

AMS subject classification: 35L10, 35R30, 65R30

Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева*

М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев

Марийский государственный университет, пл. Ленина, 1, Йошкар-Ола, 424001

E-mails: kokrunm@yandex.ru (Кокурин М.Ю.), vfri@mail.ru (Ключев В.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 441–458.

Линейное интегральное уравнение М.М. Лаврентьева возникает в результате специального преобразования нелинейной коэффициентной обратной задачи волнового зондирования. Доказывается полнота системы произведений регулярных гармонических функций и ньютоновых потенциалов, сосредоточенных на отрезке. В качестве следствия устанавливается теорема единственности решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева и связанной с ним обратной задачи волнового зондирования. Приведены результаты приближенного решения указанного уравнения с использованием распараллеливания вычислений.

DOI: 10.15372/SJNM20220409

Ключевые слова: волновое зондирование, гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, интегральное уравнение, единственность решения, метод квадратур, метод сопряженных градиентов, параллельные вычисления.

Kokurin M.Yu., Klyuchev V.V. Uniqueness conditions and numerical approximation of the solution to M.M. Lavrentiev’s integral equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 441–458.

M.M. Lavrentiev’s linear integral equation arises as a result of a special transformation of a nonlinear coefficient inverse wave sensing problem. The completeness of the set of products of regular harmonic functions and Newtonian potentials supported by a segment is proved. As a corollary, we establish the uniqueness of the solution to M.M. Lavrentiev’s equation and a related inverse problem of wave sensing. We present results of an approximate solution of this equation by using parallelization of calculations.

Keywords: wave sensing, hyperbolic equation, coefficient inverse problem, integral equation, uniqueness of solution, quadrature method, conjugate gradient method, parallel calculations.

1. Постановка задачи

Многие нелинейные коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть сведены к линейным интегральным уравнениям. Общий подход к такой редукции с использованием преобразования Лапласа предложил М.М. Лаврентьев в работах [1, 2]. Ниже рассмотрим обратную задачу волнового зондирования в следующей постановке: акустическая неоднородность, локализованная в ограниченной

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20085).

области $D \subset \mathbb{R}^3$, зондируется волновыми полями, порожденными точечными источниками, расположенными в точках множества $Y \subset \mathbb{R}^3$, где $Y \cap D = \emptyset$ [3]. Под областью понимаем открытое связное множество и считаем, что $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ также есть область. Акустическое поле $u(x, t) = u^{(y)}(x, t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке $y \in Y$, определяется решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}^{(y)}(x, t) &= \Delta u^{(y)}(x, t) - \delta(x - y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u^{(y)}(x, 0) &= 0, \quad u_t^{(y)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Величина $c(x) > 0$ есть скорость распространения сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Эта функция неизвестна при $x \in D$ и $c(x) \equiv c_0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$, постоянная c_0 задана. Будем считать функцию $c = c(x)$ кусочно-непрерывной. Предположим, кроме того, что функция g имеет ненулевое среднее значение на $[0, \infty)$ и $|g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, при некотором $\beta > 0$.

Для получения информации о $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u^{(y)}(x, t)$, $y \in Y$, измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ — множество детекторов, причем $Z \cap D = \emptyset$. Множества источников Y и детекторов Z могут пересекаться или совпадать. Определим для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$, преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$. Будем считать, что все функции $u^{(y)}(x, t)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$, когда $x \in Z$, и, кроме того, $u^{(y)}(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $y \in Y$ и $t > 0$. В [4, 5] обсуждаются условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u^{(y)}(x, t) - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}^{(y)}(x, t) = \xi(x) u_{tt}^{(y)}(x, t) + \delta(x - y)g(t). \quad (1.2)$$

Очевидно, что для нахождения $c(x)$ достаточно ограничиться отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$, по которой $c(x)$ определяется однозначно.

Применяя к обеим частям (1.2) преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \widetilde{u^{(y)}}(x, p) - \frac{p^2}{c_0^2} \widetilde{u^{(y)}}(x, p) = p^2 \xi(x) \widetilde{u^{(y)}}(x, p) + \tilde{g}(p) \delta(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Предположения относительно свойств $u^{(y)}(x, t)$ гарантируют, что $\widetilde{u^{(y)}}(x, p) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $y \in Y$, $p \geq 0$. Воспользуемся функцией Грина уравнения

$$\Delta v(x) - \lambda^2 v(x) = \delta(x - x'), \quad \lambda \geq 0,$$

с условием на бесконечности $v(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Эта функция имеет вид

$$G(x, x'; \lambda) = -\frac{e^{-\lambda|x-x'|}}{4\pi|x-x'|}. \quad (1.4)$$

Из (1.3) с учетом (1.4) следует равенство

$$\widetilde{u^{(y)}}(x, p) = p^2 \int_D G\left(x, x'; \frac{p}{c_0}\right) \xi(x') \widetilde{u^{(y)}}(x', p) dx' + \tilde{g}(p) G\left(x, y; \frac{p}{c_0}\right), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Используя представление (1.5) функции $\widetilde{u}^{(y)}$ для подстановки в правую часть (1.5), получим

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^{(y)}(z, p) = p^4 \int_D \int_D G\left(z, x'; \frac{p}{c_0}\right) G\left(x', x''; \frac{p}{c_0}\right) \widetilde{u}^{(y)}(x'', p) \xi(x') dx' dx'' + \\ p^2 \widetilde{g}(p) \int_D G\left(z, x'; \frac{p}{c_0}\right) G\left(x', y; \frac{p}{c_0}\right) \xi(x') dx' + \widetilde{g}(p) G\left(z, y; \frac{p}{c_0}\right), \quad z \in Z. \end{aligned} \quad (1.6)$$

После переноса последнего слагаемого в правой части (1.6) в левую часть и деления обеих частей (1.6) на $p^2 \widetilde{g}(p)$ перейдем к пределу при $p \rightarrow 0+$. Мы получим линейное интегральное уравнение относительно искомой функции ξ :

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x - y| |x - z|} = f(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z. \quad (1.7)$$

Здесь

$$f(y, z) = \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\widetilde{u}^{(y)}(z, p) - \widetilde{g}(p) G\left(z, y; \frac{p}{c_0}\right)}{\widetilde{g}(0) p^2}.$$

Итак, данные наблюдения $\{u^{(y)}(z, t) : t > 0, y \in Y, z \in Z\}$ позволяют однозначно найти $\xi(x)$, $x \in D$, если оператор интегрального уравнения (1.7) инъективен.

В дальнейшем уравнение (1.7) будем называть уравнением М.М. Лаврентьева [6, 7]. Кроме рассматриваемой задачи (1.1) к уравнению (1.7) сводятся также обратные задачи акустического зондирования гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [8, § 3.1; 9, с. 223; 10]). В задаче зондирования неоднородного включения $D \subset G$, где G — ограниченная область, применение вместо (1.4) соответствующей функции Грина приводит к аналогичному уравнению [11].

Условием единственности решения уравнения (1.7) посвящено значительное число работ, начиная с [2] и далее [3, 7, 9, 10, 12–15]. Например, если Y и Z — открытые области на плоскости, не пересекающей D , либо на аналитической поверхности, содержащей множество D внутри, то оператор уравнения (1.7) инъективен, и тем самым рассматриваемая обратная задача имеет единственное решение. При этом совокупная размерность 4 пространственного носителя данных $Y \times Z$ в (1.7) больше количества 3-х независимых переменных искомой функции ξ . Тем самым имеет место пространственная переопределенность постановки обратной задачи зондирования. Позднее в работах [13, 15] показано, что инъективность оператора в (1.7) имеет место и в случае, когда одно из многообразий Y или Z есть область на плоскости, не пересекающей D , а второе — отрезок прямой, также не имеющей общих точек с D . В этом случае совокупная размерность носителя данных $Y \times Z$ и размерность носителя D искомой функции совпадают и обе равны трем, что устраняет упомянутую переопределенность. Ниже мы несколько ослабим требование к расположению указанной прямой относительно области D . Вопросы численного решения уравнения М.М. Лаврентьева (1.7) изучены значительно меньше, трудности при этом являются общими для всех многомерных обратных задач рассеяния. Суть их в том, что для реконструкции локальных неоднородностей малых размеров требуется использовать достаточно густые сетки, что в свою очередь приводит к результирующим линейным системам сверхвысокой размерности. Хранение и обработка этих систем требует применения распределенных вычислений и часто распределенного хранения данных.

В заключительной части данной работы представлены результаты численных экспериментов по решению уравнения М.М. Лаврентьева. Альтернативным подходам к численному решению рассматриваемой задачи посвящены, в частности, работы [7, 16]. Теоретические и численные аспекты обратных задач волнового зондирования в других постановках исследуются в [17–20].

2. Единственность решения уравнения М.М. Лаврентьева

Следующая теорема утверждает, что уравнение (1.7) с любой правой частью имеет не более одного решения, если Y есть интервал прямой, произвольным образом ориентированной относительно области D .

Теорема 2.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, L — произвольная прямая в \mathbb{R}^3 , Y — открытый интервал, принадлежащий неограниченной компоненте $L \setminus \bar{D}$, Z — открытое подмножество плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Тогда уравнение

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x-y||x-z|} = 0, \quad (y, z) \in Y \times Z,$$

имеет лишь тривиальное решение $\xi \in L_2(D)$.

Нетрудно видеть, что $L \setminus \bar{D}$ совпадает с L , либо содержит две неограниченные компоненты. Обозначим через

$$\mathcal{H}(D) = \{u \in C^2(\bar{D}) : \Delta u(x) = 0, x \in D\}$$

множество всех регулярных гармонических функций в D .

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Теорема 2.2. Линейные комбинации функций семейства

$$\left\{ \frac{u(x)}{|x-y|} : y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \right\}$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

Для доказательства достаточно убедиться, что соотношение

$$\int_D \frac{h(x)u(x) dx}{|x-y|} = 0 \quad \forall y \in Y, u \in \mathcal{H}(D), \quad (2.1)$$

с $h \in L_2(D)$ влечет $h(x) = 0$ почти всюду в D . Приступая к доказательству, заметим, что функция $H(y)$, определенная выражением в левой части равенства (2.1), гармонична по $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ и тем самым вещественно аналитична вне \bar{D} . Отсюда следует, что сужение H на $L \setminus \bar{D}$ также вещественно аналитично. Поэтому равенство $H(y) = 0$, $y \in Y$, продолжается по аналитичности на всю неограниченную компоненту прямой L , содержащую интервал Y . Выберем на прямой L произвольно точку и рассмотрим шар с центром в этой точке, содержащий \bar{D} внутри. Без ограничения общности можем считать, что выбранная точка совпадает с началом координат, а шар, содержащий \bar{D} , имеет радиус $1 - \varepsilon$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Таким образом, $|x| \leq 1 - \varepsilon$ для всех $x \in \bar{D}$. Пусть для определенности $L = \{(0, 0, y_3) : y_3 \in \mathbb{R}\}$ и $H(y) = 0$ для точек $y = (y_1, y_2, y_3)$, принадлежащих неограниченной компоненте $\{y \in L : y_3 \geq 0\} \setminus \bar{D}$. Указанная компонента содержит луч $\Lambda = \{(0, 0, y_3) : y_3 \geq 1 - \varepsilon\}$. Поэтому на основании (2.1) имеем

$$\int_D \frac{h(x)u(x) dx}{|x - y|} = 0 \quad \forall y \in \Lambda, u \in \mathcal{H}(D). \tag{2.2}$$

Переходим к доказательству теоремы 2.2 с учетом сделанного уточнения. Обозначим $x' = (x_1, x_2)$, $S_r = \{x' \in \mathbb{R}^2 : |x'| = r\}$. Нам потребуются также функции

$$Y_{0,1} = 1, \quad Y_{k,1}(\theta) = \cos k\theta, \quad Y_{k,2}(\theta) = \sin k\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{N},$$

образующие стандартный тригонометрический базис на отрезке $[0, 2\pi]$ или, эквивалентно, на окружности S_1 . Через J_k , $k = 0, 1, \dots$, обозначаются функции Бесселя.

Отметим следующий вспомогательный результат.

Лемма. Для $a > 0$ и b таких, что $a^2 + b^2 \leq 1 - \varepsilon$, имеет место равенство

$$\mathcal{I}(\mu; a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\sqrt{a^2 + (b - i - t)^2}} = -2\pi i e^{-\mu} e^{-i\mu b} I_0(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.3}$$

Интеграл сходится равномерно относительно a и b , удовлетворяющих указанному условию.

Доказательство. Для обоснования равномерной сходимости интеграла запишем вещественную и мнимую части подынтегрального выражения в (2.3) как сумму произведений $r_1(x, t) r_2(x, t)$, где $r_1(x, t) = \cos \mu t$ или $\sin \mu t$, $r_2(x, t)$ есть вещественная или мнимая часть функции $(a^2 + (b - i - t)^2)^{-1/2}$. Непосредственно устанавливаем, что функция $r_2(x, t)$ монотонно стремится к нулю по $|t| \geq t_0$ равномерно относительно a и b , удовлетворяющих условию леммы. Поэтому равномерная сходимость интеграла \mathcal{I} следует из [21, с. 674, теорема 3].

Замена переменных $\tau = t - b$ приводит интересующий нас интеграл к виду

$$\mathcal{I}(\mu; a, b) = e^{-i\mu b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\sqrt{a^2 + (i + \tau)^2}}. \tag{2.4}$$

Выберем $0 < \rho < \min\{a, 1 - a\}$ и рассмотрим на плоскости ζ положительно ориентированный контур

$$\Gamma_{R\rho} = [0, R] \cup \gamma_R^+ \cup \{i + \tau : \tau \in [-R, R]\} \cup \gamma_R^- \cup [-R, 0] \cup L_\rho^+ \cup S_\rho(ia) \cup L_\rho^-, \tag{2.5}$$

где $\gamma_R^\pm = \{\pm R + iw : w \in [0, 1]\}$, $S_\rho(ia) = \{ia + \rho e^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi/2, 3\pi/2)\}$, L_ρ^+ и L_ρ^- — отрезки $\{iw : w \in [0, a - \rho]\}$, проходимые в направлении возрастания или убывания переменной w вдоль левого или правого берега разреза $[-ia, ia]$ соответственно. Контур (2.5) обходит разрез плоскости \mathbb{C} , выполненный вдоль отрезка $[-ia, ia]$. Вне этого разреза функция $\sqrt{a^2 + \zeta^2}$ допускает выделение однозначной аналитической ветви. Указанная ветвь определяется равенством $\sqrt{a^2 + \zeta^2} = \sqrt{\zeta + ia} \sqrt{\zeta - ia}$, $\zeta = ia + \rho e^{i\phi}$, $\phi \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, с выбором для корней главных значений, определяемых условием $\sqrt{1} = 1$. Тем самым

$$F(\zeta) = \frac{e^{-i\mu\zeta}}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \quad (2.6)$$

также является однозначной аналитической функцией вне $[-ia, ia]$ и, в частности, в области, ограниченной контуром $\Gamma_{R\rho}$. Следовательно,

$$\int_{\Gamma_{R\rho}} F(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что интегралы от функции (2.6) по отрезкам γ_R^\pm и по окружности $S_\rho(ia)$ имеют порядки $O(R^{-1})$ и $O(\sqrt{\rho})$ и стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$ соответственно. Поэтому из (2.7) следует, что при $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$ имеет место

$$\int_{-R}^0 \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} + \int_0^R + \int_{L_\rho^+} + \int_{L_\rho^-} + \int_R^{-R} \frac{e^{-i\mu(i+\tau)} d\tau}{\sqrt{a^2 + (i+\tau)^2}} = O(R^{-1} + \sqrt{\rho}). \quad (2.8)$$

В первых четырех интегралах левой части (2.8) подынтегральные функции совпадают. Непосредственный анализ показывает, что на противоположных краях разреза $[-ia, ia]$ функция $\sqrt{a^2 + \zeta^2}$ принимает значения с противоположными знаками. Это же относится и к значениям $\sqrt{a^2 + \zeta^2}$ при вещественных $\zeta = v$ и $\zeta = -v$, $v \geq 0$. Поэтому замена переменной $v = -\tilde{v}$ дает

$$\begin{aligned} \int_{\{v+0i: v \in [-R, 0]\}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} &= \int_{-R}^0 \frac{e^{-i\mu v} dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = \int_R^0 \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{\sqrt{a^2 + (-\tilde{v})^2}} = \int_R^0 \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{-\sqrt{a^2 + \tilde{v}^2}} \\ &= - \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{\sqrt{a^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\{v+0i: v \in [-R, 0]\}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} + \int_{\{v+0i: v \in [0, R]\}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} &= - \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} + \int_0^R \frac{e^{-i\mu v} dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ &= -2i \int_0^R \frac{\sin(\mu v) dv}{\sqrt{a^2 + v^2}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подобным же образом с использованием замены $\zeta = iw$ находим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_\rho^+} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{a-\rho} \frac{e^{\mu w} i dw}{-\sqrt{a^2 - w^2}} = -i \int_0^a \frac{e^{\mu w} dw}{\sqrt{a^2 - w^2}}.$$

Здесь учтено, что на левой и правой сторонах разреза $[-ia, ia]$ значения функции $\sqrt{a^2 + \zeta^2}$ отличаются знаком. Далее,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_{\rho}^{-}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{a-\rho}^0 \frac{e^{\mu w} i dw}{\sqrt{a^2 - w^2}} = -i \int_0^a \frac{e^{\mu w} dw}{\sqrt{a^2 - w^2}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{L_{\rho}^{+}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} + \int_{L_{\rho}^{-}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) = -2i \int_0^a \frac{e^{\mu w} dw}{\sqrt{a^2 - w^2}} = -2i \int_0^1 \frac{e^{\mu at} dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \quad (2.10)$$

Объединяя равенства (2.8)–(2.10) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\sqrt{a^2 + (i + \tau)^2}} = -2ie^{-\mu} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin(\mu v) dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} + \int_0^1 \frac{e^{\mu at} dt}{\sqrt{1 - t^2}} \right). \quad (2.11)$$

Первый из двух интегралов в правой части (2.11) равен

$$2^{-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (I_0(\mu a) - \mathbf{L}_0(\mu a)) = \frac{\pi}{2} (I_0(\mu a) - \mathbf{L}_0(\mu a)),$$

а второй равен

$$\frac{\pi}{2} (I_0(-\mu a) - \mathbf{L}_0(-\mu a)).$$

Модифицированная функция Бесселя I_0 четная: $I_0(\mu a) = I_0(-\mu a)$. Модифицированная функция Струве \mathbf{L}_0 нечетная: $\mathbf{L}_0(-\mu a) = -\mathbf{L}_0(\mu a)$. Тем самым сумма интегралов в правой части (2.11) равна $\pi I_0(\mu a)$ [22, сс. 262, 376]. Поэтому с учетом (2.4) находим

$$\mathcal{I}(\mu; a, b) = -2\pi i e^{-\mu} e^{-i\mu b} I_0(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.2. Обозначим

$$g(v) = H((0, 0, v)) = \int_D \frac{h(x)u(x) dx}{\sqrt{|x'|^2 + (v - x_3)^2}}, \quad |v| > 1 - \varepsilon. \quad (2.12)$$

Ввиду вещественной аналитичности функции g при $v > 1 - \varepsilon$, она допускает однозначное аналитическое продолжение в окрестность луча $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = v + i0, v > 1 - \varepsilon\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{\zeta\}$. Это продолжение определим выбором ветви квадратного корня, для которой $\sqrt{1} = 1$. Функцию g далее можем с сохранением однозначности аналитически продолжить вдоль дуг $\zeta = ve^{it}$, $v > 1 - \varepsilon$, $t \in (0, \pi)$, в область

$$Q = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im } \zeta > 0\} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Однозначность такого продолжения определяется тем, что для точек ζ этих дуг при всех $x = (x', x_3) \in \bar{D}$ выполняется $|x'|^2 + (\zeta - x_3)^2 \neq 0$, $0 < \arg(|x'|^2 + (\zeta - x_3)^2) < 2\pi$.

По условию $g(v) = 0$ при $v > 1 - \varepsilon$. Пользуясь теоремой единственности для аналитических функций [23, с. 73], заключаем, что $g(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in Q$. Для дальнейших построений существенно, что прямая $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = i + t, t \in \mathbb{R}\}$ принадлежит Q , поэтому, согласно (2.12), имеем

$$g(i+t) = \int_D \frac{h(x)u(x) dx}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - i - t)^2}} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}(D). \quad (2.13)$$

При фиксированных $u \in \mathcal{H}$, $A > 0$ на основании (2.13) и теоремы Фубини запишем

$$\int_{-A}^A e^{-i\mu t} \left(\int_D \frac{h(x)u(x) dx}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - i - t)^2}} \right) dt = \int_D h(x)u(x) \left(\int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - i - t)^2}} \right) dx = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку множество $\{x \in D : x' = 0\}$ имеет в \mathbb{R}^3 меру нуль, можем считать, что в правом интеграле по $[-A, A]$ выполняется $|x'| > 0$. Заметим, что величины $a = |x'|$ и $b = x_3$ удовлетворяют условию леммы. Согласно лемме, функция

$$\eta_A(x, \mu) = \int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - i - t)^2}}$$

при $A \rightarrow +\infty$ сходится к $\mathcal{I}(\mu; |x'|, x_3)$ равномерно по $x \in D$. В частности, выполняется $\sup_{x \in D} |\eta_A(x, \mu)| < \infty$. Предельный переход в (2.14) при $A \rightarrow +\infty$ с использованием теоремы Лебега о мажорируемой сходимости дает

$$\int_D h(x)u(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - i - t)^2}} \right) dx = 0.$$

Поэтому из (2.3) следует равенство

$$\int_D h(x)u(x)e^{-i\mu x_3} I_0(\mu|x'|) dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.15)$$

Непосредственно проверяется, что для любого $\lambda' \in \mathbb{R}^2$ функция $u_{\lambda'} \in \mathcal{H}(D)$, где

$$u_{\lambda'}(x) = e^{-i(\lambda', x') + |\lambda'| x_3}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Полагая $u = u_{\lambda'}$ в (2.15), получаем

$$\int_D h(x) e^{-i(\lambda', x') + (|\lambda'| - i\mu) x_3} I_0(\mu|x'|) dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda' \in \mathbb{R}^2. \quad (2.16)$$

При каждом $\lambda' \in \mathbb{R}^2$ функция в левой части (2.16) аналитична по $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поэтому равенство (2.16) по аналитичности продолжается на все значения $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Полагая $\mu = p - |\lambda'|i$, $p \neq 0$, в (2.16), получаем

$$\int_D h(x', x_3) e^{-ipx_3} e^{-i(\lambda', x')} I_0((p - |\lambda'|i)|x'|) dx' dx_3 = 0 \quad \forall \lambda' \in \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.17)$$

Зафиксируем финитную на \mathbb{R}_+ функцию $\eta = \eta(s)$, $s \geq 0$, и функцию $Y_{k,l}$ тригонометрического базиса для некоторых $k \geq 0$ и $l \in \{1, 2\}$. Умножим обе части равенства (2.17) на $\eta(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)$, где $\theta = \theta(\lambda')$ определяется равенством $\lambda'/|\lambda'| = (\cos \theta, \sin \theta)$, и проинтегрируем результат по $\mathbb{R}^2 = \{\lambda'\}$, считая функцию h продолженной нулем вне D . Мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(x', x_3) e^{-ipx_3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', x')} I_0((p - |\lambda'|i)|x'|) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \right) dx' dx_3 = 0. \quad (2.18)$$

Согласно [24, теорема 3.10], получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', x')} I_0((p - |\lambda'|i)|x'|) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \\ = 2\pi(-i)^k Y_{k,l}(\varphi) \int_0^{\infty} J_k(r\rho) I_0((p - ir)\rho) \eta(r) dr, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\varphi = \varphi(x')$, $x'/|x'| = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\rho = |x'|$. Выбирая в (2.18) в качестве η элемент последовательности финитных функций $\{\eta_n(s)\}$, сходящейся к $\delta(s - t)$, $t > 0$, и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из (2.18), (2.19) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{S_1} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi \right) e^{-ipx_3} dx_3 \right) \times \\ J_k(t\rho) I_0((p - it)\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $x'(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $\rho = |x'|$. При выводе (2.20) использовалась формула

$$\int_{\mathbb{R}^2} U(x') dx' = \int_0^{\infty} \rho \left(\int_{S_1} U(x'(\rho, \varphi)) d\varphi \right) d\rho,$$

в которой U — произвольная интегрируемая на \mathbb{R}^2 функция.

Обозначим

$$\begin{aligned} G_{k,l}(\rho, x_3) &= \int_{S_1} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi, \\ f_{p,k,l}(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) e^{-ipx_3} dx_3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.20) следует равенство

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) I_0((p - it)\rho) f_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.22)$$

Дословно повторяя соответствующую часть доказательства из [13, теорема 2.1], видим, что следствием (2.22) является равенство

$$G_{k,l}(\rho, x_3) = \int_{S_1} h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0$$

для всех $k = 0, 1, \dots, l = 1, 2$ и для почти всех $\rho > 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$. Поскольку система тригонометрических функций $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S_1)$, отсюда следует, что $h(x'(\rho, \varphi), x_3) = 0$ для почти всех $\rho > 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Поэтому $h(x) = 0$ для почти всех $x \in D$. Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 2.1. Поскольку множество $Z \subset \Pi$ является множеством единственности для гармонических функций в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, семейство гармонических функций

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \frac{1}{|x-z|} : z \in Z \right\}$$

плотно в $\mathcal{H}(D)$ [12]. Из теоремы 2.2 следует, что множество всевозможных произведений $\left\{ \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{|x-z|} : y \in Y, z \in Z \right\}$ полно в $L_2(D)$. Поэтому интегральное уравнение из теоремы 2.1 имеет лишь тривиальное решение. Теорема 2.1 доказана. \square

Следствием теоремы 2.1 является единственность решения обратной задачи волнового зондирования с указанными в теореме множествами источников и детекторов. Это решение однозначно определяется линейным интегральным уравнением (1.7). В следующем пункте обратимся к результатам численных экспериментов по решению уравнения (1.7).

3. Численная реализация

Во всех экспериментах этого пункта областью зондирования является куб $D = [-a, a]^3$ с полуредом $a = 0.5$. Точки дискретизации расположены равномерно по N на каждом ребре с включением двух концевых точек. Множеством источников Y является отрезок, параллельный оси Ox_1 . Количество точек сетки на отрезке Y обозначаем через $n_Y^{x_1}$. Множеством детекторов Z является прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат Ox_1, Ox_2 . Количество точек сетки на Z вдоль этих осей обозначаем через $n_Z^{x_1}$ и $n_Z^{x_2}$ соответственно. На D, Y, Z вводим равномерные сетки $\{x_{ijk}\}$ ($0 \leq i, j, k \leq N-1$), $\{y_p\}$ ($0 \leq p \leq n_Y^{x_1} - 1$), $\{z_{qr}\}$ ($0 \leq q \leq n_Z^{x_1} - 1, 0 \leq r \leq n_Z^{x_2} - 1$). Через $h_Y^{x_1}, h_Z^{x_1}, h_Z^{x_2}$ обозначаем шаги сеток на Y и Z по соответствующим координатам и полагаем $h_{YZ} = (h_Y^{x_1} h_Z^{x_1} h_Z^{x_2})^{1/3}$.

Дискретизация интегрального уравнения (1.7) с использованием схемы прямоугольников приводит к линейной системе

$$h^3 \sum_{i,j,k=0}^{N-1} a_{pqr,ijk} \xi_{ijk} = f_{pqr} \equiv f(y_p, z_{qr}), \quad 0 \leq p \leq n_Y^{x_1} - 1, \quad 0 \leq q \leq n_Z^{x_1} - 1, \quad 0 \leq r \leq n_Z^{x_2} - 1. \quad (3.1)$$

Здесь ξ_{ijk} есть искомая аппроксимация для $\xi(x_{ijk})$, $0 \leq i, j, k \leq N-1$, и

$$a_{pqr,ijk} = \frac{1}{|x_{ijk} - y_p| |x_{ijk} - z_{qr}|},$$

где $h = 2a/(N-1)$. Считаем, что $d = n_Y^{x_1} n_Z^{x_1} n_Z^{x_2} \geq N^3$, величина d близка к N^3 . Регуляризация уравнения (3.1) по схеме Тихонова приводит к линейной системе

$$(A^* A + \alpha \mathcal{E}) \xi_\alpha = A^* f + \alpha \xi^0. \quad (3.2)$$

Здесь $f = (f_{pqr}) \in \mathbb{R}^d$, ξ^0 — начальная оценка искомого вектора $(\xi_{ijk}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, \mathcal{E} есть единичная матрица размера $N^3 \times N^3$.

Матрица $A = (a_{pqr,ijk})$ в (3.2) имеет размер $d \times N^3$, затрудняющий применение прямых методов типа Гаусса уже при относительно небольших значениях $n_Y^{x_1}, n_Z^{x_1}, n_Z^{x_2}, N$. Будем использовать метод сопряженных градиентов [25, с. 206], который в применении к системе $B\xi = b$ с $d \times d$ -матрицей $B = B^* \geq O$ имеет вид: $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$, $s^1 = r^0 = B\xi^0 - b$,

$$\begin{aligned}
r^i &= r^{i-1} + a^i B s^i, & s^{i+1} &= r^i + c^i s^i, & \xi^i &= \xi^{i-1} + a^i s^i, & i &= 1, 2, \dots, \\
a^i &= -\frac{\|r^{i-1}\|^2}{(B s^i, r^{i-1})}, & c^i &= \frac{\|r^i\|^2}{\|r^{i-1}\|^2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В рассматриваемом случае $B = A^* A + \alpha E$.

В проведенных расчетах модельное точное решение имеет вид $\xi(x) = \nu(x)\eta(x)$, где срезывающая функция $\nu(x)$ обращается в нуль на границе куба D , а функция $\eta(x)$ описывает две содержащиеся в D неоднородности разных размеров:

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= A^{(1)} \exp\left(-k^{(1)} \left((x_1 - x_1^{(c1)})^2 + (x_2 - x_2^{(c1)})^2 + (x_3 - x_3^{(c1)})^2 \right)\right) + \\
&A^{(2)} \exp\left(-k^{(2)} \left((x_1 - x_1^{(c2)})^2 + (x_2 - x_2^{(c2)})^2 + (x_3 - x_3^{(c2)})^2 \right)\right), \\
A^{(i)} &> 0, \quad k^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

В качестве срезывающей используется функция

$$\nu(x) = \left(\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_3^2}{a^2}\right) \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{a^2}\right) \right)^3$$

при $a = 0.5$.

Для вычислений по методу сопряженных градиентов (3.3) на густых сетках при $N \geq 50$ ресурсы одного, пусть даже мощного ПК, оказываются недостаточными, если требовать разумной длительности вычислений. Поэтому применяется распараллеливание вычислений на множество устройств и распределенное использование памяти. Вычисления при $N = 52$ выполнялись на 9 многоядерных серверах кластера Марийского государственного университета MarGrid (<http://hpc.marsu.ru>), на которых было задействовано 144 вычислительных потока. Использовалась специально написанная параллельная реализация на языке C++ операций с матрицами и векторами. Поскольку не только линейки вычислений, но и данные для хранения в оперативной памяти (блоки матриц и векторов) необходимо было распределить между потоками, при распараллеливании использовался интерфейс обмена сообщениями MPI.

4. Результаты вычислений

При вычислениях использовалась сетка с $N = 52$ точками на стороне куба D . В представленной ниже серии экспериментов число точек дискретизации на областях источников и детекторов $n_Y^{x_1} = 193$, $n_Z^{x_1} = n_Z^{x_2} = 27$. В правую часть уравнения (3.1) вносится равномерно распределенное случайное возмущение, так что вместо точной правой части $f = (f_{pqr})$ используется ее приближение $\tilde{f} = (\tilde{f}_{pqr})$, где

$$\left| \tilde{f}_{pqr} - f_{pqr} \right| \leq \delta \max_{p,q,r} |f_{pqr}|, \quad 0 \leq p \leq n_Y^{x_1} - 1, \quad 0 \leq q \leq n_Z^{x_1} - 1, \quad 0 \leq r \leq n_Z^{x_2} - 1.$$

Величина относительной погрешности $\delta = 10^{-3}$. Множество источников $Y = [-1.0, 1.0] \times \{0.0\} \times \{-0.51\}$, множество детекторов $Z = [-1.0, 1.0] \times [-1.0, 1.0] \times \{0.51\}$. Параметр регуляризации $\alpha = 10^{-15}$. Во всех тестовых вычислениях полагаем $\xi^0 = 0$.

Для оценки качества приближений (ξ_{ijk}^n) , получаемых на n -й итерации процесса (3.3), вычислялась погрешность аппроксимации точного решения

$$\Sigma_1 = \left(h^3 \sum_{i,j,k=0}^{N-1} |\xi_{ijk}^n - \xi(x_{ijk})|^2 \right)^{1/2}$$

и невязка Σ_2 регуляризованного уравнения (3.2):

$$\Sigma_2 = \left(h^3 \sum_{i,j,k=0}^{N-1} \left| h_{YZ}^3 \sum_{p,q,r=0}^{n_Y^x-1, n_Z^x-1, n_Z^x-1} a_{pqr,ijk} \left(h^3 \sum_{i_1,j_1,k_1=0}^{N-1} a_{pqr,i_1j_1k_1} \xi_{i_1j_1k_1}^n - \tilde{f}_{pqr} \right) + \alpha \xi_{ijk}^n \right|^2 \right)^{1/2}.$$

В тестовых расчетах 1–4 меняются относительные размеры неоднородностей, локализованных в окрестностях точек $(-0.11, 0.21, 0.31)$ и $(0.16, -0.21, 0.26)$.

Тест 1. Точное решение

$$\xi(x) = \nu(x) \left(6.0 \exp(-80.0((x_1 - (-0.11))^2 + (x_2 - 0.21)^2 + (x_3 - 0.31)^2)) + 6.0 \exp(-80.0((x_1 - 0.16)^2 + (x_2 - (-0.21))^2 + (x_3 - 0.26)^2)) \right).$$

В результате проведения 2221 итераций погрешность Σ_1 уменьшилась с 0.3182 до 0.1119, невязка Σ_2 уменьшилась с 3.0136 до $9.26 \cdot 10^{-7}$. На рисунках 1–3 приведены изображения сечений точного и приближенного решений для $x_3 = 0.127, 0.167, 0.206, 0.245, 0.284, 0.324, 0.363$.

Тест 2. Точное решение

$$\xi(x) = \nu(x) \left(2.0 \exp(-80.0((x_1 - (-0.11))^2 + (x_2 - 0.21)^2 + (x_3 - 0.31)^2)) + 6.0 \exp(-80.0((x_1 - 0.16)^2 + (x_2 - (-0.21))^2 + (x_3 - 0.26)^2)) \right).$$

В результате проведения 2705 итераций погрешность Σ_1 уменьшилась с 0.2497 до 0.0894, невязка Σ_2 уменьшилась с 2.0923 до $2.63 \cdot 10^{-7}$. На рис. 4 приведены изображения сечений точного и приближенного решений для $x_3 = 0.245$.

Тест 3. Точное решение

$$\xi(x) = \nu(x) \left(6.0 \exp(-40.0((x_1 - (-0.11))^2 + (x_2 - 0.21)^2 + (x_3 - 0.31)^2)) + 6.0 \exp(-40.0((x_1 - 0.16)^2 + (x_2 - (-0.21))^2 + (x_3 - 0.26)^2)) \right).$$

В результате проведения 1415 итераций погрешность Σ_1 уменьшилась с 0.5127 до 0.1344, невязка Σ_2 уменьшилась с 7.4797 до $1.19 \cdot 10^{-6}$. На рис. 5 приведены изображения сечений точного и приближенного решений для $x_3 = 0.245$.

Тест 4. Точное решение

$$\xi(x) = \nu(x) \left(2.0 \exp(-40.0((x_1 - (-0.11))^2 + (x_2 - 0.21)^2 + (x_3 - 0.31)^2)) + 6.0 \exp(-40.0((x_1 - 0.16)^2 + (x_2 - (-0.21))^2 + (x_3 - 0.26)^2)) \right).$$

В результате проведения 1663 итераций погрешность Σ_1 уменьшилась с 0.3990 до 0.1044, невязка Σ_2 уменьшилась с 5.1491 до $8.12 \cdot 10^{-7}$. На рис. 6 приведены изображения сечений точного и приближенного решений для $x_3 = 0.245$.

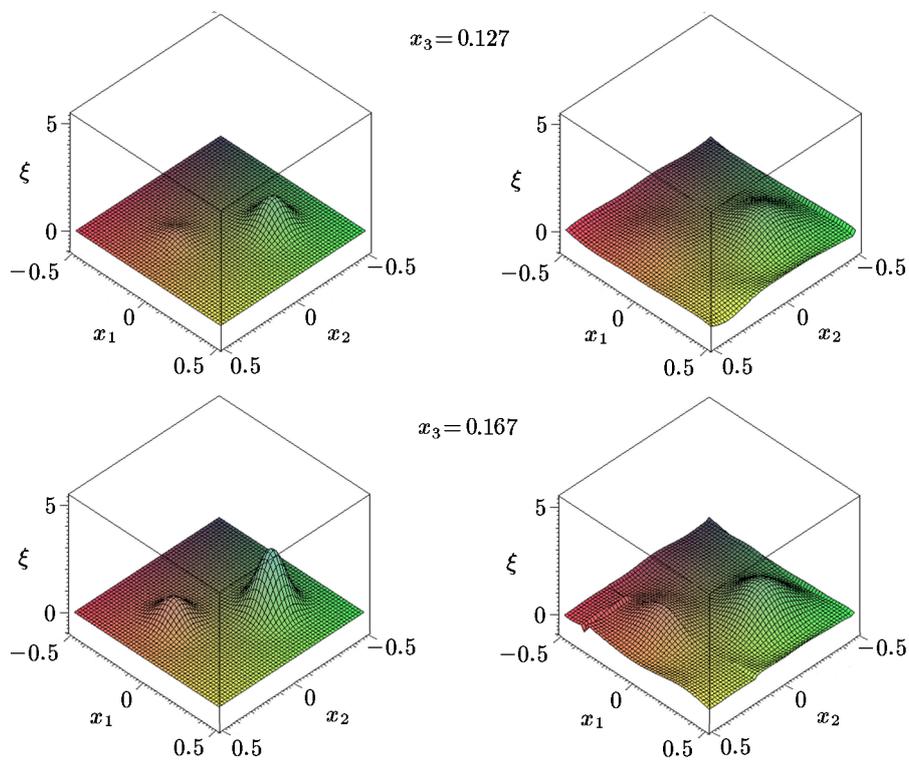


Рис. 1. Тест 1: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.127, 0.167$

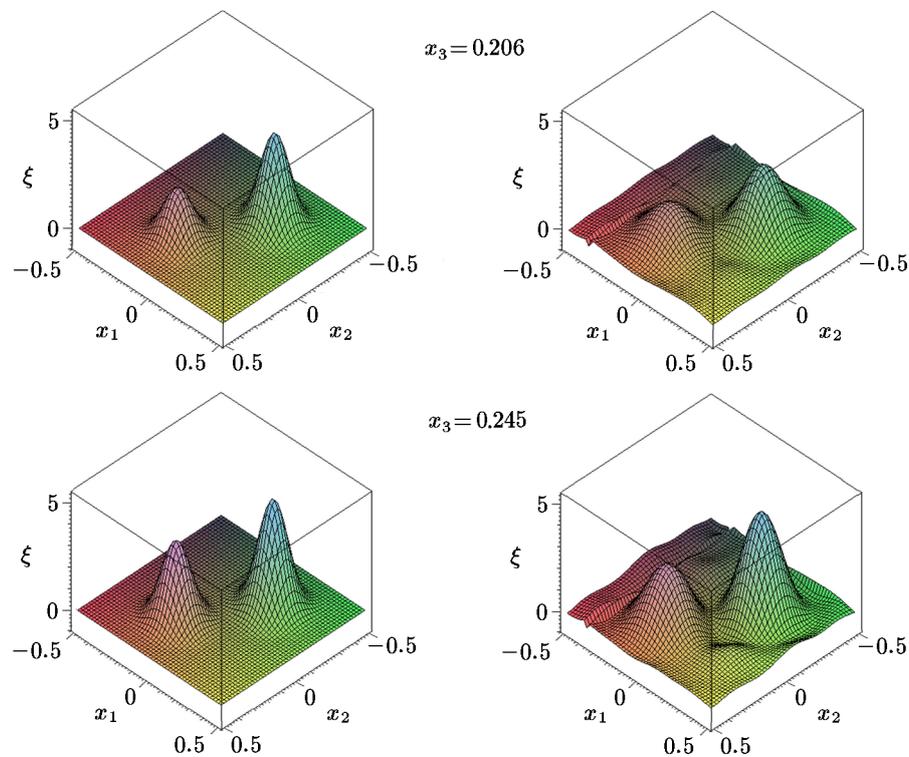


Рис. 2. Тест 1: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.206, 0.245$

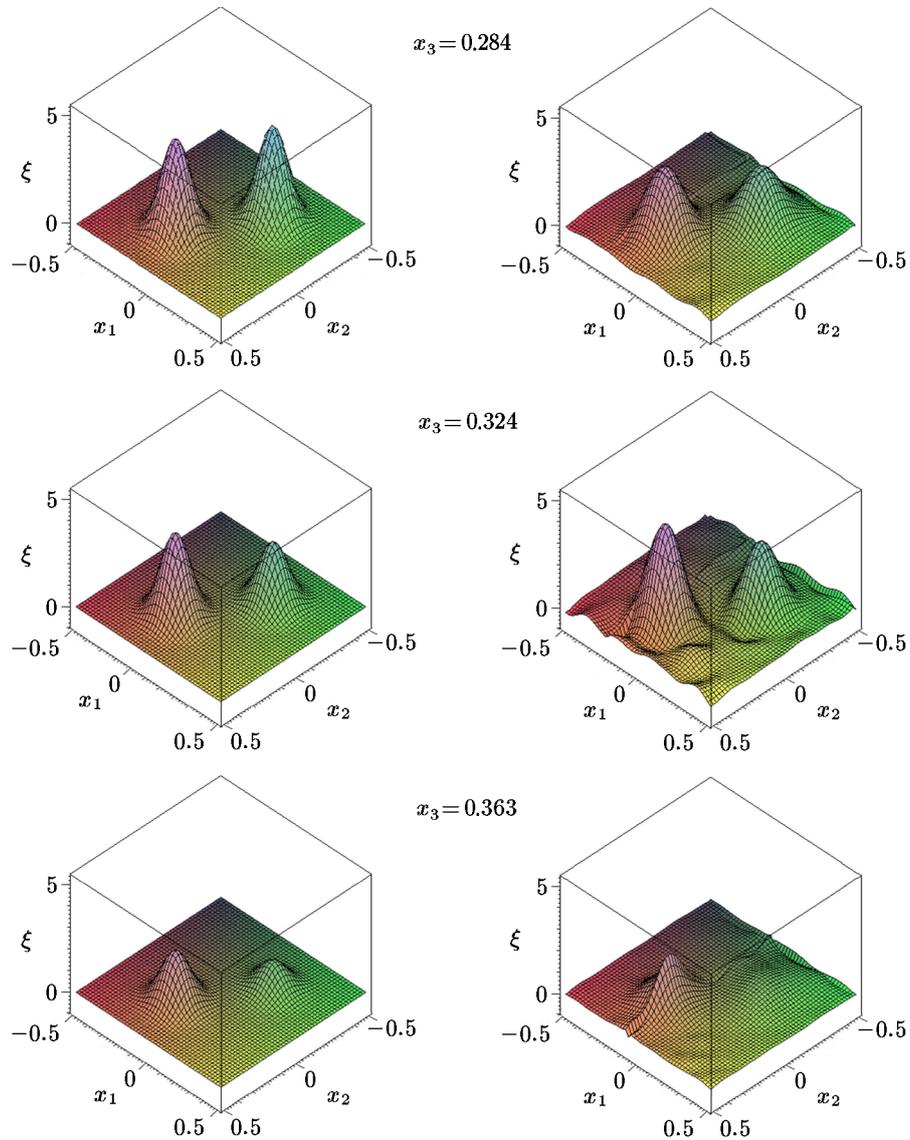


Рис. 3. Тест 1: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.284, 0.324, 0.363$

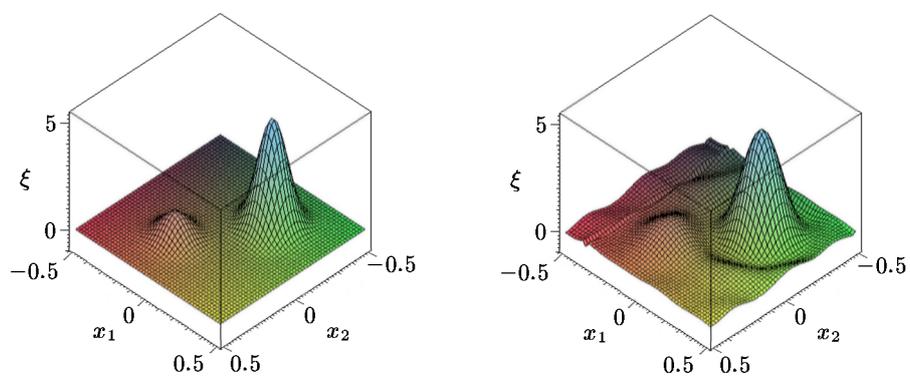


Рис. 4. Тест 2: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.245$

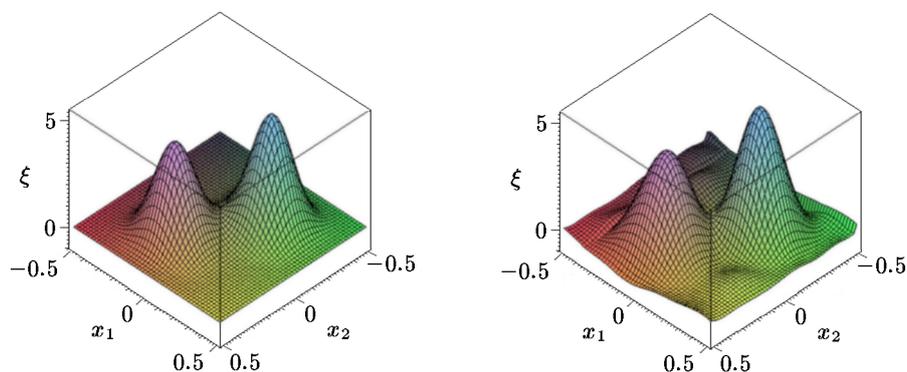


Рис. 5. Тест 3: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.245$

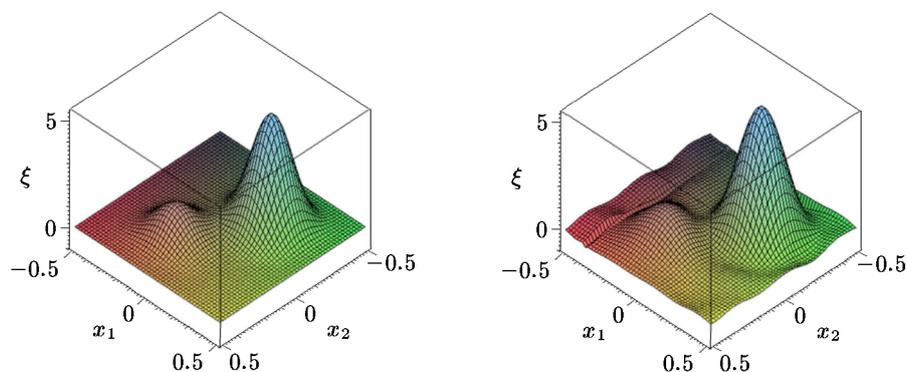


Рис. 6. Тест 4: сечения точного (слева) и приближенного (справа) решения при $x_3 = 0.245$

Как показывают проведенные вычисления, принятый уровень относительной погрешности $\delta = 10^{-3}$ позволяет достаточно точно реконструировать неоднородности умеренных размеров. Указанное значение погрешности устанавливает требуемую точность измерения данных рассеяния, по которым формируется правая часть уравнения (1.7). Полученные результаты соответствуют итогам наших предварительных численных экспериментов с уравнением М.М. Лаврентьева на крупноразмерных сетках с $N = 30$, представленным в [6].

Благодарности. Авторы выражают благодарность В.И. Безродному за помощь в проведении расчетов.

Литература

1. **Лаврентьев М.М.** Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 3. — С. 520–521.
2. **Лаврентьев М.М.** Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 160, № 1. — С. 32–35.
3. **Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.** Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2003. — Т. 47, № 3. — С. 1201–1209.

4. **Вайнберг Б.Р.** Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
5. **Романов В.Г.** О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журнал. — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 883–889.
6. **Козлов А.И., Кокурин М.Ю.** Об интегральных уравнениях типа М.М. Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 9. — С. 1492–1507.
7. **Klibanov M., Li J., Zhang W.** Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. — 2021. — Vol. 81, № 5. — P. 1954–1978.
8. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
9. **Рамм А.Г.** Многомерные обратные задачи рассеяния. — М.: Мир, 1994.
10. **Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцеров Е.В.** Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. мат. журнал. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 747–757.
11. **Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.** Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 1. — С. 117–128.
12. **Kokurin M.Yu.** On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. — 2013. — Vol. 21, № 1. — P. 125–140.
13. **Кокурин М.Ю.** О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Мат. заметки. — 2018. — Т. 104, № 5. — С. 708–716.
14. **Кокурин М.Ю.** О полноте произведений решений уравнения Гельмгольца // Изв. вузов. Математика. — 2020. — № 6. — С. 30–35.
15. **Кокурин М.Ю.** Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифф. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 255–264.
16. **Бакушинский А.Б., Леонов А.С.** Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2018. — Т. 58, № 4. — С. 561–574.
17. **Klibanov M.V., Romanov V.G.** Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. — 2016. — Vol. 76, № 1. — P. 178–196.
18. **Романов В.Г.** Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журнал. — 2017. — Т. 58, № 4. — С. 916–924.
19. **Романов В.Г.** Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журнал. — 2018. — Т. 59, № 3. — С. 626–638.
20. **Дедок В.А., Карчевский А.Л., Романов В.Г.** Численный метод определения диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности электромагнитного поля // Сиб. журн. индустр. математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 48–58.
21. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. Том 2. — М.: Дрофа, 2004.
22. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: ГИФМЛ, 1961.

23. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
24. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
25. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.

*Поступила в редакцию 30 ноября 2021 г.
После исправления 31 января 2022 г.
Принята к печати 18 июля 2022 г.*

Литература в транслитерации

1. **Lavrent'ev M.M.** Ob odnoi obratnoi zadache dlya volnovoogo uravneniya // Dokl. AN SSSR. — 1964. — Т. 157, № 3. — S. 520–521.
2. **Lavrent'ev M.M.** Ob odnom klasse obratnykh zadach dlya differentsial'nykh uravnenii // Dokl. AN SSSR. — 1965. — Т. 160, № 1. — S. 32–35.
3. **Bakushinskii A.B., Kozlov A.I., Kokurin M.Yu.** Ob odnoi obratnoi zadache dlya trekhmernogo volnovoogo uravneniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2003. — Т. 47, № 3. — S. 1201–1209.
4. **Vainberg B.R.** Asimptoticheskie metody v uravneniyah matematicheskoi fiziki. — М.: Izd-vo MGU, 1982.
5. **Romanov V.G.** O gladkosti fundamental'nogo resheniya dlya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka // Sib. mat. zhurnal. — 2009. — Т. 50, № 4. — S. 883–889.
6. **Kozlov A.I., Kokurin M.Yu.** Ob integral'nykh uravneniyah tipa M.M. Lavrent'eva v koeffitsientnykh obratnykh zadachah dlya volnovykh uravnenii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — Т. 61, № 9. — S. 1492–1507.
7. **Klibanov M., Li J., Zhang W.** Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. — 2021. — Vol. 81, № 5. — P. 1954–1978.
8. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P.** Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. — М.: Nauka, 1980.
9. **Ramm A.G.** Mnogomernye obratnye zadachi rasseyaniya. — М.: Mir, 1994.
10. **Buhgeim A.L., Dyatlov G.V., Kardakov V.B., Tantserev E.V.** Edinstvennost' v odnoi obratnoi zadache dlya sistemy uravnenii uprugosti // Sib. mat. zhurnal. — 2004. — Т. 45, № 4. — S. 747–757.
11. **Kokurin M.Yu., Paimerov S.K.** Ob obratnoi koeffitsientnoi zadache dlya volnovoogo uravneniya v ogranichennoi oblasti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2008. — Т. 48, № 1. — S. 117–128.
12. **Kokurin M.Yu.** On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. — 2013. — Vol. 21, № 1. — P. 125–140.
13. **Kokurin M.Yu.** O polnote proizvedenii garmonicheskikh funktsii i edinstvennosti resheniya obratnoi zadachi akusticheskogo zondirovaniya // Mat. zametki. — 2018. — Т. 104, № 5. — S. 708–716.
14. **Kokurin M.Yu.** O polnote proizvedenii reshenii uravneniya Gel'mgol'tsa // Izv. vuzov. Matematika. — 2020. — № 6. — S. 30–35.
15. **Kokurin M.Yu.** Polnota asimmetrichnykh proizvedenii reshenii ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka i edinstvennost' resheniya obratnoi zadachi dlya volnovoogo uravneniya // Diff. uravneniya. — 2021. — Т. 57, № 2. — S. 255–264.

16. **Bakushinskii A.B., Leonov A.S.** Ekonomichnyi chislennyi metod resheniya koeffitsientnoi obratnoi zadachi dlya volnovoogo uravneniya v trekhmernom prostranstve // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2018. — Т. 58, № 4. — С. 561–574.
17. **Klibanov M.V., Romanov V.G.** Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. — 2016. — Vol. 76, № 1. — P. 178–196.
18. **Romanov V.G.** Zadacha ob opredelenii koeffitsienta dielektricheskoi pronitsaemosti po modulyu rasseyannogo elektromagnitnogo polya // Sib. mat. zhurnal. — 2017. — Т. 58, № 4. — С. 916–924.
19. **Romanov V.G.** Obratnye zadachi bez fazovoi informatsii, ispol'zuyuschie interferentsiyu voln // Sib. mat. zhurnal. — 2018. — Т. 59, № 3. — С. 626–638.
20. **Dedok V.A., Karchevskii A.L., Romanov V.G.** Chislennyi metod opredeleniya dielektricheskoi pronitsaemosti po modulyu vektora elektricheskoi napryazhennosti elektromagnitnogo polya // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 48–58.
21. **Kudryavtsev L.D.** Kurs matematicheskogo analiza. Tom 2. — М.: Drofa, 2004.
22. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie. — М.: GIFML, 1961.
23. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.** Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. — М.: Nauka, 1965.
24. **Stein I., Veis G.** Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh. — М.: Mir, 1974.
25. **Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.** Matritsy i vychisleniya. — М.: Nauka, 1984.