(x, \xi) d\xi = B_g \cdot v(\gamma) x^3, \quad (4)$$

$$v(\gamma) = \frac{2}{(\gamma - 3)(\gamma - 2)(\gamma - 1)},$$

($K_g(x, \xi) = B_g \left[\frac{\xi}{x} \right]^{\gamma-4} (x - \xi)^2$ – геометрооптическое приближение ядра [1]).

Тогда из (3) и (4) для функции $f(x)$ следует соотношение

$$Y(x) = \frac{v(\gamma)}{2} x^{4-\gamma} \frac{d^3}{dx^3} [x^{\gamma-1} f(x)] =$$

$$= f(x) + \frac{3}{\gamma - 3} x \frac{df}{dx} + \frac{3}{(\gamma - 3)(\gamma - 2)} x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} +$$

$$+ \frac{1}{(\gamma - 3)(\gamma - 2)(\gamma - 1)} x^3 \frac{d^3 f}{dx^3}. \quad (5)$$

Во всех рассмотренных далее примерах производные функций рассчитывались по формулам

$$f'_n = \frac{1}{2\Delta} (f_{n+1} - f_{n-1}), \quad f''_n = \frac{1}{2\Delta} (f'_{n+1} - f'_{n-1}),$$

$$f'''_n = \frac{1}{2\Delta} (f''_{n+1} - f''_{n-1}), \quad (6)$$

где $f_n = f(x_n)$, $f_{n\pm 1} = f(x_n \pm \Delta)$; Δ – шаг дискретизации по координате x .

Вначале была рассмотрена простейшая модель: $y(x) = 1$. Результаты восстановления для трех значений радиусов апертуры показаны на рис. 1.

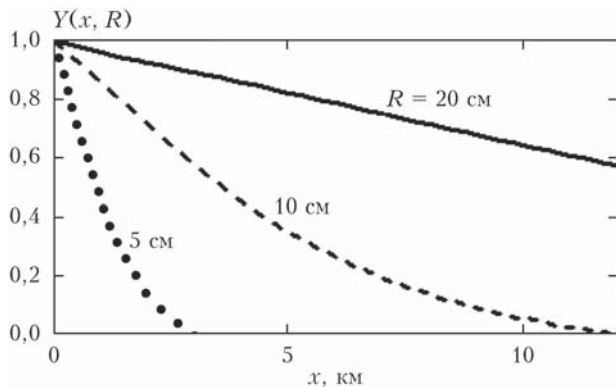


Рис. 1. Восстановленные распределения $Y(x)$ при заданном $y(x) = 1$ и при трех значениях радиуса апертуры, указанных у кривых. Параметры расчета: $\lambda = 0,532$ мкм, $\gamma = 11/3$, $\Delta = 250$ м

Видно, что геометрооптическая асимптотика в задаче восстановления работает плохо. Функции

$Y(x, R)$, представленные на этом рисунке, убывают с расстоянием, приблизительно как $Y(x) \approx \exp[-25x/(k_0 R^2)]$. Соответственно, систематическая ошибка восстановления экспоненциально растет с расстоянием.

В случае $y(x) = 1$ эту ошибку можно устранить, если в определении функции $f(x)$ функцию $q_{0,0}(x)$, рассчитываемую в геометрооптическом приближении, заменить на $q_0(x) = \int_0^x K(x, \xi) d\xi$, учитывая влияние дифракции, т.е. положить $f(x) = q(x)/q_0(x)$. При $y(x) = 1$, $f(x) = 1$ и, согласно (5), $Y(x) = 1$.

Далее исследовалась применимость формулы (5) с $f(x) = q(x)/q_0(x)$ для восстановления ступенчатого распределения $y(x)$ вида

$$y(x) = 1 + \exp\left[-\left(\frac{x - X_0 - H}{H}\right)^{20}\right] \text{ при } x \leq X_0 + H,$$

$$y(x) = 2 \text{ при } x > X_0 + H, \text{ с } H = 100 \text{ м.} \quad (7)$$

Примеры восстановления приведены на рис. 2. Расчеты проводились для модели турбулентности с показателем спектра $\gamma = 11/3$.

Рис. 2 демонстрирует, к каким ошибкам восстановления приводит использование геометрооптической асимптотики. Интересно, что ошибки восстановления, как функции координаты x , имеют осцилляционную структуру, подобную структуре функций $u(Q)$, представленных на рис. 3 в [1]. Как видно из рис. 2, функция $y(x)$ правильно восстанавливается за точкой скачка X_0 только на некотором интервале L_g , обозначенном на верхних рисунках двойной чертой. При значении $R = 10$ см и малом значении полуширины окна сглаживания $S = 20$ м интервал L_g слабо зависит от координаты X_0 . Он увеличивается от значения 0,4 км (при $X_0 = 0,2$ км) до 0,5 км (при $X_0 = 1,2$ км). При сглаживании данных интервал применимости формул восстановления L_g увеличивается приблизительно на величину полуширины S окна сглаживания. При значении полуширины окна $S = 200$ м интервал L_g изменяется, соответственно, в пределах от 0,6 до 0,8 км. При значениях радиуса приемной апертуры $R = 5$ и 20 см интервал L_g , как было выяснено, зависит от R приблизительно линейно и изменяется при $S = 200$ м и $x = 0,25$ –2 км в пределах $L_g = 0,35$ –0,4 км при $R = 5$ см и $L_g = 1,1$ –1,6 км при $R = 20$ см.

Как формулы геометрооптического приближения работают в случае более сложных распределений $y(x)$, иллюстрирует рис. 3. Распределения $y(x)$ в расчетах рис. 3 задавались в виде

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^3 \exp\left(-\frac{(x - X_n)^m}{H^m}\right)$$

$$\text{с } H = 100 \text{ м, } X_{1; 2; 3} = 0,2; 0,5; 1 \text{ км} \quad (8)$$

и показателем $m = 20$ (супергауссовы слои) и $m = 2$ (гауссовы слои).

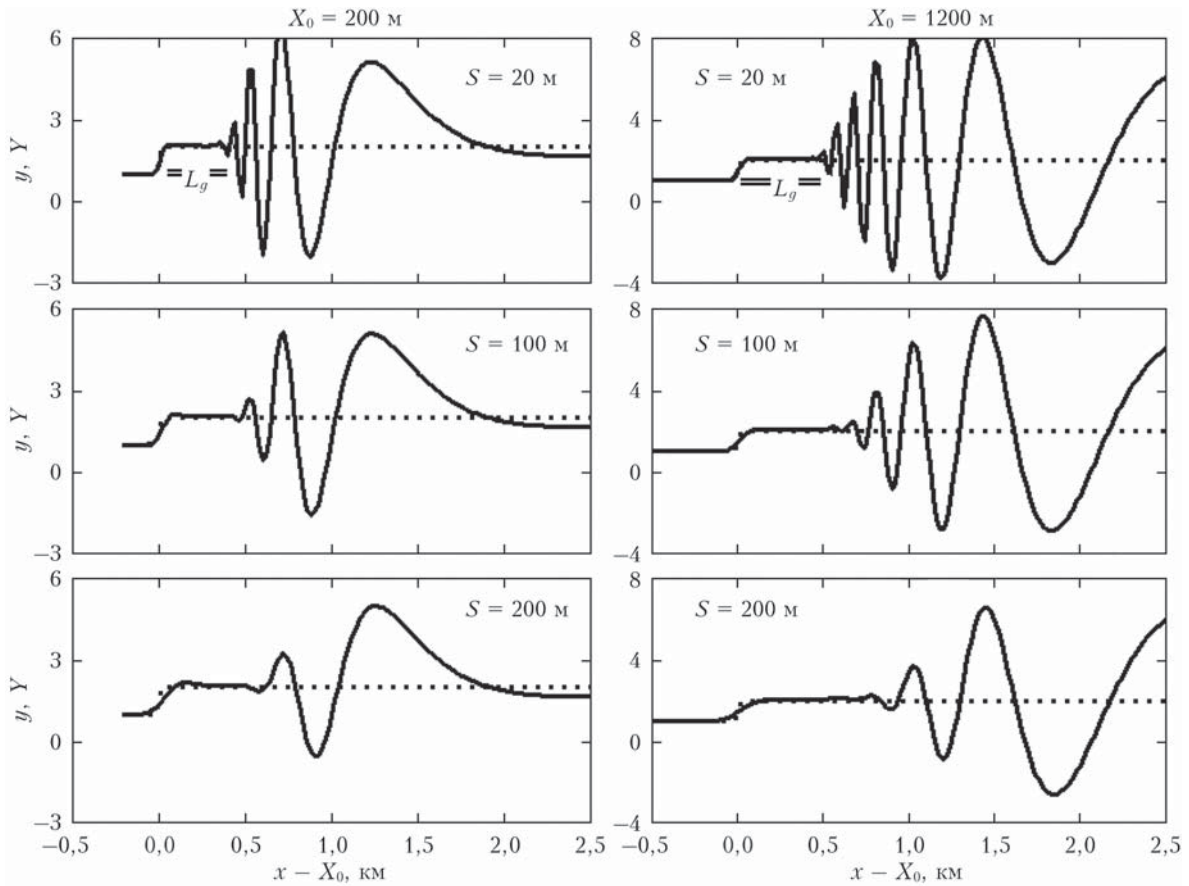


Рис. 2. Заданные формулой (7) (пунктир) и восстановленные (сплошные кривые) распределения $y(x)$ и $Y(x)$ при значениях радиуса апертуры $R = 10$ см. Расстояния X_0 до скачка распределения $y(x)$ равны 200 м для левого ряда рисунков и 1200 м – для правого. Шаг дискретизации выбран равным $\Delta = 20$ м, у графиков указана полуширина S гауссова окна сглаживания данных f_n

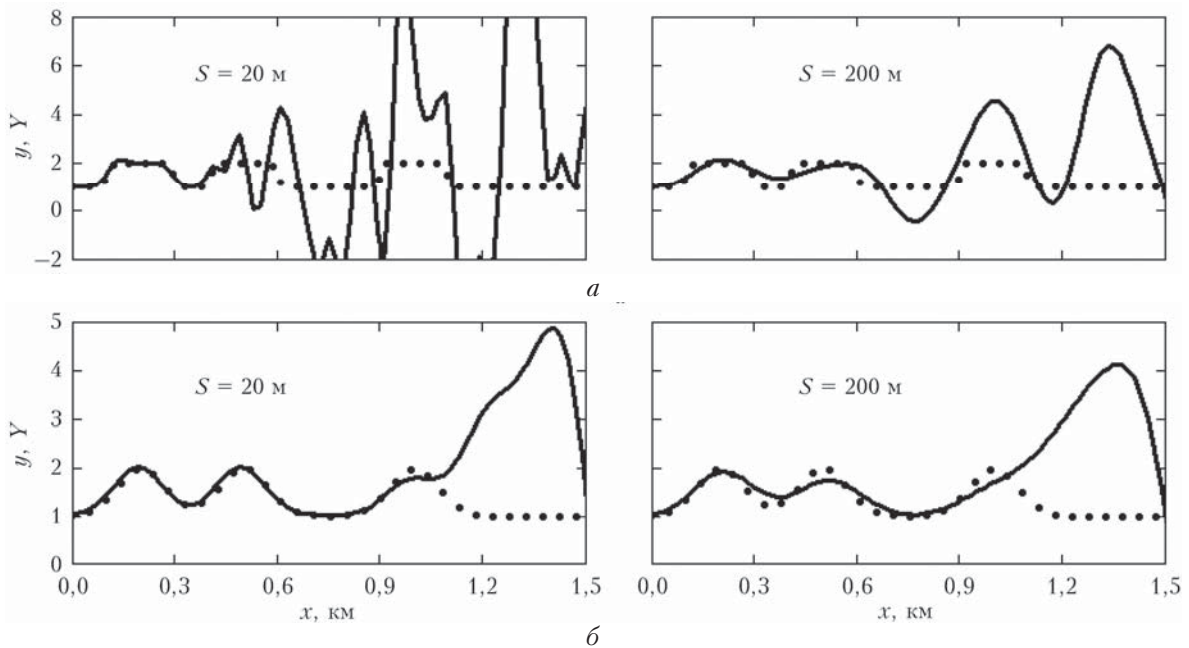


Рис. 3. Заданные распределения y (пунктир) и распределения Y , восстановленные в геометрооптическом приближении (сплошные кривые) для случая супергауссовых слоев (8) с $m = 20$ (а) и для гауссовых слоев (б). Параметры расчета: $R = 10$ см, $\lambda = 0,532$ мкм, $\gamma = 11/3$, $\Delta = 20$ м. На рисунках указаны значения полуширин окон сглаживания S

Из рис. 3, а видно, что в случае слоев с крутыми границами при отсутствии сглаживания разрешаются лишь полтора слоя ($x \leq 0,4$ км), при сглаживании окном с $S = 200$ м — два слоя ($x \leq 0,6$ км), как и при одиночном скачке. Плавные гауссовы слои разрешаются на большем интервале $x \leq 1$ км. При этом сглаживания данных в этом случае не требуется.

Проведенные расчеты позволяют заключить, что геометрооптическая асимптотика имеет небольшую область применимости. Для наиболее употребительных лидаров с радиусами приемной апертуры около 10 см восстановление возможно на дистанциях зондирования, не превышающих 0,5–1 км. К дополнительному ограничению применимости могут привести шумы измерений, которые не учитывались в данных расчетах.

2. Приближение точечного приемника

Решение обратной задачи в приближении точечного приемника определяется соотношением (23) в [1]:

$$Y(x)B_p(\gamma) = \frac{1}{x^\alpha} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d}{d\xi} (\xi^\alpha q(\xi)) \frac{d\xi}{(x-\xi)^\alpha}. \quad (9)$$

Проверка применимости формулы (9) проводилась так же, как и проверка геометрооптического приближения. То есть по формулам (1) и (2) рассчитывалась функция $q(x)$, а восстановленная функция $Y(x)$ рассчитывалась по формуле (9). Обозначим

$$f(x) = q(x)/q_{p,0,0}(x), \quad (10)$$

где

$$q_{p,0,0}(x) = \int_0^x K_p(x, \xi) d\xi \quad (11)$$

($K_p(x, \xi)$ — приближенное ядро для точечного приемника).

Из соотношений (9) и (11) для функции $f(x)$ следует формула

$$Y(x) = \frac{1}{w_0} \left(w(x) + \frac{2}{\gamma} x \frac{dw(x)}{dx} \right), \quad (12)$$

где

$$w_0 = \int_0^1 t^{\gamma-2} (1-t)^{1-\gamma/2} dt, \\ w(x) = \int_0^1 t^{\gamma-2} (1-t)^{1-\gamma/2} \left[f(x \cdot t) + \frac{x \cdot t}{\gamma-1} \frac{df(x \cdot t)}{d(x \cdot t)} \right] dt. \quad (13)$$

Некоторые результаты численных расчетов представлены на рис. 4–8. На рис. 4 приведены результаты восстановления функции $y(x) = 1$. При этом использовались определения (10), (11) функции $f(x)$. Видно, что точность восстановления невелика

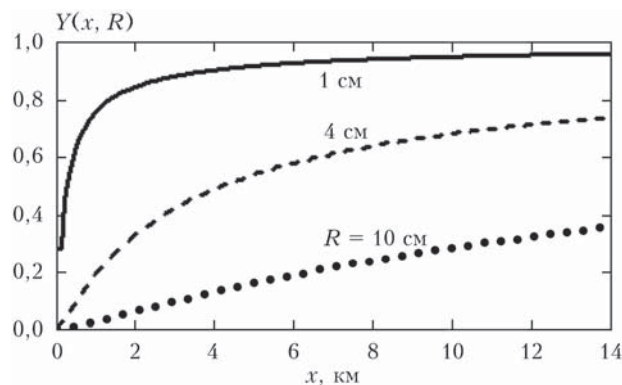


Рис. 4. Восстановленные по формулам (12), (13) распределения $Y(x, R)$ при заданном $y(x) = 1$. У графиков указаны значения радиусов R . Параметры расчета: $\gamma = 11/3$, $\Delta = 100$ м

даже в случае апертуры с радиусом 1 см. Улучшить точность восстановления можно тем же способом, что и при восстановлении в случае геометрической оптики, а именно нормировкой функции $q(x)$ на функцию $q_0(x) = \int_0^x K(x, \xi) d\xi$, определяющую флуктуации на приемнике конечного размера в однородной среде.

На рис. 5 представлены примеры восстановления ступенчатого распределения $y(x)$ вида

$$y(x) = 1 + \exp\left(-\frac{(x - X_0 - H)^{20}}{H^{20}}\right)$$

при $x \leq X_0 + H$; $y(x) = 2$ при $x > X_0 + H$ (14)

с $H = 100$ м, для трех значений X_0 , равных 0,5; 1,5; 2,5 км, и трех значений радиуса R .

Первое, что можно увидеть из рисунка, это появление осцилляций восстановленного распределения за скачком в исходном распределении $y(x)$. Они заметны уже при значении $R = 2$ см и отчетливо видны при $R = 4$ см. Эти осцилляции, в отличие от осцилляций при использовании геометрооптических формул восстановления, уходят с помощью простого сглаживания.

Основное отличие восстановленных распределений от исходных заключается в размытии границы скачка в восстановленном распределении, тем больше, чем больше радиус приемной апертуры и расстояние от приемника до границы скачка. В качестве полуширины области, на которую размывается скачок, можно принять величину сдвига $dX_0(X_0)$, которая определяется уравнением $Y_S(X_0 + dX_0) = 1,5$. Здесь Y_S — сглаженное гауссовым окном с полушириной S распределение Y . Зависимости $dX_0(X_0)$, рассчитанные при значении $S = 300$ м, для четырех значений радиуса R приведены на рис. 6.

Сдвиг $dX_0(X_0, R)$ растет с увеличением как радиуса апертуры R , так и координаты X_0 . Удовлетворительными приближениями зависимостей $dX_0(X_0, R)$, представленных на рисунке, являются

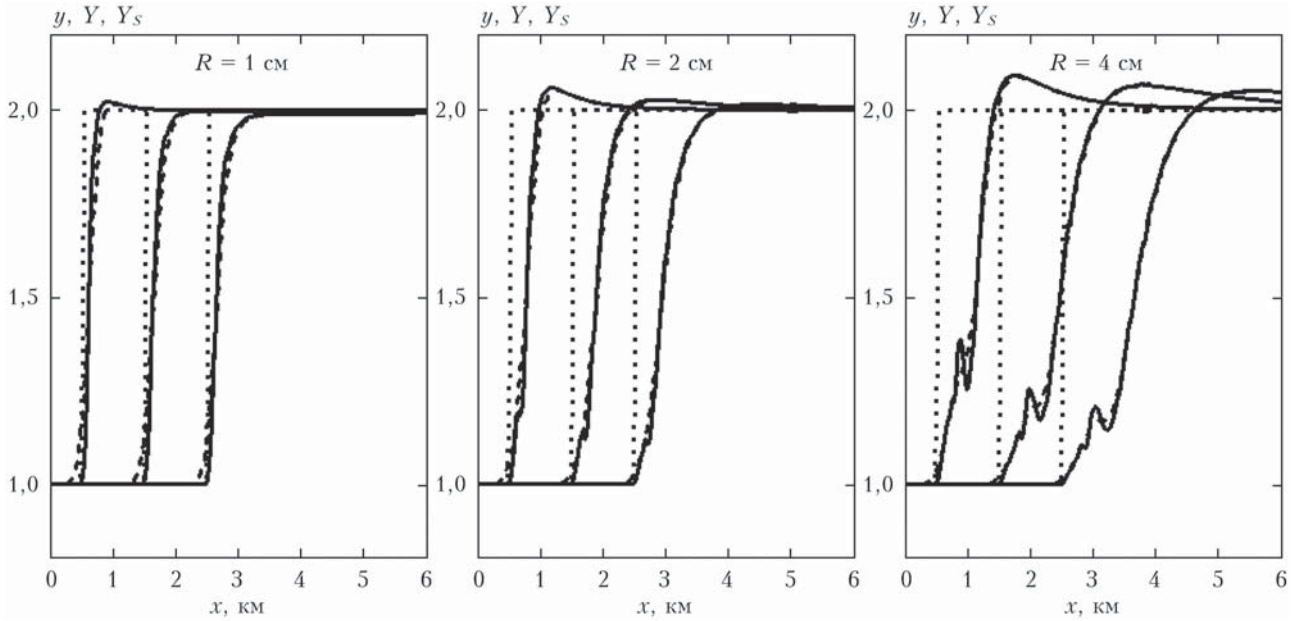


Рис. 5. Распределения: $y(x)$, заданные формулой (12) (пунктир); $Y(x)$, восстановленные по формулам (12), (13) с функцией $f(x) = q(x)/q_0(x)$ (сплошные кривые); $Y_s(x)$ – сглаженные гауссовым окном с полушириной 300 м функции $Y(x)$ (штриховые). Параметры расчета: $\gamma = 11/3$, $\Delta = 25$ м, $H = 100$ м. У графиков указаны значения радиусов апертуры R

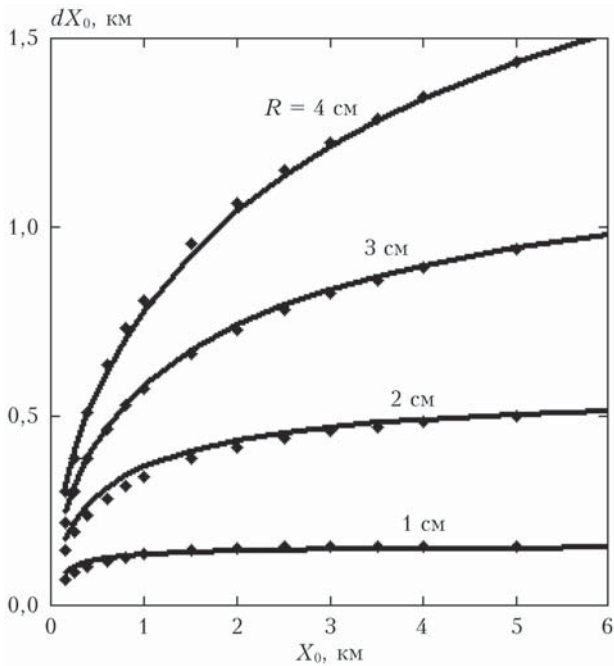


Рис. 6. Зависимости сдвига dX_0 от координаты скачка X_0 и радиуса R . Ромбики – расчетные точки, сплошные кривые – приближенные зависимости (15)

$$dX_0(X_0, R) = 2,6[X_0 \cdot l(R)]^{1/2} \left(1 + \frac{X_0}{C_R L_d(R)} \right)^{-1/2}, \quad (15)$$

где параметры, имеющие размерность длины, определяются как $l(R) = k_0^{0,6} R^{1,6}$, $L_d(R) = k_0 R^2$. Значения безразмерного коэффициента C_R при $R = 1, 2, 3$ и 4 см равны $C_R = 0,28; 0,31; 0,33$ и $0,4$ соответственно.

На рис. 7 приведен пример восстановления сложного распределения, состоящего из трех гауссовых слоев:

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^3 \exp\left(-\frac{(x - X_n - H)^2}{H^2}\right), \quad (16)$$

со значениями координат $X_1 = 500$ м, $X_2 = 2000$ м, $X_3 = 3500$ м и значением полуширин слоев $H = 250$ м.

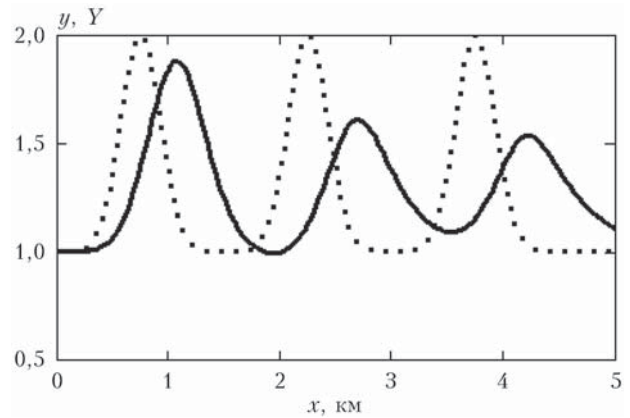


Рис. 7. Распределения: y , заданное формулой (16) (пунктир); Y , восстановленное по формулам (12), (13) (сплошные кривые). Функции $f(x)$ в этих формулах рассчитаны для значения $R = 2$ см

Видно, что восстановленные распределения отличаются от заданных наличием сдвига максимумов и минимумов и сглаживанием исходных распределений.

Можно предположить, что сдвиги $dX(X, R)$ восстановленных слоев в рассматриваемом случае

приблизительно те же, что и в примере со скачкообразным распределением, т.е. определяются формулой (15) с аргументом X вместо X_0 . Также и сглаживание определяется окном с полушириной, приблизительно равной $dX(X, R)$. Результаты проверки этого предположения иллюстрирует рис. 8.

Сглаженные функции $y_S(x)$, изображенные на рис. 8 штриховыми кривыми, рассчитывались с помощью процедуры сглаживания гауссовым окном переменной ширины. Полуширина окна сглаживания как функция x задавалась пропорциональной величине сдвига $dx(x, R)$, т.е. $S_y(x, R) = K_S(R) |dx(x, R)|$, где $K_S(R)$ – безразмерный коэффициент порядка единицы. Он выбирался из условия наилучшего визуального совпадения вос-

становленного $Y_S(x)$ и сглаженного распределения $y_S(x)$. При значениях $R = 2, 3$ и 4 см величины K_S равны соответственно 1,5; 1,1 и 0,9.

Восстановленные распределения Y_S изображены как функции аргумента \tilde{x} , учитывающего сдвиг и определяемого как

$$\tilde{x}(x, R) = x - dX(x, R) + \delta(R). \quad (17)$$

Здесь величина $\delta(R)$ – поправка, подбираемая так же, как и коэффициент $K_S(R)$. Ее значения при $R = 0,02; 0,03; 0,04$ м соответственно равны $\delta = 50; 100$ и 200 м. Значения поправок для сдвига приблизительно в 10 раз меньше самого сдвига (сравни с рис. 6).

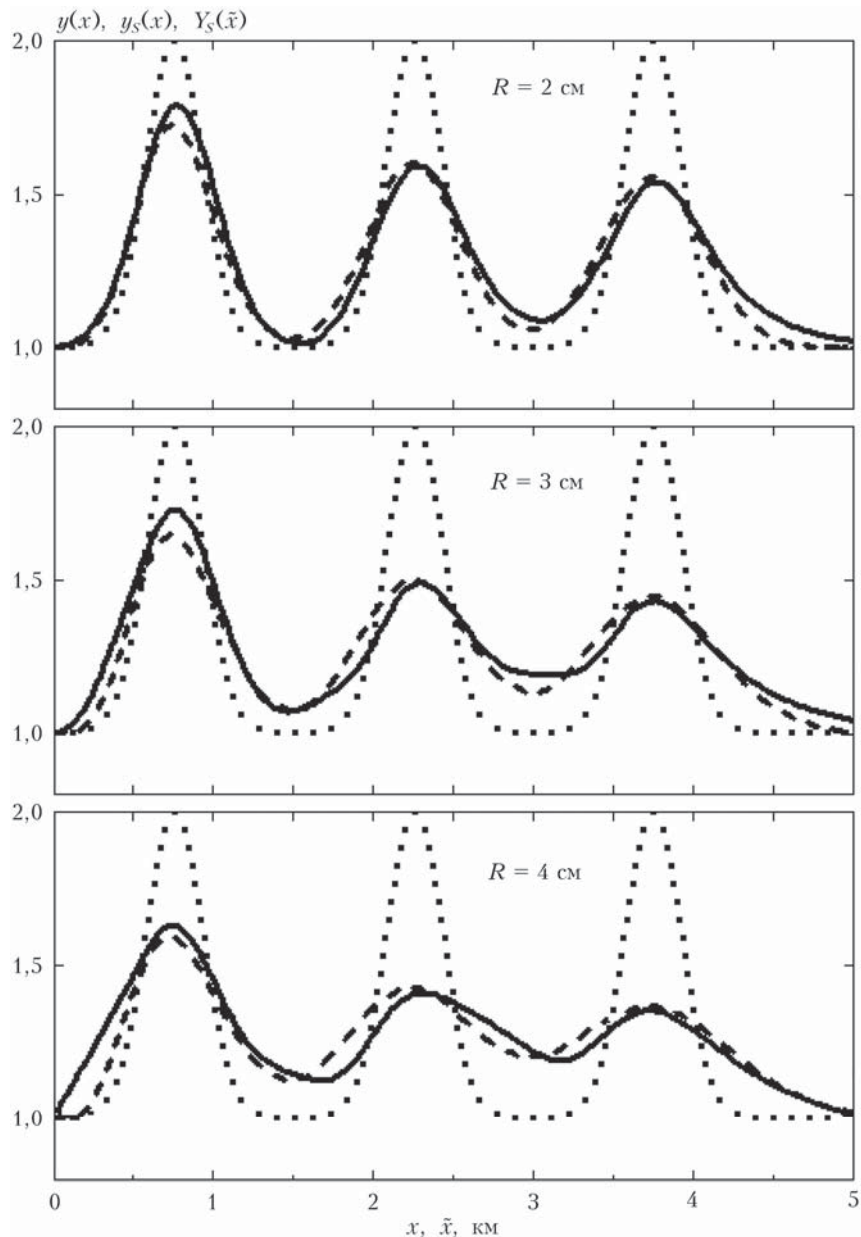


Рис. 8. Заданные распределения $y(x)$ (пунктир), $y_S(x)$ – распределения $y(x)$, сглаженные гауссовым окном переменной ширины (штриховые кривые), и восстановленные распределения $Y_S(\tilde{x})$, сглаженные окном постоянной ширины $S_Y = 300$ м как функции координаты \tilde{x} , определяемой формулой (17) (сплошные кривые)

Сравнение восстановленного по формулам для точечного приемника и сглаженного исходного распределений показывает их удовлетворительное согласие.

В заключении этого раздела следует отметить интересный результат, обнаруженный при решении обратной задачи локационного зондирования турбулентности с показателем степени γ трехмерного спектра, равным 4. Вместо формул (12), (13) в этом случае распределение $Y(x)$ восстанавливается по функции $f(x)$ через обычные производные:

$$Y(x) = f(x) + x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{6} x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \quad (18)$$

Оказалось, что восстановление по этой формуле возможно не только для турбулентности с $\gamma = 4$, но и для турбулентности с $\gamma = 11/3$. При этом функцию $f(x)$ нужно по-прежнему определять как $f(x) = q(x)/q_0(x)$, где функции $q(x)$ и $q_0(x)$ рассчитываются для среды с показателем $\gamma = 11/3$. Проверка показала, что формула (18) применима в случае приемников с радиусами апертур больше 1 см. Заметные различия наблюдаются лишь при радиусах апертур меньше 0,1 см.

Заключение

Показано, что формулы восстановления распределения структурной характеристики $C_n^2(x)$ по данным измерений фактора усиления обратного рассеяния, основанные на геометрооптической асимптотике ядра интегрального уравнения, применимы только на коротких трассах протяженностью около 0,5 км при радиусе приемной апертуры 10 см и около 1 км при радиусе 20 см. Эти протяженности в сотни раз меньше, чем соответствующие дифракционные длины $L_d = (2\pi/\lambda)R^2$, равные приблизительно 100 и 400 км при $\lambda = 0,53$ мкм. Ограничения обусловлены малыми осцилляциями ядра, которые приводят к сильным осцилляциям третьей производной измеренных данных.

Аналогичные формулы, основанные на асимптотической формуле ядра для точечного приемника, вследствие того, что в них входят производные не выше второго порядка, менее чувствительны к осцилляциям измеренных данных. Применение формул для точечного приемника, в случае приемников конечного радиуса, приводит к сглаживанию восстановленных распределений и их сдвигу относительно заданных. Эти факторы регулярны и их несложно учесть при интерпретации результатов восстановления данных измерений с приемниками, радиус которых не превышает 4–5 см.

Вместе со сглаживанием восстановленных данных применение приближения точечного приемника приводит к частичной потере в восстановленных данных информации о показателе спектра турбулентности. Это позволяет проводить восстановление данных измерений с показателем $\gamma = 11/3$ по простой формуле (18).

Автор признателен В.А. Банаху, М.Е. Горбунову, А.С. Гурвичу и И.Г. Якушкину за обсуждение результатов и конструктивные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-05-00332.

1. Воробьев В.В. О применимости асимптотических формул восстановления параметров «оптической» турбулентности из данных импульсного лидарного зондирования. I. Уравнения // Оптика атмосф. и океана. 2016. Т. 29, № 10. С. 870–875.
2. Гурвич А.С. Лидарное зондирование турбулентности на основе эффекта усиления обратного рассеяния // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2012. Т. 48, № 6. С. 655–665.
3. Гурвич А.С. Лидарное позиционирование областей повышенной турбулентности ясного неба // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2014. Т. 50, № 2. С. 166–174.
4. Банах В.А., Разенков И.А. Аэрозольный лидар для исследования усиления обратного атмосферного рассеяния. II. Конструкция и эксперимент // Оптика атмосф. и океана. 2015. Т. 28, № 2. С. 113–119.
5. Банах В.А., Разенков И.А. Лидарные измерения усиления обратного рассеяния // Оптика и спектроскопия. 2016. Т. 120, № 2. С. 339–348.

V.V. Vorob'ev. The validity of asymptotic formulas for recovery of "optical" turbulence parameters from data of the lidar sensing. II. Results of the numerical calculations.

The applicability of the formulas obtained in the first part of the article [1] is investigated in a numerical experiment. It is shown that the geometric optics approximation is applicable only for short distances hundreds of times smaller than the corresponding length of the diffraction. Limitations caused by the oscillations of the original integral equation kernel lead to strong oscillations of the third derivative of the measured data. Relationships based on the asymptotic formula for a point receiver are insensitive to the oscillations of the measured data. The application of formulas for point receiver in the case of finite radius of receivers leads to smoothing inversed distributions and their shift relative to the given ones. Method of accounting for these factors is developed. The use the approximation of a point receiver together with smoothing the restored distributions leads to a partial loss in the restored data information about the turbulence spectrum. This makes it possible to simplify the solution of the inverse problem, reducing it to the calculation of the second order derivatives.