

УДК 539.3

ПЛАСТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ РАЗРУШЕНИЯ

А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Козлова, С. Л. Степанов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре
E-mail: khromov@imim.ru

На основе теории идеального жесткопластического тела сформулирован подход к определению констант разрушения на базе стандартных механических испытаний на одноосное растяжение плоских и цилиндрических образцов. Вместо экспериментально определяемых характеристик разрушения материалов: относительного удлинения и сужения образца при разрушении — введены две инвариантные тензорные характеристики степени деформированности образца, соответствующие моменту зарождения макротрещины и критической деформации в вершине трещины, определяющей процесс ее распространения.

Ключевые слова: деформация, пластичность, разрушение.

Введение. Актуальными проблемами теории идеальных жесткопластических тел являются неопределенность расположения и вида пластической области, а также неединственность поля скоростей перемещений, определяющих изменение геометрии тела [1]. Для практического использования теоретических решений необходимы критерий выбора предпочтительного мгновенного поля скоростей перемещений и критерии, определяющие изменение поля скоростей во времени (изменение пластической области). Такие критерии в теории идеального жесткопластического тела ранее не формулировались.

Критерии выбора предпочтительного пластического течения можно связать с особенностью формулировки экстремальных принципов неравновесной термодинамики на разрывах поля скоростей перемещений.

Основополагающим принципом при построении теории пластичности является принцип максимума скорости диссипации механической работы (принцип максимума Мизеса, один из экстремальных принципов), который связан с принципом Л. Онсагера [1]. Принцип Мизеса формулируется, как правило, в мощностях диссипации механической работы. Из него следуют ассоциированный закон течения, теорема единственности для поля напряжений, а также возможность существования разрывов поля скоростей перемещений. Однако на разрывах поля скоростей перемещений принцип Мизеса не выполняется, т. е. не определяется удельная мощность диссипации энергии, так как компоненты тензора скоростей деформаций обращаются в бесконечность либо не определены. Поэтому экстремальные принципы термодинамики, накладывающие ограничения на диссипативные свойства материалов, должны быть сформулированы с учетом особенностей полей скоростей перемещений. В данной работе предлагается связать эти принципы с деформациями частиц материала и удельной диссипацией энергии, т. е., по сути, использовать эмпирическое обобщение экстремальных принципов неравновесной термодинамики, сформулированное в [2] как принцип минимума диссипации энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-001002).

Определение полей деформаций. В качестве меры деформации выберем тензор конечных деформаций Альманси E , который определяется через тензор дисторсии A :

$$E_{ij} = (\delta_{ij} - A_{ki}A_{kj})/2, \quad A_{ij} = x_{j,i}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; x_i^0, x_i — соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты частицы. Изменения этих тензоров вдоль траектории движения частицы определяются уравнениями (см. [3])

$$\frac{d}{dt} A + W^* A = 0, \quad \frac{dE}{dt} + EW + W^* E = \varepsilon, \quad (2)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + V_k \partial/\partial x_k$; $W_{ik} = V_{i,k}$; $W_{ki}^* = V_{k,i}$.

Выбор тензора Альманси в качестве меры деформации не является единственным, так как уравнения типа (2) могут быть получены и для других тензоров деформаций (см. [3]).

Поле скоростей перемещений может иметь особенности (поверхности разрыва V_i , центр веера характеристик). Поэтому накопление деформации осуществляется при двух условиях: 1) в непрерывном поле скоростей V_i согласно уравнениям (2); 2) при пересечении частицей материала особенностей поля V_i , на которых компоненты ε_{ij} могут обращаться в бесконечность.

Изменение деформаций при пересечении частицей материала особенностей поля скоростей V_i рассматривалось в работах [4–7]. На основе теории разрывов Адамара — Томаса [8] изменения компонентов дисторсии на поверхности разрывов поля скоростей перемещений определяются выражениями

$$[x_{i,j}^0] = \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu} \tau_i \nu_j, \quad x_{i,j}^{0+} = \delta_{ij} + \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu} \tau_i \nu_j \quad (3)$$

в предположении, что материал до пересечения поверхности разрыва не деформировался ($x_{i,j}^0 = \delta_{ij}$). Здесь $[V_\tau]$, V_ν — разрыв касательной компоненты и нормальная компонента скорости перемещений на поверхности разрыва; G — нормальная скорость распространения поверхности разрыва; τ_i — единичный вектор касательной к поверхности разрыва, совпадающий с вектором разрыва скоростей перемещений; ν_i — единичный вектор нормали к поверхности разрыва.

Выясним физический смысл величины $W = [V_\tau]/(G + V_\nu)$. Выражение $[V_\tau]k dS dt$ — элементарная работа касательных сил на поверхности разрыва за время dt , где dS — элемент площади поверхности разрыва; k — касательная составляющая напряжений на поверхности разрыва (для идеального жесткопластического тела — предел текучести). Выражение $(G + V_\nu) dS dt$ — объем материала, прошедший через элемент поверхности dS за время dt . Тогда абсолютное значение величины

$$H = \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu} k \quad (4)$$

имеет физический смысл объемной плотности энергии диссипации, получаемой материальной частицей при пересечении поверхности разрыва скоростей перемещений, $W = H/k$.

Из (1), (3), (4) следует, что основные инварианты тензора E_{ij} вычисляются (при $x_{i,j}^0 = \delta_{ij}$) через величину W по формулам

$$(I_1)_E = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) = -\frac{W^2}{4}, \quad (I_2)_E = (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{W^2}{4} (W^2 + 4), \quad (I_3)_E = 0, \quad (5)$$

$$E_1 = \frac{W^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2 = -\frac{W^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} + 1 \right), \quad E_3 = 0.$$

Полученные соотношения существенно зависят от движения особенностей поля скоростей относительно материальных частиц. Все указанные параметры могут быть определены только при решении задачи с учетом изменения геометрии тела.

В условиях плоской деформации вследствие несжимаемости идеального жесткопластического тела только один инвариант тензора E_{ij} является независимым (например, E_1 — алгебраически наибольшее главное значение) и может быть принят в качестве характеристики величины деформации частицы. Параметр E_1 представляет собой монотонную функцию W , и величина W также может характеризовать величину деформации частицы при пересечении линии разрыва скоростей перемещений.

Если материал до момента пересечения линии разрыва деформировался и компоненты тензора дисторсии имели значения $x_{i,j}^{0-}$, то компоненты тензора дисторсии за линией разрыва будут иметь значения

$$x_{i,j}^{0+} = (\delta_{ik} + W\tau_i\nu_k)x_{k,j}^{0-}. \quad (6)$$

Критерий выбора предпочтительного пластического течения. Сформулируем следующий критерий.

1. Пластическое течение развивается таким образом, что максимальная деформация E_1 в пластической области минимальна: $\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} E_1$ (Ω — возможные пластические области для полных решений задачи; $d\Omega$ — возможные изменения пластической области при пластическом течении, определяющем движение ее особенностей в данный момент времени).

Переформулируем критерий 1 с учетом (5).

2. Пластическое течение развивается таким образом, что максимальная удельная энергия диссипации в пластической области минимальна: $\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} W$.

Критерии 1, 2 можно рассматривать как одну из математических формулировок локального принципа минимума диссипации энергии.

Деформирование плоского образца. Известны следующие решения задачи об одноосном растяжении плоского образца: с однородным полем деформирования образца (рис. 1,а), с разрывным полем скоростей перемещений — решение Оната — Прагера [9] (рис. 1,б) и возможное образование двойной “шейки” в достаточно длинном образце (рис. 1,в). На рис. 1, 3, 4 заштрихованные области соответствуют областям деформированного материала.

В случае однородного поля скоростей перемещений интегрирование уравнений (4) приводит к соотношениям [10]

$$E_1 = \frac{2\delta + \delta^2}{2(\delta + 1)^2}, \quad \frac{P}{4ka_0} = \frac{1}{\delta + 1}, \quad (7)$$

где $\delta = Vt/l_0$ — относительное удлинение полосы; a_0, l_0 — начальные ширина и длина полосы; P — усилие, необходимое для деформирования образца; k — предел текучести.

В случае разрывного поля скоростей перемещений (решение Оната — Прагера)

$$E_1 = W^2(\sqrt{1 + 4/\bar{W}^2} - 1), \quad W = [V_\tau]/G + V_\nu, \\ [V_\tau] = \sqrt{2}V, \quad V_\nu = \frac{V}{\sqrt{2}}, \quad G = 0, \quad \frac{P}{4ka_0} = 1 - \frac{V}{a_0}t.$$

На рис. 2 представлены зависимости от относительного удлинения основных механических величин, характеризующих процесс деформирования образца: первого главного значения тензора Альманси E_1 и усилия $P/(4ka_0)$, необходимого для деформирования об-

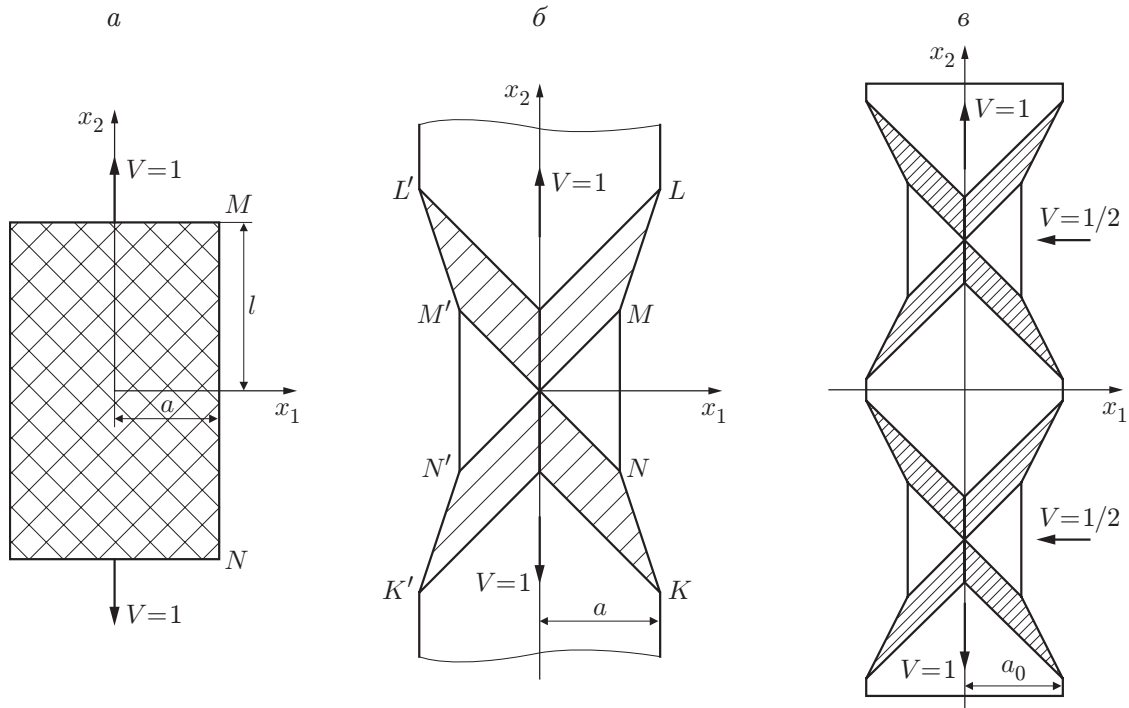


Рис. 1. Возможные полные решения задачи об одноосном растяжении плоского образца:

a — пластическое течение с однородным непрерывным полем скоростей перемещений;
б, в — пластическое течение с разрывным полем скоростей перемещений (*б* — решение Оната — Прагера [9]; *в* — решение в случае образования двойной “шейки” Оната — Прагера)

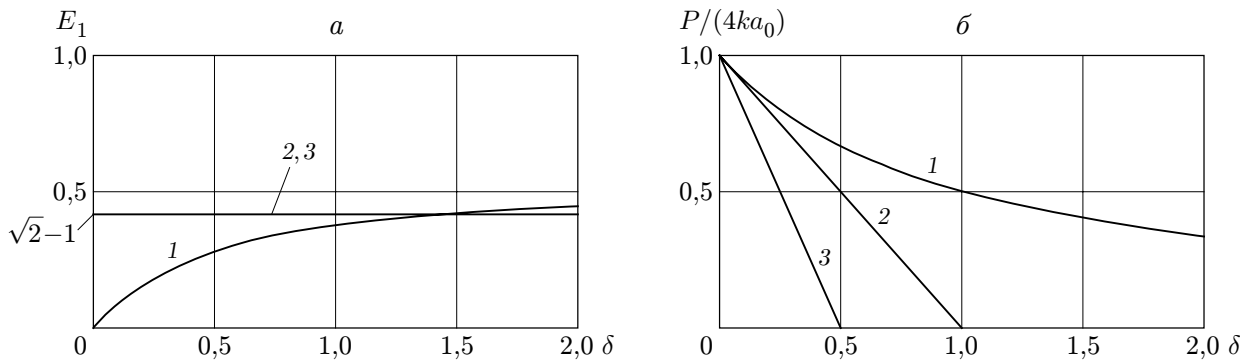


Рис. 2. Зависимости первого главного значения тензора Альманси E_1 (*a*) и усилия $P/(4ka_0)$, необходимого для деформирования образца (*б*), от относительного удлинения:

1 — пластическое течение с однородным непрерывным полем скоростей перемещений;
2 — пластическое течение с разрывным полем; скоростей перемещений (решение Оната — Прагера [9]); *3* — пластическое течение с разрывным полем скоростей перемещений с двойной “шейкой” Оната — Прагера

разца. Данные зависимости показывают существенное различие процессов деформирования: в непрерывном однородном поле скоростей перемещений деформации увеличиваются с конечной скоростью, однородно по всему образцу; в разрывном поле деформации изменяются скачком на конечную величину и превышают деформации в однородном поле, причем деформациям подвергается незначительная часть образца. Работа, необходимая для деформирования образца в однородном поле скоростей, значительно превышает работу, необходимую для его деформирования в разрывном поле скоростей. Аналогичные зависимости имеют место в случае осесимметричной деформации [7].

Согласно критериям 1, 2 предпочтительным является процесс деформирования образца при однородном поле скоростей перемещений, что подтверждается экспериментально на начальном этапе деформирования плоских и цилиндрических образцов до момента образования “шейки” [3].

Разрушение идеальных жесткопластических тел. Существование предпочтительного пластического течения позволяет сформулировать подход к описанию процессов разрушения на основе модели идеального жесткопластического тела.

Поле деформаций в окрестности вершины трещины в общем случае является неоднородным, и тензор деформации E_{ij} можно рассматривать как функцию координат φ и ρ полярной системы координат с началом в вершине трещины. К вершине трещины могут подходить несколько линий разрыва тензора деформаций, т. е. компоненты тензора могут быть разрывны по аргументу φ . Разрушение материала естественно связать с тензором деформаций, накопленных в процессе всей истории деформирования материала. В качестве простейшей модели разрушения идеального жесткопластического тела может быть выбрана следующая.

1'. Разрушение материала начинается тогда, когда максимальная деформация в вершине трещины (E_1) достигает предельной величины $\sup E_1 \geq E_*$. Скорость движения вершины трещины определяется соотношением $E_1 = E_*$.

Условие 1' может быть переформулировано.

2'. Разрушение материала начинается тогда, когда накопленная удельная диссипация энергии в вершине трещины достигает предельной величины $\sup W \geq W_*$. Скорость движения вершины трещины определяется соотношением $W = W_*$.

Условие выбора направления развития трещины с учетом неоднородности поля деформаций в окрестности ее вершины можно сформулировать в следующем виде: пластическое течение при разрушении развивается таким образом, что приращение работы, необходимой для деформирования тела, максимально ($\delta A = \sup \delta A$).

Процесс распространения трещины в плоском и цилиндрических образцах подробно рассмотрен в работах [6, 7, 10]. Соответствующие решения, являющиеся обобщением решения Оната — Прагера, представлены на рис. 3. Такой характер пластического течения хорошо описывает заключительный этап деформирования цилиндрических образцов [7] при образовании “шейки”, что подтверждается экспериментально.

Полная схема деформирования плоского образца. На первом этапе растяжения при определенных величинах деформаций происходит однородное деформирование образца до момента зарождения макротрещины малого размера (рис. 4,а). Далее однородное деформирование образца становится невозможным и пластическое течение описывается на основе обобщения решения Оната — Прагера (рис. 4,б). Происходит развитие макротрещины до разделения образца на две части. Основными размерами образца, характеризующими процесс его деформирования, являются $a_0, l_0, a_1, l_1, a_2, l_2$ — соответственно начальные, промежуточные и конечные длина и ширина образца.

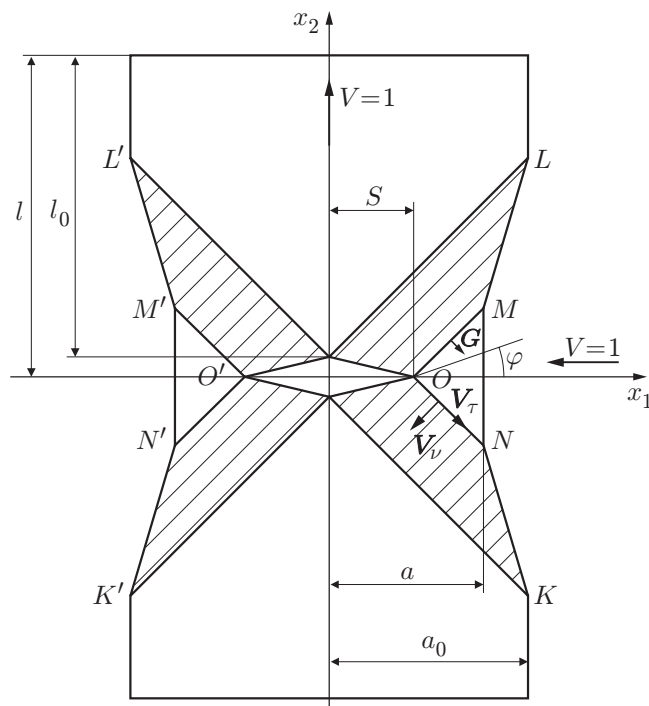
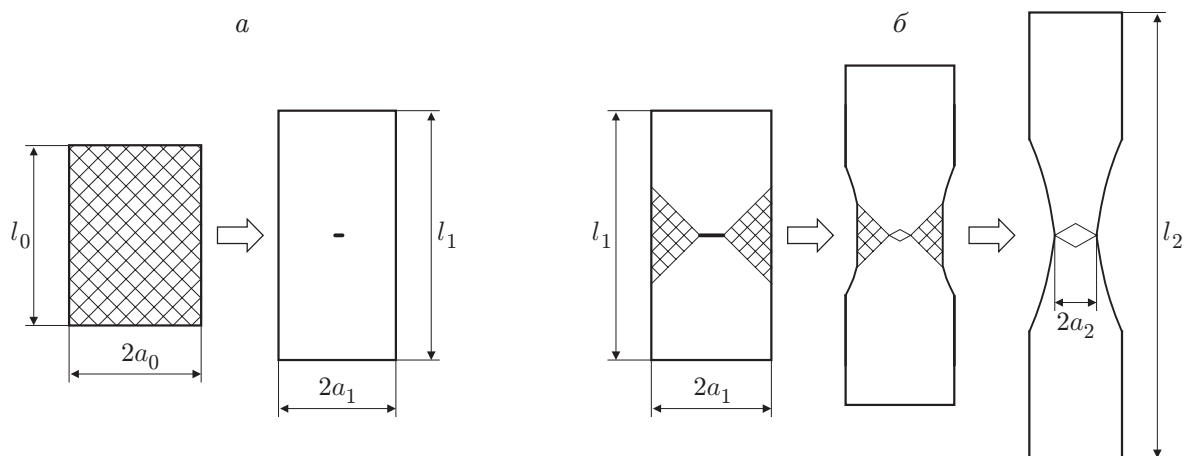


Рис. 3. Обобщенное решение Оната — Прагера с трещиной внутри образца

Рис. 4. Полная схема деформирования плоского образца до разрушения:
a — в однородном поле скоростей перемещений; *b* — в разрывном поле скоростей перемещений с распространяющейся трещиной

Определение констант разрушения. Одним из основных экспериментов по определению механических свойств материалов является эксперимент по растяжению плоских и цилиндрических образцов. Основной характеристикой процесса разрушения в данном эксперименте является относительное удлинение $\delta = (l_2 - l_0)/l_0$ и относительное сужение $\psi = (F_0 - F_2)/F_0$ образца при разрушении (F_0, F_2 — соответственно начальная и конечная площади поперечного сечения образца). Для большинства материалов $\psi < 1, F_2 > 0$, а величину F_2 можно рассматривать как площадь образовавшейся трещины.

Введем две константы материала: E_{**} — значение тензора Альманси E_1 , соответствующее концу первого (однородного) этапа деформирования образца и определяющее момент зарождения макротрещины и начала образования “шейки”, E_* — значение E_1 в вершине макротрещины, определяющее скорость ее распространения.

Из условия несжимаемости следует

$$l_1 a_1 = l_0 a_0. \quad (8)$$

На первом этапе концы полосы и жесткие области $MON, M'ON'$ (см. рис. 3) движутся с одинаковой по модулю скоростью V , поэтому

$$a_1 - a_2 = l_1 - l_2. \quad (9)$$

Из уравнений (8), (9) находим l_1, a_1 :

$$l_1 = [A + B]/2, \quad a_1 = [A - B]/2,$$

$$A = a_0(1 - \psi) + l_0(\delta + 1), \quad B = \sqrt{a_0^2(1 - \psi)^2 + 2a_0l_0(\delta - \psi - \psi\delta - 1) + l_0^2(\delta + 1)^2}.$$

Соответствующие концу первого этапа деформирования первое главное значение тензора Альманси E_{**} и удельная диссипация энергии определяются выражениями (7)

$$E_{**} = E_1 = (2\delta_1 + \delta_1^2)/(2(\delta_1 + 1)^2), \quad W_{*1} = 2 \ln(1 + \delta_1), \quad \delta_1 = (l_1 - l_0)/l_0.$$

На втором этапе деформирования (см. рис. 4, б) скорость распространения трещины dS/dt определяется скоростью распространения линии разрыва G . При постоянной скорости растяжения V эти величины связаны соотношением

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{2}G, \quad \frac{dS}{dt} = V \frac{a_2}{a_1 - a_2} = V \frac{1 - \psi_2}{\psi_2}, \quad \psi_2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1}.$$

Следовательно,

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dS}{dt} = \frac{V(1 - \psi_2)}{\sqrt{2}(a_1/a_0 - (1 - \psi_2))}.$$

Объемная плотность диссипации энергии на линии разрыва скоростей перемещений вычисляется по формуле $W_{*2} = 2\psi_2$ [10].

Компоненты тензора дисторсии и тензора Альманси связаны соотношениями (1) и условием несжимаемости

$$A^2 + C^2 = 1 - 2E_{11}, \quad B^2 + D^2 = 1 - 2E_{22},$$

$$AB + CD = -2E_{12}, \quad AD - BC = 1,$$

где $A = \partial x_1^0/\partial x_1; B = \partial x_1^0/\partial x_2; C = \partial x_2^0/\partial x_1; D = \partial x_2^0/\partial x_2$.

Пластические константы разрушения

Материал	δ , % [11]	ψ , % [11]	W_*	E_*	E_{**}
Алюминиевые сплавы:					
АД0 (лист)	35	80	1,6	0,384	0,168
АК8 (профиль)	7	15	0,3	0,129	0,046
АК8 (штамповка)	10	25	0,5	0,195	0,056
АД31 (профиль закаленный и искусственно состаренный)	17	70	1,4	0,364	0,035
АМГ6 (плита, нагартованная, 18 % в продольном направлении)	10	22	0,44	0,177	0,062
ВД17 (полоса пресованная, закаленная и искусственно состаренная, 60 мм)	10	19	0,38	0,157	0,068
АД33 (профиль пресованный, закаленный и искусственно состаренный)	12	30	0,6	0,223	0,066
Титановые сплавы:					
ВТ3-1 (штамповка)	14–20	45–60	0,9–1,2	0,291–0,340	0,056–0,085
ВТ6 (штамповка)	10–13	35–60	0,7–1,2	0,248–0,340	0,035–0,012
ВТ9 (штамповка)	8–14	25–45	0,5–0,9	0,195–0,291	0,035–0,056
ВТ14 (штамповка)	10–15	35–60	0,7–1,2	0,248–0,340	0,035–0,035

На первом этапе деформирование является простым (первые главные направления тензоров Альманси и скоростей деформаций совпадают между собой и с осью x_2), поэтому

$$B = 0, \quad C = 0, \quad E_{12} = 0, \quad E_{11} = E_1, \quad E_{22} = E_2,$$

$$A = \sqrt{1 - 2E_1}, \quad D = \sqrt{1 - 2E_2}.$$

Отсюда согласно (6)

$$\frac{\partial x_1^{0+}}{\partial x_1} = A, \quad \frac{\partial x_1^{0+}}{\partial x_2} = W_2 D, \quad \frac{\partial x_2^{0+}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{0+}}{\partial x_2} = D.$$

Величина E_* определяется выражением

$$E_* = (1/4)(1 - A^2 - W_2^2 D^2 - D^2) + (1/2)\sqrt{(A^2 + W_2^2 D^2 - D^2)^2 + 4A^2 D^2}.$$

Полная удельная объемная диссипация для частиц, деформирующихся на первом и втором этапах, определяется по формуле $W_* = W_{*1} + W_{*2}$.

В таблице даны константы разрушения для некоторых конструкционных материалов. Инвариантные тензорные деформационные и энергетические характеристики разрушения конструкционных материалов позволяют корректно использовать экспериментально определяемые величины при расчете сложных конструкций и их элементов различными численными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
2. Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. Сер. Академ. чтения. М.: Наука, 1987.
3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

4. **Хромов А. И.** Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996.
5. **Хромов А. И.** Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН. 1998. Т. 362, № 2. С. 202–205.
6. **Хромов А. И.** Деформация и разрушение жесткопластической полосы при растяжении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 136–142.
7. **Козлова О. В., Хромов А. И.** Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 3. С. 342–345.
8. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
9. **Onat E., Prager W.** The necking of a tension specimen in plane plastic flow // J. Appl. Phys. 1954. V. 25, N 4. P. 491–493.
10. **Хромов А. И., Жигалкин К. А.** Математическое моделирование процесса деформирования материалов // Дальневост. мат. журн. 2002. Ч. 3, № 1. С. 93–101.
11. **Конструкционные материалы:** Справ. / Под ред. Б. Н. Арзамасова. М.: Машиностроение, 1990.

*Поступила в редакцию 11/II 2005 г.,
в окончательном варианте — 5/VII 2005 г.*
