

УДК: 532.5.013.4

## **Об устойчивости течения термовязкой жидкости в канале\***

**Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон**

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва*

E-mail: kulikov-yurii@yandex.ru; son.eduard@gmail.com

Представлены основные результаты исследования крупномасштабного вовлечения слоев термовязкой жидкости с различной температурой и их последующего перемешивания, наблюдаемого в плоскопараллельном течении, профиль скорости которого имеет точку перегиба. Показано, что процесс развития неустойчивости в канале происходит наиболее интенсивно в окрестности точки перегиба, причем он напрямую не связан с генерацией завихренности в пристеночной области. Рассматриваемое течение, оказывающееся неустойчивым относительно гармонических возмущений конечной амплитуды, имеет ряд резонансных частот, вызывающих наиболее активное вовлечение. Также проведен анализ температурных полей на основе осредненной толщины вовлечения и смещения среднего положения изолинии температуры. Обсуждаются спектральные характеристики полей энтропии, завихренности, кинетической энергии с точки зрения асимптотики наблюдаемых каскадов и существования когерентных структур. С помощью критерия Окубо–Вейса выделены четыре области течения, в которых возможна активная филаментация турбулентной пелены или длительное существование вихревых структур.

**Ключевые слова:** термовязкость, точка перегиба, вовлечение, смешение, когерентные структуры, энтропия, филаментация.

### **Введение**

Течения термовязкой жидкости (ТВЖ) являются предметом пристального внимания многих исследований [1–3], в неоднородных температурных полях они обладают многими примечательными свойствами, связанными с вопросами тепло- и массообмена, гидродинамической устойчивости [4] и турбулентности [5]. Профиль скорости ТВЖ, обладающий точкой перегиба [6] и оказывающийся неустойчивым [7], может оказывать решающее влияние на процесс крупномасштабного смешения, причем сам этот процесс, напрямую несвязанный с генерацией возмущений и завихренности в пристеночных областях, будет усиливаться по мере пространственного развития течения. С целью проверки этого утверждения в настоящей работе с применением схемы «Кабаре» моделируется плоскопараллельное ТВЖ с заранее установленным линейным распределением температур. Поле основного течения и распределения температур нарушаются гармоническими возмущениями скорости, задаваемыми на входной границе и развивающимися вниз по потоку.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №15-08-00457).

## 1. Численный метод

Численный метод «Кабаре» был разработан и активно развивается школой А.А. Самарского и В.М. Головизнина [8, 9]. Схема «Кабаре» существует в нескольких реализациях и способна описывать течения совершенного газа и несжимаемой жидкости. Для целей настоящего исследования она была реализована авторами в работе [10] в приближении слабой сжимаемости с использованием уравнения состояния

$$p = c^2(\rho - \rho_0), \quad (1)$$

где  $p$  — статическое давление,  $c$  — скорость звука,  $\rho$  — плотность жидкости в некоторой точке,  $\rho_0$  — характерное (реперное) значение плотности, что позволило упростить алгоритм отбора локальных инвариантов Римана и отказаться от решения уравнения Пуассона для давления. Схема была протестирована на изотермических задачах о выравнивании давления (частный случай задачи Римана [11]), об установлении течения в канале и распаде двойного слоя вихревой пелены. Текущая реализация схемы позволяет рассчитывать неизотермические течения, в ней переменная температура  $T$  играет роль «активного» скаляра, воздействуя на течение через сильную зависимость вязкости от температуры. В отличие от LES-методов [1], в классической реализации схемы «Кабаре» какие-либо настроечные параметры отсутствуют. Однако приближение слабой сжимаемости содержит произвольно выбираемую скорость звука  $c$ , задаваемую соотношением

$$c \geq 10 \max(U, V) \quad (2)$$

где  $U$  и  $V$  — компоненты скорости, и определяющую точность модели

$$\sigma_{\text{comp}} = \frac{[\max(U, V)]^2}{c^2} = M^2 \leq 0,01, \quad (3)$$

здесь  $M$  — число Маха. Схема «Кабаре», являющаяся в основном бездиссипативной (задача о диффузии вихря), в некоторых случаях этим свойством не обладает (распад однородной изотропной турбулентности в трехмерной постановке). Во многом это может быть связано с действием принципа максимума, применяемого при отборе значений переносимых локальных инвариантов.

В расчетах использовались несколько прямоугольных сеток с различным числом ячеек, необходимых, в частности, для выяснения вопроса сходимости:  $512 \times 128$  (сетка 1),  $2048 \times 184$  (сетка 2),  $1024 \times 256$  (сетка 3),  $2048 \times 512$  (сетка 4). Так как схема «Кабаре» относится к классу явных численных методов, то по условию устойчивости шаг по времени определяется минимальным размером шага пространственной сетки, относящегося к поперечному размеру канала  $L_y$ . Это обстоятельство существенно увеличивает трудоемкость расчетов при измельчении сетки поперек канала. Таким образом, используемые сетки позволяют в основном разрешить крупномасштабные движения. Полный список параметров, определяющих расчетную конфигурацию, приведен в табл. 1.

## 2. Постановка задачи

Расчет течения термовязкой жидкости проводится в плоской прямоугольной области шириной  $L_y$  и длиной  $L_x$ , причем динамическая вязкость сильно зависит от температуры  $T$ :

$$\mu = \mu_0 e^{\beta(T-T_0)/T_0}, \quad (4)$$

где  $\mu_0$  и  $T_0$  — реперные значения вязкости и температуры соответственно. Предполагая основное течение установившимся, будем рассматривать линейное распределение температуры между горизонтальными стенками канала

$$T(y) = (\Delta T/L_y)y + T_1, \quad (5)$$

Таблица 1

Список основных расчетных параметров

Название параметра	Обозначение	Значение
Скорость звука	$c$	0,03
Реперная вязкость	$\mu_0$	0,01
Реперная температура	$T_0$	127,0
Показатель экспоненты	$\beta$	-2,3
Длина канала,	$L_X$	8
Ширина канала	$L_Y$	0,4
Перепад давления	$\Delta p$	$5,0 \cdot 10^{-4}$
Реперная плотность	$\rho_0$	1000,0
Теплопроводность	$\lambda$	0,3
Теплоемкость	$c_p$	2000,0
Расчетные сетки	$n_X \times n_Y$	512×128, 520×200, 2048×184, 1024×256, 2048×512
Число Куранта	CFL	200 0,15
Относительная амплитуда возмущения	$\delta$	0,075

где  $T_1$  — температура нижней (холодной стенки),  $\Delta T$  — перепад температур. В качестве начального условия используется аналитически найденный профиль продольной скорости [12]

$$U_{\text{проф}}(y) = -\frac{C e^{-\alpha y/L_Y}}{\alpha(e^\alpha - 1)} (L_Y - L_Y e^{\alpha y/L_Y} - y + y e^\alpha), \quad y \in [0, L_Y], \quad (6)$$

где  $\alpha = \Delta T \beta / T_0$  — безразмерный комплекс,

$$C = \frac{L_Y^2}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta p}{L_X} e^{-\beta(T_1 - T_0)/T_0}, \quad (7)$$

остающийся стационарным благодаря заданию постоянного линейного градиента давления  $\Delta p/L_Y$  по длине канала. Значение безразмерного параметра  $\alpha$  выбиралось таким, чтобы точка перегиба была удалена от стенок, а высокоскоростное ядро потока не слишком сильно приближалось к пристеночной области. Возбуждение потока на определенной частоте позволяет управлять процессом развития неустойчивости в пространстве (в английской литературе — forcing) [12]. Рассматриваемая постановка задачи позволяет лучше привязать предсказания пространственной теории к результатам экспериментов, в которых частота возбуждения  $\nu$  — действительное число, а волновой вектор  $k$  может иметь и комплексную часть. Указанное однододовое возмущение задается для потоковых переменных на входе в виде

$$V = -\delta U_{\text{max}} \sin(2\pi\nu t), \quad (8)$$

где  $\nu$  — частота возмущения,  $t$  — расчетное время,  $\delta$  — относительная амплитуда,  $U_{\text{max}}$  — максимальное значение продольной скорости в сечении канала. Расчетная область со скоростным профилем, являющимся огибающей фронта гидродинамических возмущений, распространяющихся от входной границы канала, показана на рис. 1.

Выбор подобной постановки задачи связан с тем, что время установления профиля скорости, при  $\alpha \rightarrow 0$  соответствующее течению Пуазейля, быстро увеличивается при росте параметра  $\alpha$  вследствие увеличения асимметрии профиля. К сожалению, использование линейного распределения температуры не позволяет избежать многократного рутинного решения задачи установления течения. На боковых стенках канала задается условие постоянства температуры и прилипания жидких частиц. В качестве условия

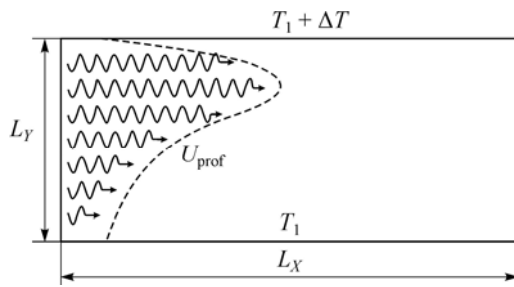


Рис. 1. Расчетная область с характерным скоростным профилем.

на входе задается то же известное распределение скорости поперек канала, а также величина статического давления. По заданным значениям производится расчет инварианта первого рода, «приходящего» на граничные потоковые ячейки из бесконечности. Инвариант второго рода, «приходящий» от выходного сечения, позволяет определить значения потоковых переменных на входной границе. В конце канала ставится условие постоянного статического давления, необходимое для поддержания постоянного перепада. Разность условных температур стенок выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальный диапазон изменения динамической вязкости поперек канала с начальным значением  $\mu_0$  у холодной стенки. Безразмерный профиль скорости (6) подсказывает характер подобия при изменении перепада давления, размеров канала, константы вязкости.

Расчеты проводятся в размерных переменных, однако результаты представляются в безразмерной (или приведенной) форме без потери общности. Это обусловлено удобством постановки задачи в описанном виде и сложностью выбора безразмерной комбинации физических величин, характерные значения которых однозначно связаны со свойствами течения. В дальнейшем будем рассматривать семейство подобных профилей скорости с точкой перегиба при различных числах Рейнольдса  $Re$ , соответствующих различным перепадам давления. Безразмерный параметр  $Re$  можно определить несколькими различными способами с учетом того, какая из входящих в него величин зависит от координаты поперек канала:

—  $Re_1 = U^* L_y \rho_0 / \mu^*$ , где  $U^*$  — локальная скорость,  $L_y$  — ширина канала,  $\rho_0$  — характерная плотность,  $\mu^* = \mu(y)$  — локальная динамическая вязкость, являющаяся функцией ширины канала;

—  $Re_2 = U L_y \rho_0 / \mu^*$ , где  $U$  — среднemasсовая скорость,  $L_y$  — ширина канала,  $\rho_0$  — характерная плотность,  $\mu^* = \mu(y)$  — локальная динамическая вязкость, являющаяся функцией ширины канала;

—  $Re_3 = U^* y^* \rho_0 / \mu^*$ , где  $U^*$  — локальная скорость,  $\mu^* = \mu(y)$  — локальная динамическая вязкость,  $\rho_0$  — характерная плотность,  $y^*$  — расстояние от стенки, причем это число определяется в области  $|y^*| \leq 0,15 \cup |L_y - y^*| \leq 0,15$ .

Одной из характерных величин является толщина слоя смешения, возникающего вследствие распространения колебаний поперечной скорости от входного сечения вниз по потоку.

В результате наложения возмущений на основной поток образуются когерентные структуры, рассматриваемые в том смысле, что их время жизни и пространственный размер превосходят интегральный масштаб турбулентности [13]. В выполненных расчетах число  $Re_2$  варьируется в достаточно широких пределах до  $Re_2 \sim 10^5$ . Таким образом, на отдельных участках течения должна наблюдаться иерархия вихрей различных масштабов, возникающих вследствие эволюции когерентных структур.

### 3. Частоты наиболее сильных возмущений

Перейдем к описанию поведения течения в случае генерации колебаний поперечной скорости произвольной частоты. Будем рассматривать только гидродинамическую моду

возмущения, следовательно, частота должна быть ограничена максимумом, за которым начинается диапазон акустических колебаний (например,  $\nu \sim 20$  Гц для воздуха при нормальных условиях) и влияние конечной сжимаемости  $\Delta\rho/\rho \propto M^2 = 0,01$ .

При поиске резонансной частоты для набора начальных данных задавалось произвольное значение  $\nu_0$ , которое затем корректировалось до  $\nu_2$  с учетом процесса распространения возмущений. Расчет проводился на сетке  $520 \times 200$ .

Приведем подробности алгоритма нахождения частоты доминирующих возмущений. Начальный поиск проводился без предположения о характере связи между частотой  $\nu$  и реализующимися волновыми числами  $k$  возмущения, а также скоростными характеристиками течения, определяемыми перепадом давления  $\Delta p$ . Далее будем пользоваться обозначением волнового числа в форме  $k_j = jk_0$ , где  $k_0 = 2\pi/L_Y$  — минимальное волновое число,  $j$  — номер гармоники. Подобное представление отражает тот факт, что получаемые пространственные гармоники соответствуют собственным колебаниям расчетной области. Генерация гармоник, связанных с размерами расчетной области (но не зависящих от параметров расчетной сетки), является характерным отличием всех численно решаемых задач от лабораторных и натуральных экспериментов.

Для наименьшего из рассматриваемых перепадов давления  $\Delta p = -5 \cdot 10^{-4}$  в качестве нулевого приближения устанавливается некоторая произвольная частота возмущения  $\nu_0 = 0,06$ ; при этом можно наблюдать эффект достаточно быстрого затухания поперечных возмущений скорости на длине  $L_X/L_Y \approx 5$  калибров. При уменьшении частоты колебаний, например, в два раза в начальной секции канала также наблюдаются затухающие возмущения, однако на середине его длины происходит возбуждение крупномасштабной гармоники. Рассматривая поле поперечных возмущений скорости и применяя преобразование Фурье к слою с максимальной амплитудой возмущений, можно установить волновые числа наиболее выделенных пространственных гармоник  $k_{20} = 20k_0$  (слабая амплитуда на среднем участке),  $k_{60} = 60k_0$  (частота основного возбуждения). Предполагая линейную связь между частотой и длиной волны возмущения, уменьшим частоту до  $\nu_1 = \nu_0 k_{20}/k_{60}$ . После появления нового режима преобразование Фурье дает  $k_{25}$  (частота возбуждения) в начальной секции, в то время как на среднем участке генерируется волна  $k_{14}$ . Таким образом, частоту необходимо уменьшить до  $\nu_2 = \nu_1 k_{14}/k_{25} = 3,733 \cdot 10^{-3}$ . При относительно малых перепадах давления число возбуждаемых мод невелико, поэтому искомая частота определяется достаточно просто.

Перейдем к определению новой частоты при двукратном увеличении давления ( $\Delta p = -1,0 \cdot 10^{-3}$ ), вновь начиная с произвольной частоты  $\nu_0 = 1,87 \cdot 10^{-2}$  (при этом для сохранения числа Маха потока необходимо удвоить скорость звука), тогда наибольшим амплитудам соответствуют  $k_{26}$  (частота возбуждения) и  $k_{13}$  (волна на середине длины канала). Таким образом, частоту нужно изменить до  $\nu_1 = \nu_0 k_{13}/k_{26}$ , что приводит к появлению большой группы гармоник (амплитуды указаны в скобках):  $k_3 = (5,77 \cdot 10^{-3})$ ,  $k_7 = (1,34 \cdot 10^{-2})$ ,  $k_9 = (2,73 \cdot 10^{-2})$ ,  $k_{11} = (2,01 \cdot 10^{-2})$ ,  $k_{14} = (2,09 \cdot 10^{-2})$ ,  $k_{18} = (3,46 \cdot 10^{-2})$ , где  $k_{18}$  соответствует частоте возбуждения, а  $k_9$  — волне, генерируемой на среднем участке, тогда  $\nu_2 = \nu_1 k_9/k_{18}$ .

При увеличении перепада давления до  $\Delta p = -8,0 \cdot 10^{-3}$  происходит усложнение спектров, связанное с возбуждением большого количества гармоник. Для поиска частот при больших перепадах давления можно использовать тот факт, что уже найденная функция  $\nu_2 = \nu_2(\Delta p)$  является линейной. Это, скорее всего, связано с линейной зависимостью скоростного профиля от перепада давления. Таким образом, рутинную процедуру можно ускорить, выбирая в качестве нулевого приближения  $\nu_0$  удвоенное значение предыдущей найденной частоты  $\nu_2$  с некоторой малой положительной добавкой. Следует обратить

Таблица 2

Зависимость картины смещения в окрестности точки перегиба от частоты при движении к резонансу из низкочастотной области

Значение резонансной частоты в долях	Картина смещения
$1/5 \nu_2$	На расстоянии 10 калибров от входа наблюдаются мощные аperiodические возмущения, пространственные гармоники наблюдаются слабо.
$2/5 \nu_2$	«Разрушения» потока на середине длины канала носят слабо периодический характер, пространственная форма возмущений является негармонической (по крайней мере в зоне перегиба профиля скорости). На конце трубы иногда наблюдаются небольшие периодические структуры, на которые накладываются хаотические колебания.
$3/5 \nu_2$	Возникают крупные «валы» с перемешиванием, деформации профиля температуры становятся слабее.
$4/5 \nu_2$	Возникают правильные крупномасштабные структуры, хорошо виден переход нарастания амплитуды из линейной стадии в нелинейную.
$\nu_2$	Происходит переход к возмущениям гармонической формы, с гребней которых иногда срываются мелкие моли жидкости и уносятся слоями с другой температурой.

внимание, что после изменения частоты возбуждения необходимо убедиться, что гидродинамические возмущения предыдущей частоты были полностью подавлены или вынесены основным течением за пределы расчетной области. В целом, при приближении частоты к резонансному значению вихревые структуры в течении становятся более упорядоченными, а перемешивание в них интенсифицируется. Краткое феноменологическое описание этого процесса приведено в табл. 2.

Отметим, что уравнения схемы «Кабаре» [10] представляются в размерной форме, таким образом, частоты возмущений  $\nu$ , перепады давлений  $\Delta p$  (см. рис. 2), а также шкала скорости (рис. 3) могут трактоваться в соответствующих величинах системы СИ.

В сериях расчетов авторами рассматривались медленные течения с максимальной продольной скоростью  $U \sim 10^{-3}$  м/с ( $\Delta p = -5 \cdot 10^{-4}$  Па), отличающиеся очень малой вязкостью в ядре потока для достижения больших характерных чисел Рейнольдса. Указанное обстоятельство помогает увеличить порядок величины физического шага по времени и уменьшить ошибки округления при выполнении операций на ЭВМ.

Вопрос достижения сеточной сходимости для частоты наиболее сильных возмущений отдельно не исследовался, однако заметим, что при выделенной частоте  $\nu_2 = 9,785 \cdot 10^{-3}$  ( $\Delta p = -8,0 \cdot 10^{-3}$ ), для которой в дальнейшем будут обсуждаться вопросы сеточной сходимости полей температуры, изменений структуры течения, связанных с изменением номера резонансной гармоники, не отмечается.

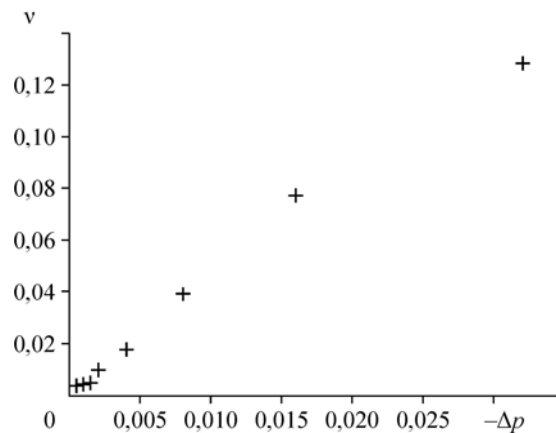


Рис. 2. Зависимость частот наиболее сильных возмущений от перепада давления.

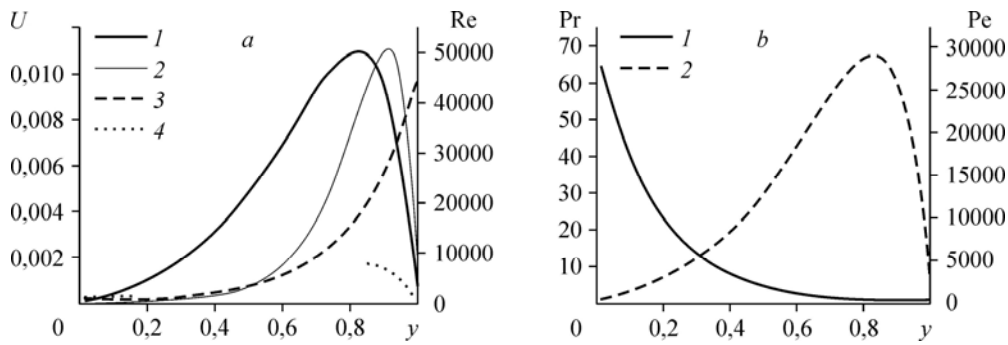


Рис. 3. Профиль продольной скорости, чисел Рейнольдса (а), Прандтля и Пекле (b) в поперечном сечении канала.

$a$  —  $U$  (1),  $Re_1$  (2),  $Re_2$  (3),  $Re_3$  (4),  $b$  —  $Pr$  (1),  $Pe$  (2).

#### 4. Исследование сходимости решения

Рассмотрим вопрос о сходимости решения (см. распределения характерных величин на рис. 3) на последовательности сгущаемых сеток. Сделанные выводы помогут определить размер сетки, подходящей для массового счета при различных амплитудах возмущения и значениях числа Прандтля, сообразуясь с требованием достаточной точности и ограниченности вычислительных ресурсов.

Результаты серии расчетов, представленные на рис. 4, показывают, что вихревые структуры отличаются на конечном участке трубы, причем особенно сильно различия выражены при сгущении сетки от 184 до 256 ячеек поперек канала, в то время как переход

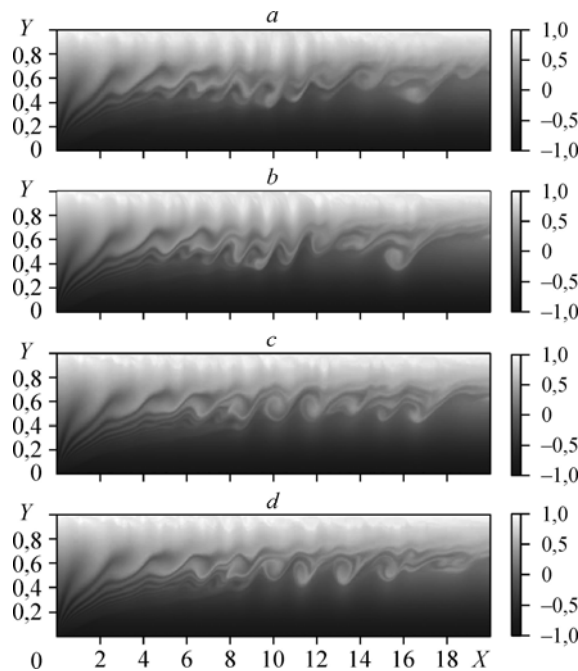


Рис. 4. Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени  $t = 134,375$  с.

Значение температуры (в безразмерных единицах) у нижней стенки составляет  $T = -1$ , у верхней стенки —  $T = 1$ , расчет на сетках  $512 \times 128$  (a),  $2048 \times 184$  (b),  $1024 \times 256$  (c),  $2048 \times 512$  (d) ячеек.

от сетки 3 к сетке 4 не сопровождается столь радикальными изменениями. На примере расчета на сетке 2, качество ячеек которой, определяемое соотношением сторон, существенно лучше сеток 1, 3, 4, показано, что более детального разрешения вихревых структур не достигается. Стоит также отметить, что крупномасштабные вихри не приводят к окончательному развалу течения, вероятно, процесс «перекачки» энергии от основного течения к возмущению происходит не столь интенсивно.

При числах Рейнольдса  $Re > 2000$  должен происходить переход к турбулентному течению в трубе [14], вместе с тем, смесительный переход (mixing transition) имеет место при гораздо больших числах Рейнольдса ( $Re = 10^4$ ) и тейлоровском числе Рейнольдса  $Re_T = 150-200$  [15]. Объяснение этого факта, возможно, стоит искать в особенностях двумерной турбулентности, генерируемой под действием низкочастотного возбуждения.

Крупномасштабный захват слоев жидкости с различной температурой происходит на дистанции 10 калибров с образованием больших структур в виде валов (billows), что хорошо видно на поле условной температуры. Поперечный перенос  $T$ , являющейся «активным» (по воздействию на основное течение) скаляром вследствие термовязкости, особенно существенен в области точки перегиба. Однако и в пристеночной области с большей температурой образуется система вихрей размером, составляющим около 1/3 размера крупномасштабных валообразных структур.

На рис. 5 приведены поля относительных ошибок консервативной переменной  $T$  на различных сетках в момент времени  $t = 134,375$  с. Характерной особенностью является существенная ошибка  $\varepsilon$  вычисления захваченных молей менее вязкой жидкости, которые скручиваются в спирали. Указанная знакопеременная величина определяется как

$$\varepsilon = \frac{[T]_{\text{fine}} - [T]_{\text{coarse}}}{[T]_{\text{fine}}}, \quad (9)$$

где  $[T]_{\text{fine}}$  и  $[T]_{\text{coarse}}$  — сеточные функции температуры на более мелкой и грубой сетках соответственно. Задача оказывается достаточно ресурсозатратной, вместе с тем, при переходе к более подробным сеткам появление мелкомасштабных вихревых структур не наблюдается.

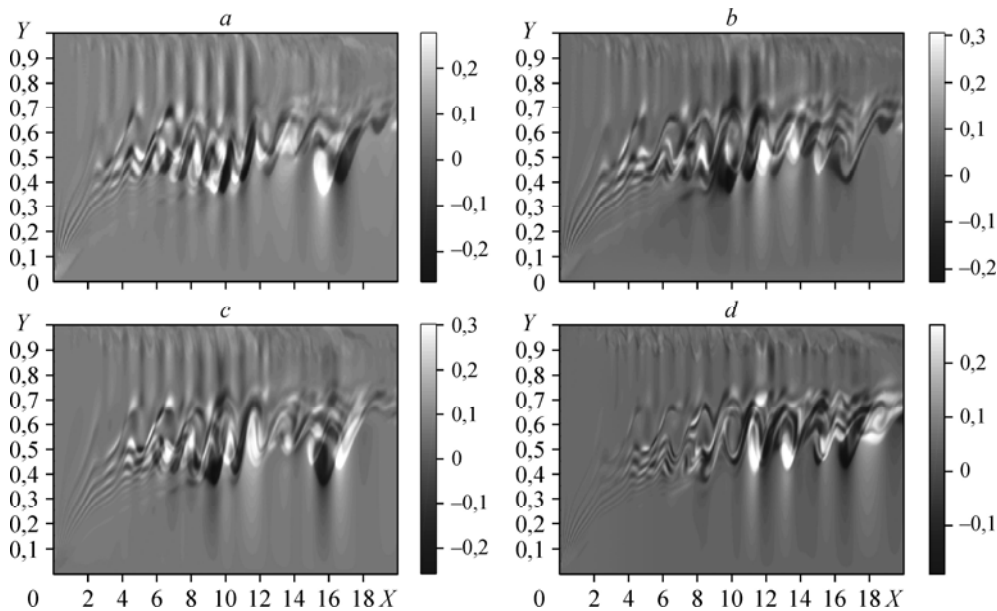


Рис. 5. Поле относительной ошибки температуры в момент времени  $t = 134,375$  с при расчетах с различным количеством ячеек в поперечном сечении канала.

$a$  — сетка 1 относительно сетки 2,  $b$  — сетка 1 относительно сетки 3,  
 $c$  — сетка 2 относительно сетки 3,  $d$  — сетка 3 относительно сетки 4.



Зависимость относительной ошибки в распределении поля температуры не дает особого оптимизма в решении вопроса сходимости: действительно, существенное увеличение количества расчетных ячеек по длине канала не слишком сильно повышает точность расчета, напротив, большее влияние имеет количество точек поперек канала, при этом сохраняется достаточно большая ошибка в слое смешения (25 %), что объясняется смещением положения слоев с различной температурой на сгущающихся сетках.

При сравнении сеток 3 и 4 оказывается, что основное различие связано со степенью закрученности «клубов» жидкости в слое смешения, однако существенного увеличения слоя вовлечения (layer of entrainment) не происходит. Таким образом, адекватным представляется расчет на сетке, содержащей 256 ячеек поперек канала. Это также продиктовано скоростью роста вычислительного объема задачи как  $2^3$  при измельчении сетки.

### 5. Зависимость картины течения от амплитуды возмущения

В проводимой серии расчетов в окрестности точки перегиба реализуется переходный режим течения с числом  $Re_1 \approx Re_2 \approx 2000$  таким, что возмущения, распространяющиеся слева от точки перегиба, должны затухать, а справа — нарастать. Зависимость амплитуды возмущений описывается формулой (8). Всего использовалось 5 значений амплитуды:  $\delta = 0,009375, 0,01875, 0,0375, 0,05, 0,075$ . Для получения данных о ширине слоя вовлечения ( $l_{mix}$ ) проводилось осреднение изолиний температуры после завершения процедуры установления течения. Всего использовалось шесть изолиний температуры, пять из которых были равноудалены друг от друга и имели следующее положение относительно нижней стенки:  $y/L_Y = 0,098, 0,298, 0,498, 0,898$ , еще один контур строился в окрестности точки перегиба (далее обозначается как изолиния  $i^*$ ).

Для самой малой из исследованных амплитуд  $\delta = 0,009375$  видимое нарастание возмущения происходит только в зоне точки перегиба, оно достигает максимума при  $L_X/L_Y \approx 2-6$ , а затем затухает на дистанции  $L_X/L_Y \approx 16$ . Вследствие вязкой стратификации средние линии контуров температуры отклоняются в сторону более холодной стенки. Этот процесс особенно заметен на среднем участке течения, относительное смещение средней линии в этом случае не превышает  $y_{med} = 0,04$ . Наиболее сильное нарастание толщины слоя крупномасштабного смешения соответствует  $y = 0,63$  (серый пунктирный график на рис. 6a и 6b, а также на рис. 7a), причем интенсивность вовлечения в слоях  $y = 0,63, 0,698, 0,898$  обладает некоторым подобием. В зоне высоковязких слоев происходит быстрое гашение амплитуды возмущения, несмотря на резкий начальный рост.

При описании развития неустойчивости в слое смешения можно использовать понятия абсолютной неустойчивости и конвективной неустойчивости [4], которые реализуются в свободных сдвиговых течениях при различном соотношении скоростей  $R = \Delta U / \bar{U}$ , где  $\Delta U$  — разность скоростей между двумя спутными потоками,  $\bar{U}$  — их средняя скорость. Для абсолютно неустойчивых течений развитие возмущения во времени в некоторой точке потока приводит к его экспоненциальному росту во всей расчетной области. Напротив, в конвективно неустойчивых течениях перенос возмущения синхронизирован с ростом его амплитуды, в результате чего основной поток остается невозмущенным [16].

Действительно, в окрестности точки перегиба, в которой происходит сначала рост амплитуды слоя смешения, а затем ее последовательный спад, выполняется условие конвективной неустойчивости:  $R < 1,1315$ . Для промежуточной амплитуды  $\delta = 0,01875$  видимое нарастание возмущения происходит только в зоне точки перегиба и демонстрирует

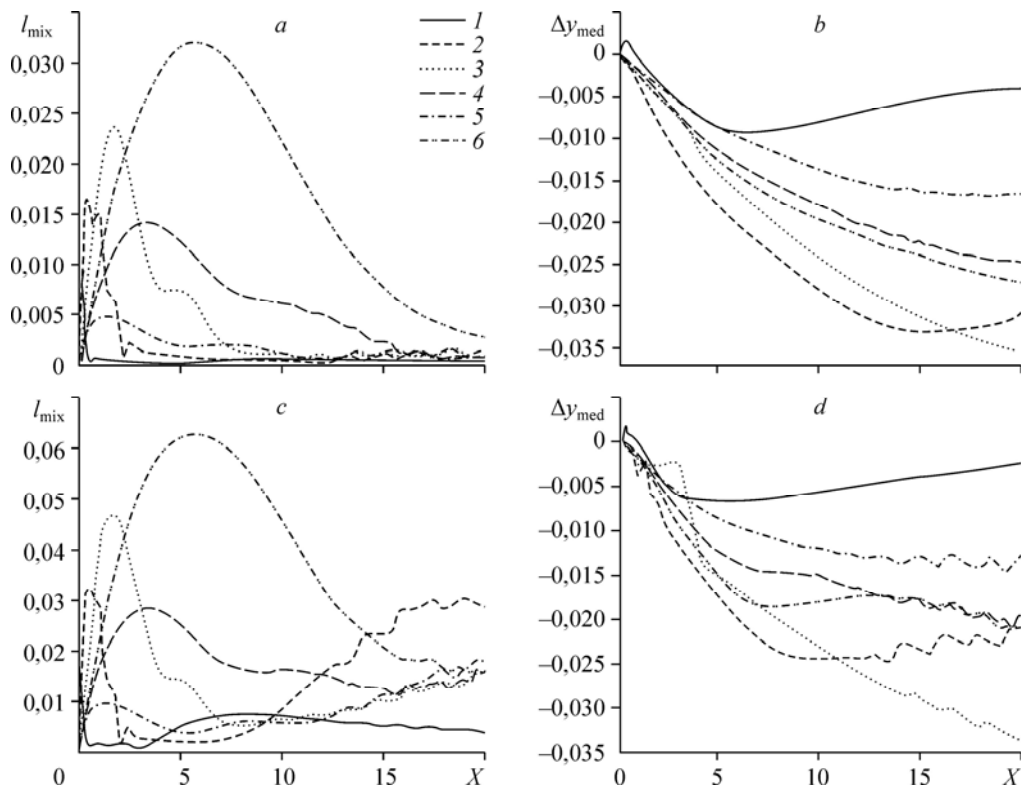


Рис. 6. Осредненные значения толщины слоя вовлечения при  $\delta = 0,09375$  (a),  $0,01875$  (c), а также смещения среднего значения изолинии при  $\delta = 0,009375$  (b),  $0,01875$  (d) относительно безразмерной начальной ординаты, равной  $0,098$  (1),  $0,298$  (2),  $0,498$  (3),  $0,698$  (4),  $0,898$  (5),  $0,630$  (6).

такое же поведение, что и для меньшей амплитуды. Однако на дистанции  $L_X/L_Y \approx 8-16$  происходит рост слоя вовлечения при  $y \approx 0,3$  и  $y \approx 0,9$  калибров (см. рис. 6c, 6d, 7b).

При увеличении амплитуды до  $\delta = 0,0375$  свертывания возмущений в регулярные валообразные структуры не происходит: при  $L_X/L_Y \approx 2$  наблюдается рост амплитуды возмущения с сохранением гармонической формы, затем высота гребня (gibbon) остается практически постоянной без вовлечения новых слоев жидкости на отрезке  $L_X/L_Y \approx 3-8$ ; в конце канала ( $L_X/L_Y \approx 9-20$ ) возмущение затухает, что выражается в практически полном рассеянии гребня. При  $\delta = 0,0375$  в момент времени  $t = 244,0$  (см. рис. 8a и 8b) начинается развитие смещения в слое  $y \approx 0,3$  и в пристеночной области у горячей стенки, где на дистанции 14–20 калибров ко времени  $t = 272,548$  начинается сворачивание «валов» (см. рис. 7c). Это приводит к усилению возмущения во всех слоях и к появлению немонотонности на всех графиках с  $L_X/L_Y \approx 3-8$  несмотря на то, что возмущение изолинии  $i^*$  к этому моменту ослабевает. Осредненное по времени поведение температурных изолиний имеет разную динамику: пристеночная изолиния (у холодной стенки) остается на месте, линии слева от точки перегиба сильнее всего вовлекаются в холодное течение до  $\Delta y_{\text{med}} \approx -0,04$ , с линиями справа происходит то же самое, но до  $\Delta y_{\text{med}} \approx -0,04$ . Отклонение изолинии  $i^*$  имеет сильную немонотонность: сначала поток втягивается в область холодного течения, в затем в область горячего. При росте амплитуды возбуждения до  $\delta = 0,05$  на участке 6 калибров начинается сворачивание «валов» более горячей и менее вязкой жидкости. Вовлечения более холодной жидкости в ядро потока практически не происходит.

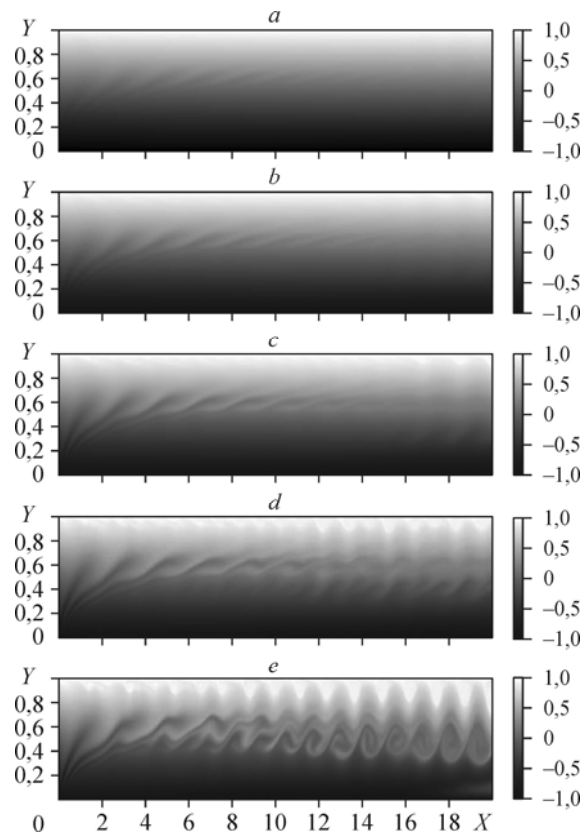


Рис. 7. Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени  $t = 134,375$  с при амплитудах  $\delta = 0,009375$  (a),  $0,01875$  (b),  $0,0375$  (c),  $0,059$  (d),  $0,075$  (e).

Значение температуры (в безразмерных единицах) у нижней стенки составляет  $T = -1$ , у верхней стенки —  $T = 1$ ; расчет на сетке  $1024 \times 256$  ячеек.

На половине длины канала начинается возвратное движение «вала» к ядру потока, который при  $L_X/L_Y \approx 12-15$  практически сливается с жидкостью той же температуры. Одновременно моли холодной жидкости медленно «выдавливается», в целом это приводит к уширению слоя смешения на конце трубы. Изолинии слоя смешения (см. рис. 7d, 8c и 8d) обладают поведением, схожим с предыдущим случаем, представленным на рис. 7c, 8a и 8b и, однако значения  $l_{\text{mix}}$  практически для всех кривых увеличиваются в два раза на дистанции  $L_X/L_Y > 12$ . В области 10 калибров спад становится еще более резким вследствие более быстрого возвратного движения. Графики средних значений изолиний  $\Delta y_{\text{med}}$  демонстрируют схожее поведение, но более подвержены осцилляциям.

При наложении квазирезонансной частоты картина течения после завершения переходных процессов при  $\delta = 0,075$  имеет следующий характер (см. рис. 7e, 8e и 8f): на расстоянии  $L_X/L_Y \approx 1-2$  происходит рост амплитуды возмущений температурного поля. Чем дальше поперек канала продвигаются слои маловязкой жидкости, тем с меньшей скоростью они движутся в продольном направлении. На участке  $L_X/L_Y \approx 3$  горячая часть гребня, расположенная ближе к основному ядру потока, начинает обгонять макушку гребня, что приводит к вытягиванию и искривлению структуры вдоль по потоку. Одновременно при  $L_X/L_Y \approx 4$  нижележащие слои медленно движущейся жидкости оказываются в состоянии противофазы, что приводит к началу возвратного движения. Такой же процесс происходит и в высокоскоростном ядре потока: там более

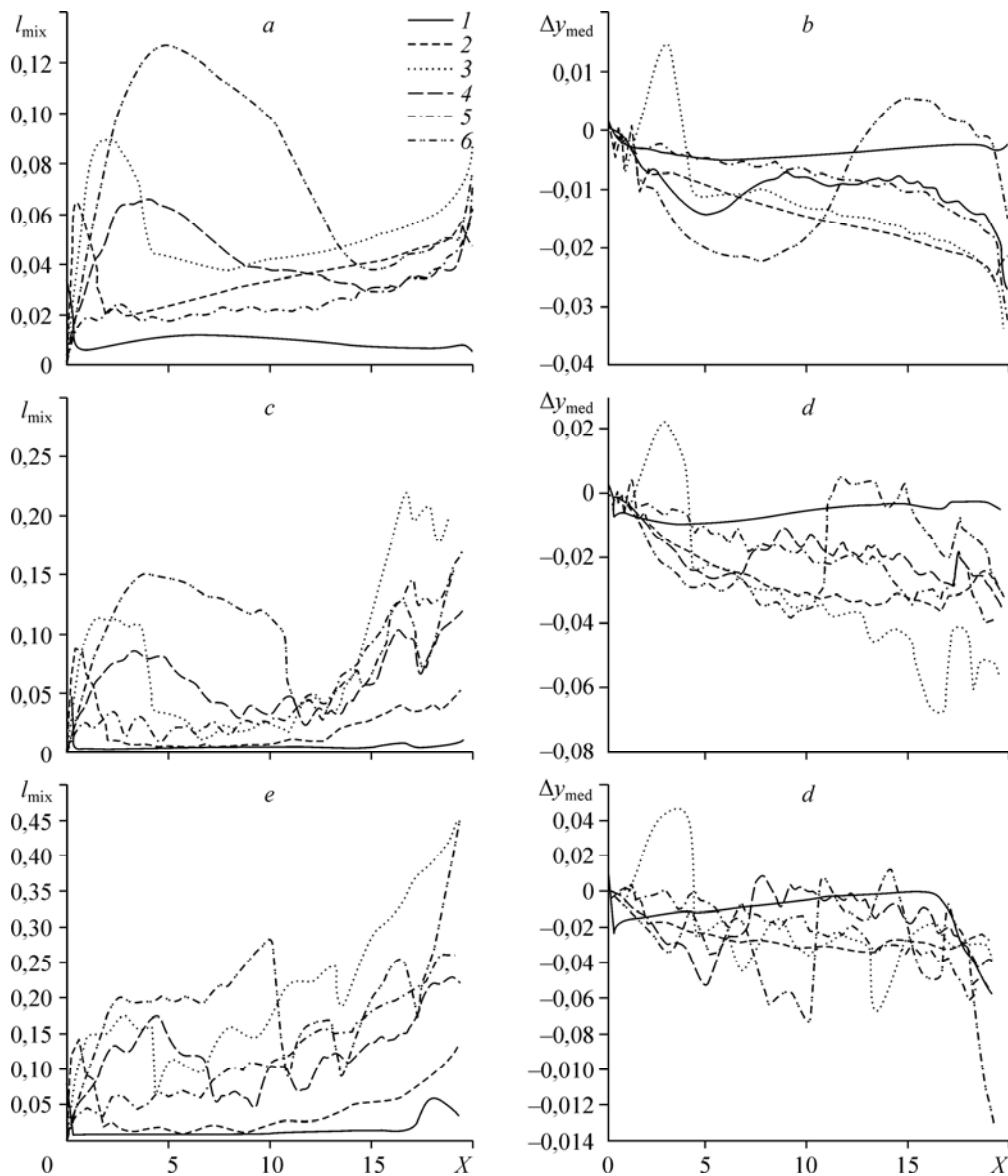


Рис. 8. Осредненные значения толщины слоя вовлечения при  $\delta = 0,0375$  (a),  $0,05$  (c),  $0,075$  (e), а также смещения среднего значения изолинии при  $\delta = 0,0375$  (b),  $0,05$  (d),  $0,075$  (f) относительно безразмерной начальной ординаты (положения слоя), равной  $0,098$  (1),  $0,298$  (2),  $0,498$  (3),  $0,698$  (4),  $0,898$  (5),  $0,630$  (6).

холодные слои жидкости также начинают смещаться в обратном направлении, однако из-за большей вязкости это происходит несколько позже ( $L_x/L_y \approx 8-10$ ). На дистанции 9–11 калибров горячие слои движутся в обратном направлении, приближаясь к ядру потока и одновременно «выжимая» более холодные, давно вовлеченные слои в область медленного течения. На второй половине канала образуется система медленно сворачивающихся вихрей с характерным размером, равным длине волны основного возмущения. Основная зона смешения при этом составляет  $1/3$  калибра и располагается не в пристеночной зоне и не в ядре потока, а в окрестности точки перегиба, где и происходит генерация завихренности вследствие неустойчивости.

Для самой большой из исследованных амплитуд в пристеночной области происходит сильнейшее демпфирование толщины слоя смешения на дистанции  $L_x/L_y \approx 0,5$  калибра, в то время как соседний слой ( $y = 0,298$ ) после подавления начинает медленно возрастать. Совершенно противоположное поведение наблюдается у горячей стенки, где смешение по своей скорости не уступает ядру потока, однако осциллирует гораздо меньше. Возможно, это объясняется более мелким масштабом вихревых образований в пристеночной области. Поведение в слоях  $y = 0,498$  и  $y = 0,063$  отличается крайней немонотонностью, осцилляциями и выбросами с амплитудой порядка  $l_{\text{mix}} \approx 0,15$ . Такие падения  $l_{\text{mix}}$  происходят в момент совершения слоями с соответствующей температурой, изначально захваченных холодной жидкостью, быстрого возвратного движения к ядру потока (например, при  $x \approx 10$  калибров).

Выполнение пространственного преобразования Фурье (см. рис. 9) в произвольный момент времени  $t = 276,818$  для полей завихренности, энтропии, кинетической энергии потока, а также кинетической энергии возмущений относительно невозмущенного стационарного профиля  $1/2((U - U_{\text{prof}})^2 + V^2)$  демонстрирует наличие некоторых закономерностей, соответствующих свойствам двумерного турбулентного течения. В частности, на уверенно разрешаемом участке спектра  $\omega^2$  имеется область, напоминающая асимптотику  $k^{-2}$ .

Рассматривая спектр завихренности, можно исходить из предположения о том, что в процессе развития течения существуют такие области [17], в которых основную роль играет тензор деформаций (гиперболическая область), и другие, в которых поведение определяется тензором вращений (эллиптическая область). Гиперболическая область связывается с развитой (однородной и изотропной) турбулентностью, в то время как эллиптические области должны соответствовать когерентным структурам (см. раздел, посвященный преобразованию Вейса и анализу картин завихренности). Здесь мы сталкиваемся с двояким толкованием термина «когерентные структуры»: с одной стороны, им обозначаются образования, имеющие размер больший интегрального масштаба турбулентности, с другой — уединенные сгустки завихренности, слабо взаимодействующие с вихрями других масштабов. Так или иначе, эти структуры существуют достаточно долго  $t \sim 100 u/l$ , выживая в процессе филаментации. Многие исследователи считают, что появление когерентных структур связано со специфическими начальными условиями. Таким образом, двумерная турбулентность «запоминает» гораздо больше в сравнении с ее трехмерным аналогом и базовыми представлениями теории Бэтчелора. Наклон спектра

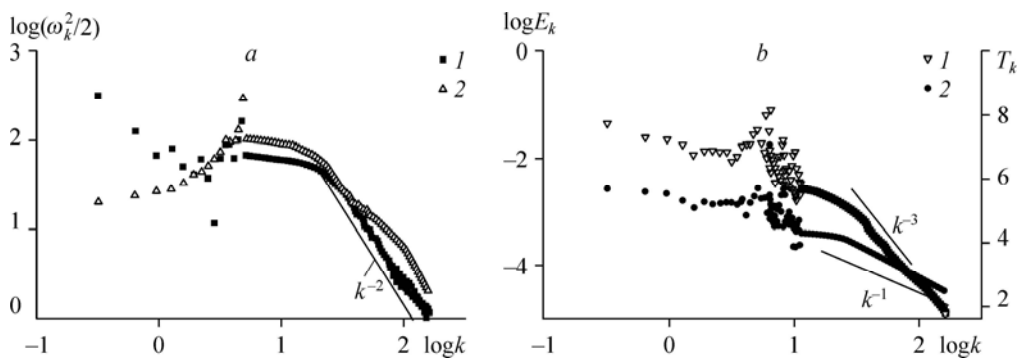


Рис. 9. Спектры преобразования Фурье энтропии  $\omega_k^2$  и завихренности  $\omega_k$  (а), кинетической энергии возмущений основного профиля скорости  $E_k$  и активной примеси (температура  $T_k$ ) (б).

а —  $\omega_k^2$  (1),  $\omega_k$  (2), б —  $E_k$  (1),  $T_k$  (2); сплошные линии указывают наклон асимптотик  $k^{-1}$ ,  $k^{-2}$  и  $k^{-3}$ ; для  $k > 1,05$  проводилась фильтрация спектров по методу Савицкого–Голея.

энтропии в логарифмических координатах на рис. 9а с некоторой точностью соответствует асимптотике  $k^{-2}$ , представляющей собой вклад эллиптических областей [17]. Отсутствие асимптотики  $k^{-1}$ , соответствующей турбулентной пелене, скорее всего, связано с недостаточным сеточным разрешением. Напротив, наклон спектра кинетической энергии возмущений хорошо согласуется с классической моделью турбулентности, по крайней мере в относительно небольшом интервале разрешаемых масштабов. В полях активного скаляра процесса быстрого разрушения мелких вихрей не наблюдается в отличие от трехмерного случая, где их эволюция происходит очень быстро. Действительно, ведь размерные оценки их времени жизни в двумерном ( $u\tau/l \sim 1$ ) и трехмерном ( $u\tau/l \sim Re^{-1/2}$ ) случаях принципиально различаются.

### 6. Зависимость толщины смешения от числа Прандтля

В серии расчетов для разных чисел Прандтля использовалось самое интенсивное течение из всех рассмотренных, в нем числа Рейнольдса  $Re_1$  и  $Re_2$  на основных участках потока соответствовали течению с развитой турбулентностью. Минимальное число Прандтля, определяемое по максимальной вязкости у холодной стенки, в приводимой серии расчетов имело значения:  $Pr = 66,67, 1,334, 6,67 \cdot 10^{-2}, 3,34 \cdot 10^{-3}$ , что не является достаточно показательным в силу резкого изменения вязкости поперек канала.

Для самого большого числа  $Pr = 66,67$  (см. рис. 10а, 10б) на дистанции 2 калибра происходит резкое вовлечение горячего гребня в холодный поток, а затем на уровне  $L_X/L_Y \approx 6$  резкое сворачивание «вала». На расстоянии 6 калибров начинается возвратное

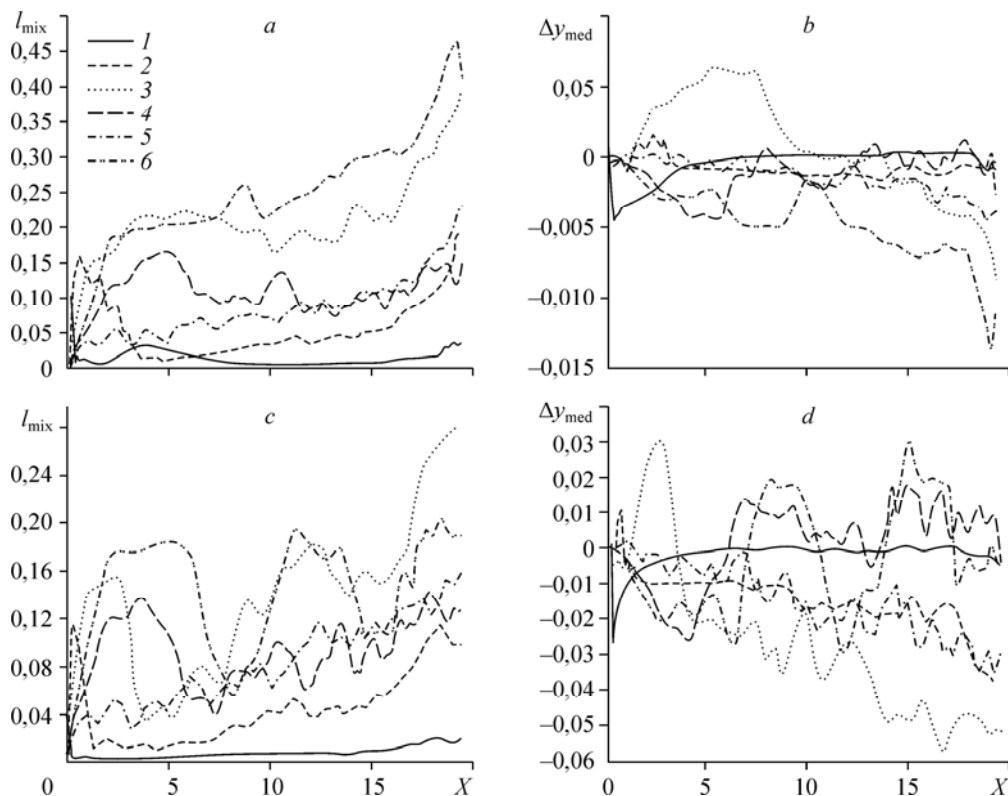


Рис. 10. Осредненные значения толщины слоя вовлечения при  $Pr = 66,67$  (а), 1,334 (с) и смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для  $Pr = 66,67$  (б), 1,334 (д).

$y/L_Y = 0,098$  (1), 0,298 (2), 0,498 (3), 0,698 (4), 0,898 (5), 0,630 (6).

движение горячего моля, приводящее к его растяжению (шнурованию) и сдваиванию. Ниже зоны  $i^*$  образуется слоистое течение вытянутых молей жидкости с разной температурой, смещающихся к ядру потока. На расстоянии 10 калибров от входа образуется регулярная система крупномасштабных валообразных структур, состоящих из образований разных температур и форм. Для этого же режима характерны самые большие значения слоя вовлечения, в отдельных слоях ( $y = 0,63$ ,  $y = 0,49$ ) достигающие 0,25–0,4 калибров, что свидетельствует об очень мощном процессе смешения. Причем амплитуда  $l_{\text{mix}}$  в этом случае на первой половине канала практически не убывает, а на второй постепенно растет, что приводит к удвоению значения  $l_{\text{mix}}$  на выходе. В отличие от случаев для меньших чисел  $Pr$  рассматриваемое семейство графиков оказывается гораздо менее подвержено пространственным осцилляциям. При  $Pr = 1,334$  на дистанции 2–4 калибра (см. рис. 10с, 10d) происходит увеличение высоты маловязкого гребня; при  $L_X/L_Y \approx 4$  начинается сворачивание гребня в вихрь, что уже при  $L_X/L_Y \approx 6$  становится малозаметным вследствие тепловой диффузии. Горячие слои жидкости не совершают возвратного движения (как в случае числа  $Pr = 66,67$ , см. раздел о сходимости), в результате в центральной части потока образуется дорожка молей более теплой жидкости в окружении холодной.

На дистанции  $L_X/L_Y \approx 10$ –20 происходит рассеяние основания горячего вихря и потеря регулярности формы. Вовлечения холодной жидкости в ядро потока практически не наблюдается. При уменьшении числа Прандтля до  $Pr = 6,67 \cdot 10^{-2}$  рост слоя смешения (рис. 11a) происходит крайне немонотонно, осцилляции становятся особенно сильными в пристеночной области возле горячей стенки ( $y = 0,898$ ), в ядре потока ( $y = 0,898$ )

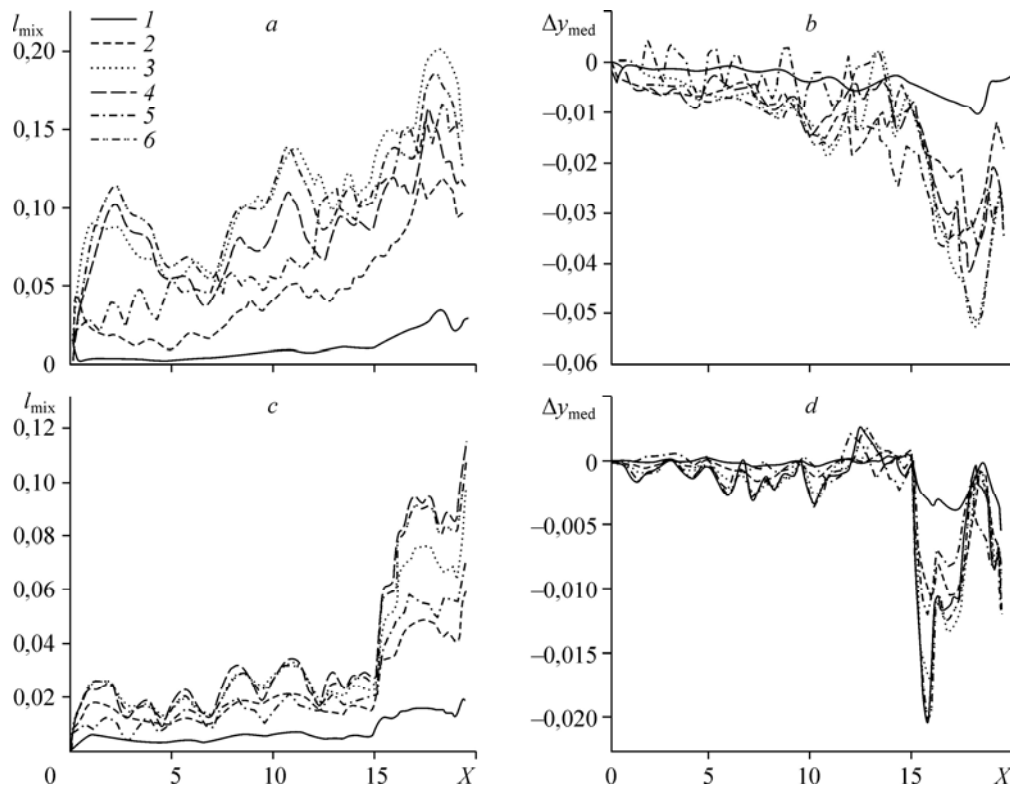


Рис. 11. Осредненные значения толщины вовлечения при  $Pr = 6,67 \cdot 10^{-2}$  (a),  $3,34 \cdot 10^{-3}$  (c) и отклонения изолиний  $y/L_Y = 0,098$  (1), 0,298 (2), 0,498 (3), 0,698 (4), 0,898 (5), 0,630 (6) от среднего положения при  $Pr = 6,67 \cdot 10^{-2}$  (b),  $3,34 \cdot 10^{-3}$  (d).

и в окрестности изолинии  $i^*$  ( $y = 0,693, 0,498, 0,298$ ). Максимальная интенсивность смешения опять приходится на зону  $i^*$ , однако в конце канала ( $L_X/L_Y \approx 15$ ) ей совершенно «не уступает» ( $I_{\text{mix}} = 0,15$ ) горячий пристеночный слой. Вследствие более сильного теплообмена образования высоких вихрей не происходит, их амплитуда остается практически постоянной по длине канала; кроме того, поле температуры слабо отражает процесс эволюции завихренности вследствие быстрого рассеяния температурных неоднородностей. Практически все температурные изолинии отклоняются в область холодной стенки (рис. 11*b*), подвергаясь при этом воздействию сильных осцилляций. При наименьшем  $\text{Pr} \approx 3,34 \cdot 10^{-3}$  высокая теплопроводность приводит к уменьшению толщины слоя вовлечения по сравнению со случаем, когда  $\text{Pr} = 6,67 \cdot 10^{-2}$ , до 0,015–0,03 на дистанции 1–15 калибров с резким ростом в 4 раза на конце трубы (см. рис. 11*c*, 11*d*). Связи между полем завихренности и температуры практически не наблюдается.

### 7. Анализ структуры течения с помощью метода Вейса

Разработка теорий двумерной турбулентности активно проводится с 60 гг. XX века, результатом чего стало появление работ [18, 19]. Первая из них основывается на положении, что двумерная турбулентность обладает прямым каскадом энстрофии от больших масштабов к малым, автомодельным (self-similar) энергетическим спектром и обратным потоком от малых масштабов к большим [20]. Обе работы определили основной круг вопросов теории двумерной турбулентности, которые остаются актуальными и поныне. Реализованная схема «Кабаре» построена в переменных  $U, V, \rho$ , тогда как основные уравнения теории турбулентности зачастую представляются в форме, содержащей в себе величину, производную от поля скорости, — завихренность  $\omega$ : в уравнении для скорости —

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}, \quad (10)$$

для диффузии завихренности —

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega. \quad (11)$$

В пределе  $\text{Re} \rightarrow \infty$  диффузия оказывается настолько малой, что ее изолинии оказываются «вмороженными» в вещество. Выражения (10) и (11) позволяют получить уравнения для кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{(\bar{u})^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \frac{p\bar{u}}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} (\omega^2 + \nabla \cdot (\omega \cdot \bar{u})), \quad (12)$$

для энстрофии:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = -\frac{\mu}{\rho} ((\nabla \omega)^2 - \nabla \cdot (\omega \nabla \omega))$$

и палинстрофии:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{(\nabla \omega)^2}{2} \right) = -S_{ij} (\nabla \omega_i) (\nabla \omega_j) - \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \omega^2 - \nabla \cdot ((\nabla^2 \omega) \nabla \omega)), \quad (13)$$

где  $D/Dt$  обозначает конвективную производную.

В предыдущих разделах процесс смешения анализировался на основе полей активного скаляра (температуры). Интересными представляются вопросы об асимптотике каскада энстрофии в инерционном интервале и реализации когерентных структур (если таковые имеются). Рассмотрим поведение линий завихренности в предельном случае ( $\mu \rightarrow 0$ ),



при этом завихренность оказывается «вмороженной» в жидкость и для нее выполняется соотношение

$$\frac{D}{Dt} \omega = 0, \quad (14)$$

тогда критерий Окубо–Вейса имеет вид

$$\frac{D^2}{Dt^2} (\nabla \omega) + \left( \frac{1}{4} \omega^2 - S_1^2 - S_2^2 \right) \nabla \omega = O \left( \frac{DS_1}{Dt} \nabla \omega, \frac{DS_2}{Dt} \nabla \omega, \frac{D\omega}{Dt} \nabla \omega \right), \quad (15)$$

где  $S_1 = \partial U / \partial x$ ,  $S_2 = 1/2(\partial U / \partial y + \partial V / \partial x)$  — компоненты тензора скоростей деформации. Результаты численных исследований [20] показывают, что Лагранжевы скорости изменения  $\omega$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  значительно меньше  $\nabla \omega$ . Таким образом, в качестве эмпирического факта можно принять, что

$$\frac{D^2}{Dt^2} (\nabla \omega) + \left( \frac{1}{4} \omega^2 - S_1^2 - S_2^2 \right) \nabla \omega \approx 0. \quad (16)$$

Необходимое условие выживания вихрей в процессе филаментации определяет так называемый критерий Окубо–Вейса:

$$\frac{1}{4} \omega^2 > S_1^2 + S_2^2. \quad (17)$$

Неравенство (17) является результатом анализа численного моделирования и не относится к строгой теории.

Можно разделить гиперболические и эллиптические зоны, выполнив преобразование

$$\lambda_{\text{OW}}^2 > 0 \Rightarrow \lambda_{\text{OW}}^2 = 1, \quad (18)$$

$$\lambda_{\text{OW}}^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_{\text{OW}}^2 = -1, \quad (19)$$

где  $\lambda_{\text{OW}}^2 = 1/4 \omega^2 - S_1^2 - S_2^2$ . Применение критерия Окубо–Вейса позволяет несколько поиному рассмотреть эволюцию активного скаляра  $T$ . Действительно, при достаточно сильных амплитудах  $\delta = 0,075$  и  $\delta = 0,05$  можно выделить четыре наиболее интересных области течения (см. рис. 12):

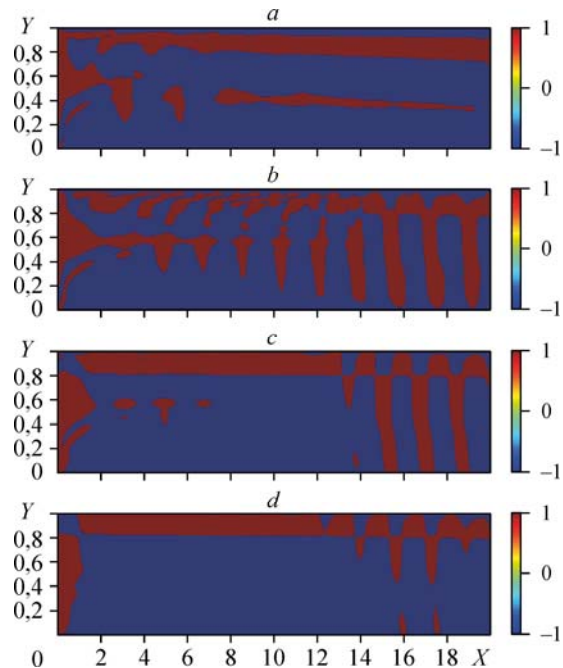
– пристеночный слой (синий), в котором должна преобладать филаментация и активно эволюционируют мелкие вихри;

– средний слой (ядро потока), где выживают когерентные структуры, имеющие характерную пилообразную форму;

– зона окрестности точки перегиба  $i^*$ , в которой  $1/4 \omega^2 < S_1^2 + S_2^2$ , и

Рис. 12. Гиперболические (красные) и эллиптические (синие) зоны в осредненном течении при амплитудах возмущения  $\delta = 0,075$  (a),  $0,05$  (b),  $0,0375$  (c),  $0,01875$  (d),  $0,009375$  (e).

Отрицательное подмножество  $\lambda_{\text{OW}}^2$  сведено к значению «-1», а положительное — к «1».



в крупномасштабных «валах» превалирует растяжение вовлеченных слоев жидкости разной температуры несмотря на наличие крупномасштабных вихревых структур;

– несколько ниже точки перегиба имеется узкий участок, где могут существовать когерентные структуры; вероятно, он соответствует зоне начала возвратного движения жидкости.

Возможно, что именно возвратно-поступательное движение нитей горячей и холодной жидкости, вызванное «противофазным» движением более быстрого ядра сверху и холодного «крыла» снизу, и приводит к активному росту  $\nabla\omega$ , филаментации, которой низкочастотное возбуждение придает характер «валов». При более мелких амплитудах  $\delta \leq 0,0375$  происходит чередование гиперболических и эллиптических областей вследствие периодического воздействия без каких-либо выраженных участков, протяженных по потоку. Осреднение проводится при различных амплитудах на числе шагов  $n = 1 \dots 2 \cdot 10^6$  по 600–2000 временным слоям уже после установления характерного режима течения. Сетка, использованная при интерполяции, насчитывала  $n_x \cdot n_y = 1024 \cdot 1024$  ячеек.

Теперь проследим за изменением расположения гиперболических и эллиптических зон при изменении числа Прандтля (см. рис. 13). В этом случае для серии расчетов использовался большой перепад давления и диапазон чисел Рейнольдса  $Re_1, Re_2$  при амплитуде  $\delta = 0,075$ . Картины распределения знака  $\lambda_{OW}^2$  имеют те же четыре зоны и не меняют своего положения при уменьшении  $Pr$ . При анализе временной эволюции поля завихренности строились контурные графики в диапазоне  $\omega \in [0,04, 0,07]$  с тем, чтобы лучше разрешить область относительно слабо закрученных вихревых образований в окрестности точки  $i^*$ . При переходном числе Рейнольдса в зоне  $i^*$  характер образующихся вихрей, очевидно, оказывается зависящим от амплитуды  $\delta$ : в нижней точке отрезка  $0,05 \leq \delta \leq 0,075$  уединенные вихри практически сохраняют округлую форму, постепенно теряя интенсивность, вероятно, вследствие диффузии завихренности, в то время как в верхней части интервала, начиная с расстояния 5–6 калибров, происходит активная деформация вихря, «пятна» (patches) завихренности растягиваются в нити в середине слоя  $y \approx 0,4$ –6 и сжимаются у его границ. В этом случае влияние вязкой диссипации начинает сказываться на  $L_x/L_y \geq 13$ . Ядру потока, а также точке перегиба соответствуют зоны чисел Рейнольдса  $Re_{1,2}$ , характерные для развитого турбулентного течения, что позволяет говорить о проявлении «вмороженности» линий завихренности в поток; противоположный процесс наблюдается для температуры  $T$  при последовательном увеличении  $Pr$ .

Как уже отмечалось выше, связь между полями завихренности и температуры теряется. Диапазоны завихренности в зоне  $i^*$  практически совпадают. Процесс деформации вихрей оказывается независимым от числа  $Pr$

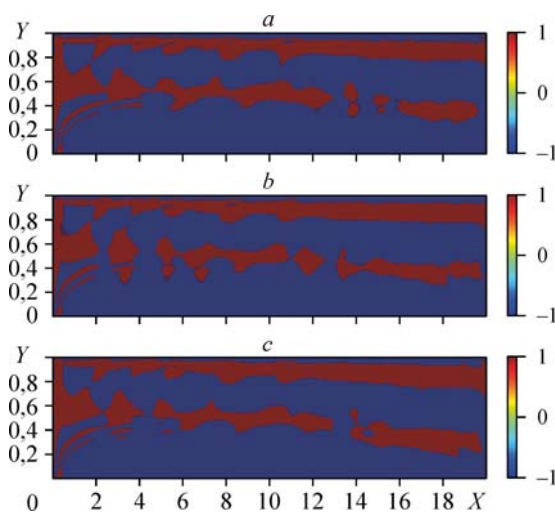


Рис. 13. Гиперболические (красные) и эллиптические (синие) зоны в осредненном течении при различных значениях минимального числа  $Pr$  в поперечном сечении канала.  $Pr = 1,334$  (a),  $6,67 \cdot 10^{-2}$  (b),  $Pr = 3,34 \cdot 10^{-3}$  (c); отрицательное подмножество  $\lambda_{OW}^2$  приведено к значению «-1», положительное — к «1».

если  $Pr \geq 1,334$ , в этом случае филаментация ядра вихря происходит во второй половине канала с образованием большого числа мелких пятен завихренности, также подверженных растяжению. Зачастую «шнурование» вихря оказывается достаточно сильным, что, однако, не приводит к его разрушению. При увеличении  $Pr$  происходит уширение контуров завихренности, соответствующих нижней части диапазона ( $\omega \approx 0,3$ ).

Связь между образующимся двойным каскадом и когерентными структурами остается не до конца выясненной. Так, высказывалось предположение, что образование обратного каскада энергии может быть связано со слиянием вихрей одинакового знака (по-другому — одинаково закрученных вихрей), а их филаментация — с механизмом образования прямого каскада  $\omega^2$ . Однако эта идея не оказалась сколько-нибудь плодотворной [21]. Возможность существования когерентных структур на различных масштабах также является открытым вопросом. В случае уравнения Эйлера для достаточно больших чисел Рейнольдса можно связать тензорные величины в критерии Вейса ( $\omega, S, \nabla \bar{u}$ ) со свойствами якобиана матрицы для градиента давления. Таким образом, критерий Вейса оказывается применим только в тех областях, где поле давления имеет существенную пространственную кривизну (в расчетах, проведенных в работе [21], эта зона не превышала 30 % от всей области). К зонам течения, где гипотеза Вейса верна, следует относить ядра крупных вихрей, а также окрестность седловых точек между одинаково закрученными вихрями. Подобная картина наблюдается и в рассматриваемом течении в зоне  $i^*$ : здесь имеется система одинаково закрученных вихрей с достаточно устойчивыми ядрами, которые затем деформируются ниже по течению.

### Выводы

Профиль скорости в течении термовязкой жидкости, обладающий точкой перегиба, имеет решающее значение для процесса крупномасштабного вовлечения, причем сам этот процесс будет усиливаться по мере пространственного развития течения, не являясь при этом напрямую связанным с генерацией возмущений и завихренности в пристеночном слое. Резонансная (квазирезонансная) частота оказывается линейной функцией перепада давления. Получение картин полей гидродинамических переменных является ресурсозатратной задачей. Ресурсозатратность связана с ошибками вычисления положения жидких молей с различной температурой, а также низкой скоростью процесса установления стационарного режима течения. Слой вовлечения оказывается зависящим в большей степени от амплитуды возмущения  $\delta$ , чем от числа  $Pr$ . Причем при увеличении амплитуды происходит переход от режима конвективной неустойчивости к режиму абсолютной неустойчивости. Изменение числа  $Pr$  приводит к тому, что процесс эволюции активного скаляра становится независимым от поля завихренности. Применение критерия Окубо–Вейса позволяет выделить характерные гиперболические и эллиптические зоны в течении, связанные с тем, какой из тензоров — деформации или завихренности — преобладает в потоке, что, в свою очередь, может приводить к активной филаментации турбулентной пелены или к сохранению когерентных структур некоторого масштаба.

### Список литературы

1. Yih C.-S. Instability due to viscosity stratification // J. of Fluid Mechanics. 1967. Vol. 27, No. 2. P. 337–352.
2. Potter M.C., Graber E.J. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // NASA TN D-6027. 1970.
3. Урманчев С.Ф. Течение термовязких сред // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 3, № 4. С. 1197–1199.
4. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic stability. 2-nd ed. Cambridge University Press, 2004. 619 p.
5. Мошин А.С. О природе турбулентности // Успехи физических наук. 1978. Т. 21, № 5. С. 429–442.

6. **Kulikov Y.M., Son E.E.** Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence // High Temperature. 2014. Vol. 52, No. 5. P. 723–729.
7. **Kulikov Y.M., Son E.E.** Stability of thermoviscous fluid flow under high temperature gradients // High Temperature. 2017. Vol. 55, No. 5. P. 131–138.
8. **Головизнин В.М., Самарский А.А.** Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101–166.
9. **Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.Н.** Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд-во Московского ун-та, 2013. 472 с.
10. **Kulikov Y.M., Son E.E.** The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // J. Physics: Conference Series. 2016. Vol. 774, No. 1. P 012094-1–012094-16.
11. **Черный Г.Г.** Газовая динамика: уч. для университетов и вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 424 с.
12. **Глотов В.Ю.** Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2014. 134 с.
13. **Hussain A.K.M.F.** Coherent structures — reality and myth // Physics of Fluids. 1983. Vol. 26, No. 10. P. 2816–2850.
14. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
15. **Dimotakis P.E.** The mixing transition in turbulent flows // J. of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 409. P. 69–98.
16. **Huerre P., Monkewitz P.A.** Absolute and convective instabilities in free shear layers // J. of Fluid Mechanics. 1985. Vol. 159. P. 151–168.
17. **Ohkitani K.** Wave number space dynamics of enstrophy cascade in a forced two-dimensional turbulence // Physics of Fluids. 1991. Vol. 3. P. 1598–1611.
18. **Batchelor G.K.** Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // Physics of Fluids. 1969. Vol. 12, No. 12. P. II-233–II-239.
19. **Kraichnan R.H.** Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Physics of Fluids. 1967. Vol. 10, No. 7. P. 1417–1423.
20. **Davidson P.A.** Turbulence: an introduction for scientists and engineers. N.Y.: Oxford, 2004. 678 p.
21. **Basdevant C., Philipovitch T.** On the validity of the “Weiss criterion” in two-dimensional turbulence // Phys. D. 1994. Vol. 73, No. 1–2. P. 17–30.

*Статья поступила в редакцию 31 марта 2017.,  
после доработки — 3 июня 2017 г.*