

УДК 533.6

**Турбулентное число Прандтля
в пограничном слое на пластине:
влияние молекулярного числа Прандтля,
вдува (отсоса) и продольного градиента давления***

В.Г. Лущик, М.С. Макарова

*Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова*

E-mail: april27_86@mail.ru

С использованием дифференциальной модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла, проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля, интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку и параметра ускорения (торможения) набегающего потока. В качестве газовых теплоносителей рассмотрены воздух и смеси гелия с ксеноном и с аргоном, а в качестве жидкостных — ртуть, вода и трансформаторное масло. Полученные результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными для турбулентного числа Прандтля и величинами, входящими в его определение.

Ключевые слова: турбулентное числа Прандтля, молекулярное число Прандтля, вдув (отсос) газа, ускорение (торможение) потока, дифференциальная модель турбулентности.

Введение

В обзоре [1] были проанализированы существовавшие ко времени его публикации экспериментальные данные по турбулентному числу Прандтля Pr_t для развитого течения в круглой трубе, плоском канале и для двумерного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами. Здесь же было исследовано влияние градиента давления, шероховатости, транспирации для воздуха и жидкостей (жидкий металл, вода, масло). Было показано, что в общем случае турбулентное число Прандтля является функцией молекулярного числа Прандтля Pr , числа Рейнольдса Re и расстояния от стенки y^+ : $Pr_t(y^+, Pr, Re)$.

Для газовых смесей водорода, гелия, аргона, ксенона с молекулярным числом Прандтля $0,18 < Pr < 0,7$ при числах Рейнольдса $3 \cdot 10^4 < Re < 1 \cdot 10^5$ в публикации [2] рассматривался ряд моделей для установления зависимости $Pr_t(y^+, Pr, Re)$. Анализ результатов расчетных исследований величины Pr_t показал, что они носят противоречивый характер, особенно в пристеночной области при $y^+ < 10$. Путем прямого численного

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 14-19-00499).

моделирования (DNS), проведенного для турбулентного течения в канале и трубе с непроницаемыми стенками, в работах [3–5] было установлено, что величина турбулентного числа Прандтля при низких числах Рейнольдса для $Pr \geq 0,2$ практически не зависит от значения молекулярного числа Прандтля.

Большой разброс значений Pr_t в экспериментах [6], по-видимому, объясняется невысокой точностью измерения входящих в выражение для турбулентного числа Прандтля (см. ниже) величин $\langle u'v' \rangle$ и $\langle v'T' \rangle$, а также большой погрешностью при дифференцировании измеренных профилей скорости $\partial u / \partial y$ и температуры $\partial T / \partial y$ в широком диапазоне расстояний от стенки до оси трубы.

В работе [7] был проведен анализ более двадцати измеренных профилей температуры в пристенных турбулентных течениях различных жидкостей (при $0,02 \leq Pr \leq 100$) при условии, что профили температуры имели достаточно широкий участок, хорошо описываемый логарифмической формулой. Определенные в этом исследовании по логарифмическому участку значения Pr_t практически не зависели от Pr и группировались около среднего значения $Pr_t = 0,85$.

1. Определение турбулентного числа Прандтля

Уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие существенно дозвуковое течение в пограничном слое на плоской пластине, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right], \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_t \right), \quad (3)$$

здесь x — направление вдоль пластины, y — координата, отсчитываемая по нормали к пластине, u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, p — давление, $\rho \tau = -\rho \langle u'v' \rangle$ — турбулентное трение, $\rho q_t = -\rho c_p \langle v'T' \rangle$ — турбулентный поток тепла, ρ — плотность, η — динамическая вязкость, c_p — изобарная теплоемкость, λ — теплопроводность. Для величин $\rho \tau$ и ρq_t обычно используются гипотезы вида

$$\rho \tau = -\rho \langle u'v' \rangle = \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\rho q_t = -\rho c_p \langle v'T' \rangle = \rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (5)$$

здесь ε_τ — коэффициент турбулентного переноса количества движения (турбулентная вязкость), ε_q — коэффициент турбулентного переноса тепла (турбулентная теплопроводность). Для определения величины турбулентной вязкости ε_τ в инженерной практике используется гипотеза пути смешения Прандтля $\varepsilon_\tau = l^2 |\partial u / \partial y|$. Для пути смешения l в литературе (см., например, работу [8]) предложено большое количество эмпирических констант и функций расстояния до стенки, подобранных для каждого конкретного эксперимента, расчет которого требуется провести.

Известны также дифференциальные модели турбулентности:

– однопараметрическая модель турбулентной вязкости [9], в которой уравнение переноса записано для величины ε_τ ;

– двухпараметрические $k - \varepsilon$ модели турбулентности (см. [10]), где уравнения переноса записаны для энергии и диссипации турбулентности, которые используются для определения величины ε_τ ;

– трехпараметрические модели турбулентности [11, 12], причем в [12] уравнения переноса записаны для энергии, квадрата частоты турбулентности и напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$, которое позволяет непосредственно определить входящее в уравнение движения (2) турбулентное трение $\rho\tau$ без привлечения каких-либо гипотез для определения величины ε_τ .

Для определения турбулентного потока тепла практически во всех методиках расчета используется связь между величинами ε_q и ε_τ через турбулентное число Прандтля

$$\text{Pr}_t = \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_q} = \frac{\langle u'v' \rangle \partial T / \partial u}{\langle v'T' \rangle \partial u / \partial y} = c_p \frac{\tau \partial T / \partial u}{q_t \partial u / \partial y}. \quad (6)$$

Тогда турбулентный поток тепла в уравнении энергии можно определить как

$$\rho q_t = -\rho c_p \langle v'T' \rangle = \rho c_p \frac{\varepsilon_\tau}{\text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (7)$$

2. Постановка задачи расчета

Для вычисления величин τ и q_t , входящих в определение турбулентного числа Прандтля (6), используется трехпараметрическая модель турбулентности [12], обобщенная на течение с теплообменом [13], в которой уравнения переноса записываются для энергии турбулентности $E = 0,5 \sum \langle u_i'^2 \rangle$, величины напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$ и параметра $\omega = E / L^2$ (L — поперечный интегральный масштаб турбулентности), а также записывается уравнение переноса для величины $q_t = -c_p \langle v'T' \rangle$ [14]:

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = -(c\rho\sqrt{EL} + c_1\eta) \frac{E}{L^2} + \rho\tau \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right),$$

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = -(3c\rho\sqrt{EL} + 9c_1\eta) \frac{\tau}{L^2} + c_2\rho E \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right),$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -(2c\rho\sqrt{EL} + 1,4c_1\eta f_\omega) \frac{\omega}{L^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \left[\frac{\tau}{E} - 2c_3 \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\rho u \frac{\partial q_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_t}{\partial y} = -[3c\rho\sqrt{EL} + 9c_1\eta f(\text{Pr})] \frac{q_t}{L^2} + c_4 c_p \rho E \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_q \frac{\partial q_t}{\partial y} \right), \quad (9)$$

$$D_\varphi = a_\varphi \sqrt{EL} + \alpha_\varphi \eta \quad (\varphi = E, \tau, \omega, q_t), \quad L = \sqrt{E/\omega},$$

$$f_\omega = 1 - \frac{1}{2c_1} \left(\frac{L}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right)^2, \quad f(\text{Pr}) = \frac{1+c_5}{2} \cdot \frac{\sqrt{\text{Pr}} + 1/\sqrt{\text{Pr}}}{1+c_5\sqrt{\text{Pr}}}.$$

Константы имеют следующие значения [12–14]: $c = 0,3$, $c_1 = 5\pi/4$, $c_2 = 0,2$, $c_3 = 0,04$, $c_4 = 0,23$, $c_5 = 0,25$, $a_E = a_\omega = 0,06$, $a_\tau = a_q = 3a_E$, $E = 0,18$, $\alpha_E = \alpha_\tau = 1$, $\alpha_\omega = 1,4$, $\alpha_q = f(\text{Pr})$.

Опишем граничные условия на стенке и на внешней границе пограничного слоя в зависимости от рассматриваемой задачи.

Граничные условия на стенке ($y = 0$):

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{либо} \quad \rho v = (\rho v)_w; \quad E = 0, \quad \partial E / \partial y = 0, \quad \tau = 0;$$

$$T = T_w \quad \text{либо} \quad -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = q_w, \quad (10)$$

здесь $(\rho v)_w$ — массовая скорость вдуваемого (отсасываемого) газа, T_w — температура стенки, q_w — тепловой поток в стенку. Граничное условие $\partial E / \partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_w(x)$, которая заранее неизвестна.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя ($y = \delta(x)$):

$$u = u_1, \quad T = T_1; \quad dP / dx = 0 \quad \text{либо} \quad dP / dx = f(x);$$

$$E = E_1(x), \quad \omega = \omega_1(x), \quad \tau = 0, \quad (11)$$

где u_1 , T_1 — величины скорости и температуры для течения в набегающем потоке, а функции $E_1(x)$ и $\omega_1(x)$ описывают вырождение турбулентности в этом течении. Величина $\delta(x)$ выбирается из условия гладкого сопряжения решения.

В начальном ($x = 0$) сечении профиль скорости $u(y)$ определялся из автомодельного решения Блазиуса, профиль температуры $T(y)$ принимался подобным профилю скорости, профили функций $E(y)$, $\tau(y)$, $\omega(y)$ задавались как в работе [13].

Начальный масштаб турбулентности L_0 принимался таким ($\text{Re}_L = L_0(\rho u / \eta)_1 = 0,2 \cdot 10^5$), чтобы интенсивность турбулентности набегающего потока $e = \sqrt{E} / u_1$, уменьшающаяся вследствие вырождения ее на расчетной длине, не очень отличалась от начальной величины $e_0 = \sqrt{E_0} / u_1 = 0,03$. При этом число Рейнольдса турбулентности $\text{Re}_t = \sqrt{E_0}(\rho u / \eta)_1$ составляло $0,6 \cdot 10^3$.

Параметрами задачи являются молекулярное число Прандтля $\text{Pr} = (\eta \cdot c_p / \lambda)_1$, интенсивность вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку $j_w^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_1$ и параметр ускорения (торможения) набегающего потока (безразмерный градиент давления)

$$K = -\frac{\eta_1}{\rho_1^2 u_1^3} \cdot \frac{dP}{dx} = -\frac{\eta_1}{\rho_1 u_1^2} \cdot \frac{du_1}{dx}.$$

3. Результаты расчетов

В настоящей работе проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля Pr_t от молекулярного числа Прандтля Pr , интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку j_w^0 и параметра ускорения (торможения) набегающего потока K .

В качестве газовых теплоносителей выбраны воздух ($\text{Pr} = 0,71$) и смеси гелия с ксеноном ($\text{Pr} = 0,21$) и гелия с аргоном ($\text{Pr} = 0,41$), а в качестве жидкостных теплоносителей — ртуть ($\text{Pr} = 0,025$), вода ($\text{Pr} = 5,9$) и трансформаторное масло ($\text{Pr} = 88$). Поскольку, как отмечалось выше, точность определения величины турбулентного числа Прандтля невелика, а для некоторых теплоносителей экспериментальные зависимости для Pr_t

вообще отсутствуют, верификацию полученных расчетных зависимостей для Pr_t не всегда удается провести. Поэтому для косвенного подтверждения полученных расчетных зависимостей для Pr_t проведено сравнение результатов расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными, входящими в определения величины Pr_t (6): профилями температуры, скорости, турбулентных потоков тепла и трения, а также коэффициентов трения и теплообмена (чисел Нуссельта или Стантона).

3.1. Зависимость турбулентного числа Прандтля от молекулярного

Расчеты проводились в следующей постановке. Рассматривалось обтекание пластины дозвуковым потоком газа с постоянной по длине скоростью u_1 (число Маха $M \ll 1$) при температуре T_1 . В качестве теплового граничного условия (10) задавался тепловой поток в стенку, постоянный на всей расчетной длине пластины $q_w = \text{const}$. Величина теплового потока принималась достаточно малой ($q_w^+ = q_w / (\rho u c_p T)_1 < 10^{-4}$), чтобы подогрев теплоносителя был невелик и теплофизические свойства его были близки к постоянным, что соответствовало условиям проведения экспериментов. Число Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ) в расчетах было достаточно большим ($Re_x = x(\rho u / \eta)_1 \approx 5 \cdot 10^6$, $Re_\theta = \theta(\rho u / \eta)_1 \approx 8 \cdot 10^3$), чтобы исключить влияние входных условий на характеристики течения и теплообмена.

На рис. 1 показано изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для перечисленных выше теплоносителей. Как видно, для воздуха (линия 4) величина Pr_t практически постоянна по всей толщине пограничного слоя и лежит в диапазоне значений $Pr_t = 0,85-0,9$, обычно используемых в расчетах теплообмена. В жидкостях (вода — линия 5, масло — линия 6) с ростом молекулярного числа Прандтля Pr величина Pr_t в области вязкого подслоя ($y^+ \leq 10$) возрастает. Для смесей газов с малыми значениями молекулярного числа Прандтля (гелий с ксеноном — линия 2 и с аргоном — линия 3) величина Pr_t также возрастает в вязком подслое, но в меньшей степени, чем

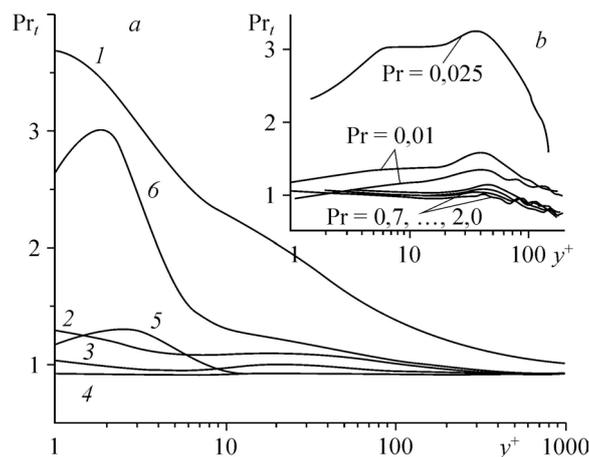


Рис. 1. Изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля $Pr_t(y^+)$.

- a* — расчет при $Re_x \approx 5 \cdot 10^6$ для шести теплоносителей: 1 — ртуть ($Pr = 0,025$),
 2 — смесь гелий-ксенон ($Pr = 0,21$), 3 — смесь гелий-аргон ($Pr = 0,41$),
 4 — воздух ($Pr = 0,71$), 5 — вода ($Pr = 5,9$), 6 — трансформаторное масло ($Pr = 88$);
b — расчет турбулентного числа Прандтля прямым численным моделированием [11].

в жидкостях. Для жидкого металла (ртуть — линия 1) с очень малым значением молекулярного числа Прандтля ($Pr = 0,025$) величина Pr_t существенно изменяется не только вблизи стенки, но и вдали от нее. Отметим, что, поскольку экспериментальные значения турбулентного числа Прандтля Pr_t для указанных теплоносителей, за исключением воздуха, воды и жидкого металла, практически отсутствуют, верификация полученных расчетных значений Pr_t проводилась путем сравнения величин, входящих в определение Pr_t (6), с имеющимися для них экспериментальными данными.

Расчетные профили скорости для теплоносителей с теплофизическими свойствами, близкими к постоянным, не зависят от молекулярного числа Прандтля Pr и соответствуют экспериментальным профилям скорости [15] для трех теплоносителей (воздух, вода и трансформаторное масло).

На рис. 2 для шести теплоносителей изображены профили температуры $T^+(y^+)$, где $T^+ = (T_w - T)/T_*$, а $T_* = q_w / \rho c_p u_*$ — температура трения, представленная по аналогии со скоростью трения u_* из работы [15]. Как видно из рис. 2, для воздуха, воды и трансформаторного масла расчетные зависимости $T^+(y^+)$ (линии) близки к экспериментальным [15] (символы). Для теплоносителей с малым числом Прандтля Pr (He-Ar, He-He, Hg) профили температуры лежат значительно ниже, чем профили теплоносителей с числом $Pr \geq 0,7$.

На рис. 3 представлено распределение в пограничном слое безразмерных величин турбулентного потока тепла $\bar{q}_t = \langle v'T' \rangle / u_1(T_w - T_1)$ и турбулентного трения $\bar{\tau} = \langle u'v' \rangle / u_1^2$. Турбулентное трение $\bar{\tau}$ (линия 7) не зависит от молекулярного числа Прандтля Pr , в то время как турбулентный поток тепла \bar{q}_t существенным образом зависит от Pr не только по величине, но и по характеру распределения по толщине пограничного слоя.

Таким образом, представленные на рис. 2, 3 распределения профилей температуры, турбулентного трения и потока тепла позволяют судить об эволюции турбулентного числа Прандтля, представленного на рис. 1, в зависимости от молекулярного числа Прандтля Pr .

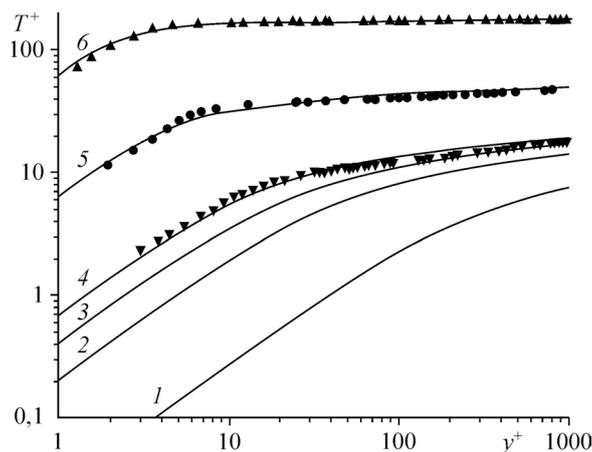


Рис. 2. Расчетные и экспериментальные профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое.

1–6 — расчет при $Re_x \approx 5 \cdot 10^6$ для шести теплоносителей (обозначения см. на рис. 1), символы 4–6 — эксперимент [15] для воздуха, воды и трансформаторного масла соответственно.

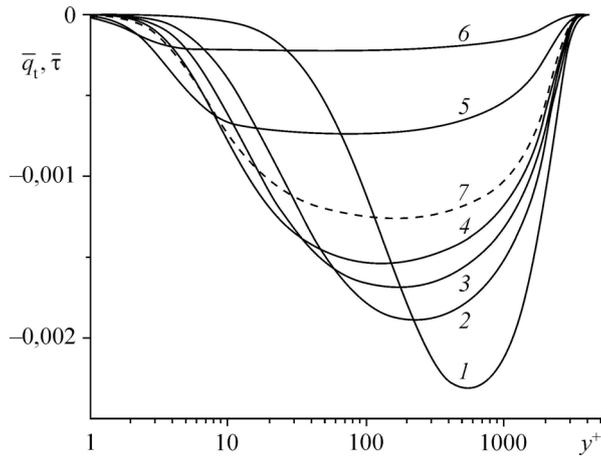


Рис. 3. Расчетное изменение турбулентного потока тепла $\bar{q}_t(y^+)$ в пограничном слое ($Re_x \approx 5 \cdot 10^6$) для шести теплоносителей.

Обозначения 1–6 см. на рис. 1, 7 — турбулентное трение $\bar{\tau}$ для тех же теплоносителей.

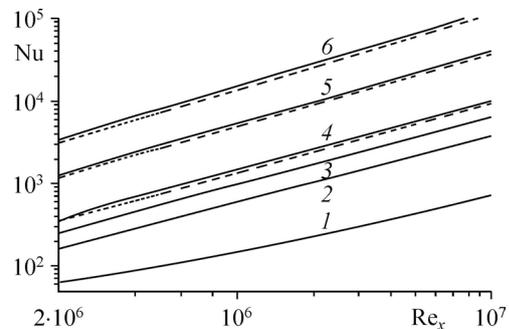
Расчет широко используемых на практике интегральных характеристик пограничного слоя — коэффициента трения $c_f = 2(\eta \partial u / \partial y)_w / (\rho u^2)_1$ и безразмерного коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта $Nu = xq_w / \lambda_1(T_w - T_1)$) — позволил установить следующее. Расчетная величина c_f , так же, как и профиль скорости, не зависит от молекулярного числа Прандтля Pr , и для ламинарного режима течения ($Re_x \leq 10^5$) близка к зависимости Блазиуса, а для турбулентного режима ($Re_x \geq 3 \cdot 10^5$) — к зависимости Кармана. Расчетные зависимости числа Нуссельта $Nu(Re_x)$ (рис. 4) для воздуха (линия 4), воды (линия 5) и масла (линия 6) близки к аппроксимационной зависимости Кадера и Яглома [16] (штриховые линии), охватывающей большой массив экспериментальных данных. При малых числах Прандтля числа Нуссельта существенно снижаются (линии 1, 2, 3).

Из результатов численного исследования турбулентного числа Прандтля можно отметить данные, приведенные в работе [11] (рис. 1b), полученные путем прямого численного моделирования (DNS). Эти результаты, несмотря на известные ограничения DNS — низкие числа Рейнольдса, — отражают полученную в настоящем исследовании существенную зависимость турбулентного числа Прандтля Pr_t от молекулярного числа Прандтля Pr . Это иллюстрирует также рис. 5, на котором приведено сравнение результатов расчета для зависимости $Pr_t^{-1}(Pr \cdot y^+)$ с известными экспериментальными данными [17] для жидких металлов и с аналитической зависимостью для $Pr \ll 1$, полученной в [18]:

$$Pr_t^{-1} = \frac{Pr \cdot y^+}{0,88 Pr \cdot y^+ + 2,83}. \quad (12)$$

Рис. 4. Расчетные зависимости числа Нуссельта $Nu(Re_x)$ в пограничном слое для шести теплоносителей.

Обозначение сплошных линий 1–6 см. на рис. 1, штриховые линии 4–6 — зависимости Кадера–Яглома [16] для воздуха, воды и трансформаторного масла соответственно.



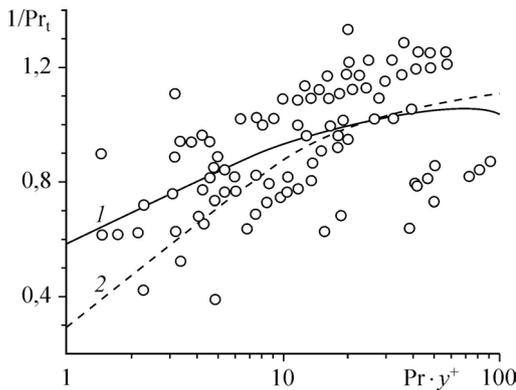


Рис. 5. Зависимость $Pr_t^{-1} (Pr \cdot y^+)$

для жидких металлов.

1 — расчет, 2 — аналитическая зависимость (12), полученная в работе [17];

символы — экспериментальные данные [18].

3.2. Изменение числа Pr_t в пограничном слое на проницаемой пластине

Расчеты проводились в постановке, аналогичной приведенной выше, за исключением того, что пластина была проницаемой, вдув или отсос газа через нее осуществлялся с постоянной интенсивностью $j_w^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_1 = \text{const}$ и начинался на длине, соответствующей условиям эксперимента. В качестве теплоносителя был принят воздух как и в экспериментальных работах [19, 20], с которыми проводилось сравнение результатов расчета.

На рис. 6 представлены результаты расчетов (линии) изменения числа Стантона $St = q_w / \rho_1 c_{p1} u_1 (T_w - T_1)$ по длине пластины в сравнении с экспериментальными данными [19] (символы) при одних и тех же значениях интенсивности вдува и отсоса. Видно, что согласование результатов расчета с экспериментом в широком диапазоне изменения интенсивности вдува (отсоса) j_w^0 вполне удовлетворительное, что свидетельствует об успешной верификации используемой модели турбулентности.

Профили скорости и температуры в пограничном слое при вдуве ($j_w^0 > 0$) и отсосе ($j_w^0 < 0$) газа представлены соответственно на рис. 7, 8. Расчетные профили скорости и температуры при $j_w^0 = \pm 0,002$ получены для значений числа Рейнольдса по толщине потери импульса Re_θ , близких к экспериментальным [20], и составляют $Re_\theta \approx 900$ для $j_w^0 = -0,002$ и $Re_\theta \approx 2300$ для $j_w^0 = 0,002$. При этом расчетные значения числа Стантона, коэффициента трения и формпараметра также близки к экспериментальным. Результаты

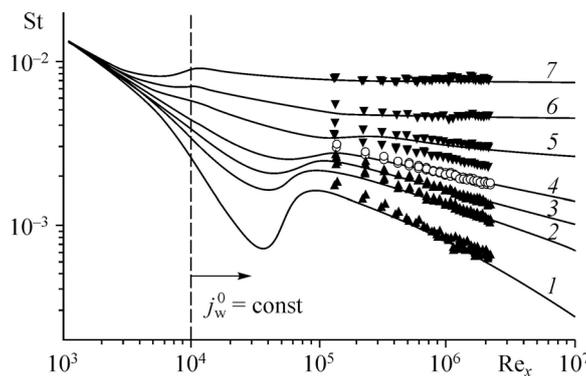


Рис. 6. Изменение числа Стантона по длине пластины $St(Re_x)$ для ряда значений интенсивности вдува и отсоса газа.

Вдув: $j_w^0 = 0,0038$ (1), 0,0019 (2), 0,001 (3), 0 (4), отсос: $j_w^0 = -0,0024$ (5), $-0,0046$ (6), $-0,0077$ (7);

линии — расчет, символы — эксперимент [19].

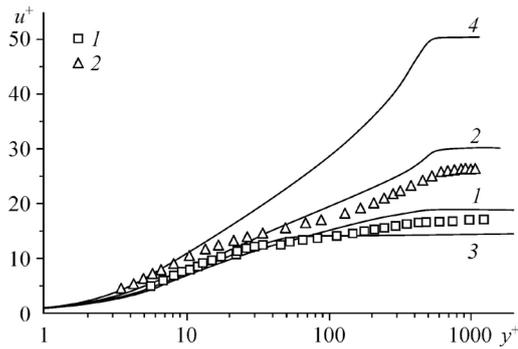


Рис. 7. Профили скорости $u^+(y^+)$ в пограничном слое при вдуве и отсосе газа.

$j_w^0 = -0,002$ (1), $0,002$ (2), $-0,005$ (3), $0,005$ (4);
линии — расчет, символы — эксперимент [20].

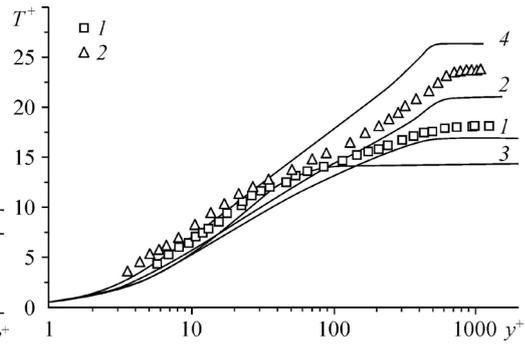


Рис. 8. Профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое при вдуве и отсосе газа.

Обозначения см. на рис. 7.

расчетов (линии) получены в более широком диапазоне изменения величины j_w^0 , чем в экспериментах [20]. Как видно из рис. 7, 8, вдув и отсос газа существенно влияют на профили скорости и температуры.

Полученное в расчетах изменение в пограничном слое на проницаемой пластине безразмерных величин турбулентного трения $\bar{\tau} = \langle u'v' \rangle / u_1^2$ и турбулентного потока тепла $\bar{q}_t = \langle v'T' \rangle / u_1(T_w - T_1)$ позволило установить следующее. Турбулентное трение $\bar{\tau}$ (рис. 9), не зависящее от молекулярного числа Прандтля Pr_t (см. рис. 3), при вдуве и отсосе, как и турбулентный поток тепла \bar{q}_t , существенным образом зависит от интенсивности вдува (отсоса) не только по величине, но и по характеру распределения по толщине пограничного слоя.

На рис. 10 показано расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для приведенного выше диапазона изменения величины j_w^0 . Как видно, лишь для интенсивного отсоса ($j_w^0 = -0,005$ — линия 1) величина Pr_t заметно отличается от единицы. Таким образом, в расчетах показано, что при слабом отсосе его влияние на число Pr_t для воздуха и газовых смесей является слабым. С увеличением интенсивности

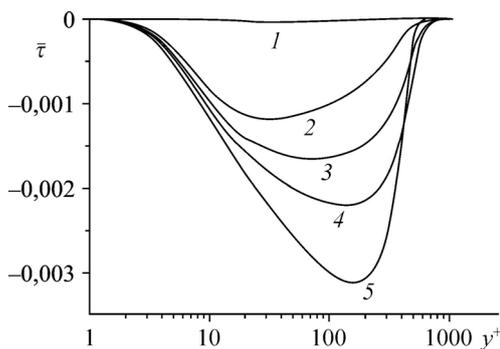


Рис. 9. Расчетное распределение в пограничном слое безразмерной величины турбулентного трения $\bar{\tau}$ при отсосе и вдуве газа.

$j_w^0 = -0,005$ (1), $-0,002$ (2), 0 (3), $0,002$ (4), $0,005$ (5).

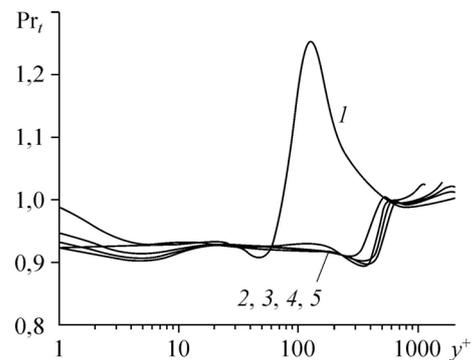


Рис. 10. Расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля $Pr_t(y^+)$ при отсосе и вдуве газа.

Обозначения см. на рис. 9.

отсоса число Pr_t в логарифмической области возрастает, и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной этого роста Pr_t является существенная деформация профилей скорости и температуры. Отметим, что полученное в работе [21] изменение величины Pr_t в трубе при сильном отсосе ($j_w^0 = -0,01$) также свидетельствует о существенном росте величины турбулентного числа Прандтля в пристенной области. Необходимо подчеркнуть, что характер изменения величины Pr_t в пограничном слое существенным образом зависит от величины числа Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ), величина Pr_t увеличивается с ростом числа Re_x . Так, при интенсивном отсосе ($j_w^0 = -0,005$) с изменением числа Re_x с $1 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ величина Pr_t возрастает примерно на 25 %.

3.3. Зависимость числа Pr_t от продольного градиента давления

В качестве параметра ускорения (торможения) набегающего потока использовался безразмерный градиент давления

$$K = -\frac{\eta_1}{\rho_1^2 u_1^3} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{\eta_1}{\rho_1 u_1^2} \cdot \frac{du_1}{dx},$$

который принимался постоянным на расчетной длине после перехода от ламинарного режима течения в пограничном слое с нулевым градиентом давления к турбулентному режиму течения. Остальные особенности постановки задачи аналогичны принятым выше. В качестве теплоносителя был принят воздух, как и в экспериментальных работах [15, 20, 22], с которыми проводилось сравнение результатов расчета.

На рис. 11, 12 представлены профили температуры и скорости в пограничном слое ускоряющегося ($K > 0$) и замедляющегося ($K < 0$) потоков. Расчетные профили скорости и температуры при соответствующих значениях параметра K получены для значений числа Рейнольдса $Re_\theta = 600-11000$, близких к представленным в работах [15, 20, 22]. Результаты расчетов (линии 1, 2, 3) для значений параметра $K = 0, 1,44 \cdot 10^{-6}$ и $-0,25 \cdot 10^{-6}$ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [15, 20, 22]. При этом

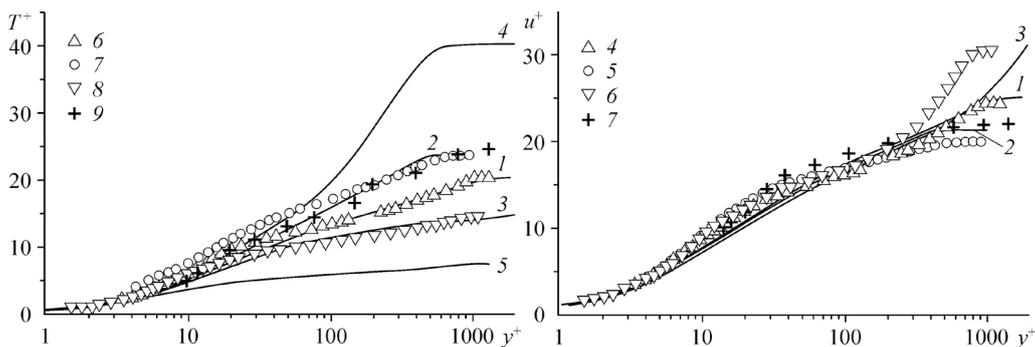


Рис. 11. Профили температуры $T^+(y^+)$ в пограничном слое для ряда значений параметра ускорения (торможения) потока. Расчет настоящей работы (линии): $K \cdot 10^6 = 0$ (1), 1,44 (2), $-0,25$ (3), 3 (4), -1 (5); символы 6–8, соответствующие расчетным значениям K , — данные экспериментов [20, 22]; символы 9 — $K = 1,6 \cdot 10^{-6}$ — данные эксперимента [15].

Рис. 12. Профили скорости $u^+(y^+)$ в пограничном слое для ряда значений параметра ускорения (торможения) потока. Расчет настоящей работы (линии): $K \cdot 10^6 = 0$ (1), 1,44 (2), $-0,25$ (3); символы 4–6, соответствующие расчетным значениям K , — данные экспериментов [20, 22]; символы 7 — $K = 1,6 \cdot 10^{-6}$ — данные эксперимента [15].

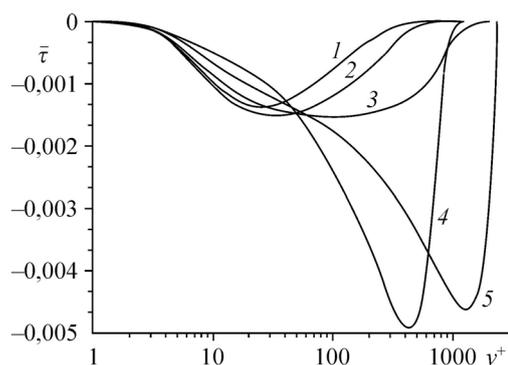


Рис. 13. Расчетное распределение в пограничном слое безразмерной величины турбулентного трения $\bar{\tau}$ для ряда значений параметра ускорения и торможения потока.

Ускорение: $K \cdot 10^6 = 3$ (1), 1,44 (2), 0 (3);
торможение: $K \cdot 10^6 = -1$ (4), -0,25 (5) ($Re_\rho = 600-11000$).

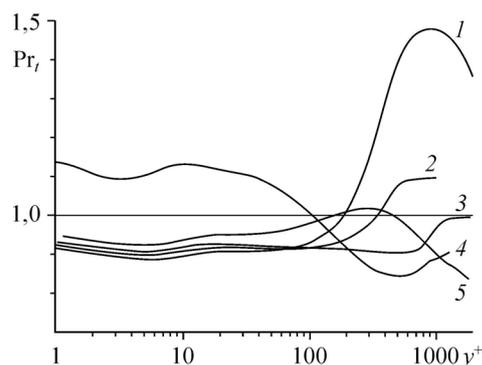


Рис. 14. Расчетные зависимости турбулентного числа Прандтля $Pr_t(y^+)$ в пограничном слое с ускорением и торможением потока для ряда значений параметра K .
Обозначения см. на рис. 13.

расчетные значения коэффициента трения и формпараметра также имеют значения, близкие к экспериментальным.

Полученное в расчетах изменение в пограничном слое с градиентом давления безразмерных величин турбулентного потока тепла $\bar{q}_t = \langle v'T' \rangle / u_1(T_w - T_1)$ и турбулентного трения $\bar{\tau} = \langle u'v' \rangle / u_1^2$ позволило установить следующее. Величина \bar{q}_t при изменении параметра градиента давления K не очень существенно изменяется относительно безградиентного течения ($K = 0$), в то время как при течении с сильным ускорением потока ($K \geq 0,5 \cdot 10^{-6}$) величина турбулентного трения $\bar{\tau}$ (рис. 13) в области логарифмического слоя существенно возрастает. Поскольку градиент давления в первую очередь влияет на динамические характеристики пограничного слоя — величину турбулентного трения $\bar{\tau}$, — это приводит к росту турбулентного числа Прандтля при сильном ускорении потока (рис. 14 — линия 1). Рост турбулентного числа Прандтля при сильном ускорении потока в области логарифмического слоя был также отмечен в экспериментах (см. работу [1]).

3.4. О необходимости учета переменности турбулентного числа Прандтля в пограничном слое

Приведенные выше результаты численного исследования получены при использовании уравнения для турбулентного потока тепла ρq_t (9), а для определения турбулентного числа Прандтля Pr_t использовано выражение (6). Представляется интересным исследовать, как влияет переменность Pr_t на характеристики теплообмена, например, на число Нуссельта. С этой целью для двух значений интенсивности вдува (отсоса) $j_w^0 = \pm 0,002$, двух значений параметра градиента давления $K = \pm 1 \cdot 10^{-6}$ и четырех значений молекулярного числа Прандтля Pr (для ртути, смеси гелий–ксенон, воздуха и воды) проведено сравнение значений чисел Нуссельта, определенных в расчетах с постоянной величиной турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0,85$ в выражении (7) для турбулентного потока тепла ρq_t в уравнении энергии (3) и с использованием непосредственно уравнения для турбулентного потока тепла (9), обеспечивающего переменность величины Pr_t . Сравнение двух чисел Нуссельта при одинаковых значениях величин Pr , j_w^0 и K проведено для одних и тех же значений чисел Рейнольдса $Re_x \geq 3 \cdot 10^5$ ($Re_\rho \geq 10^3$).

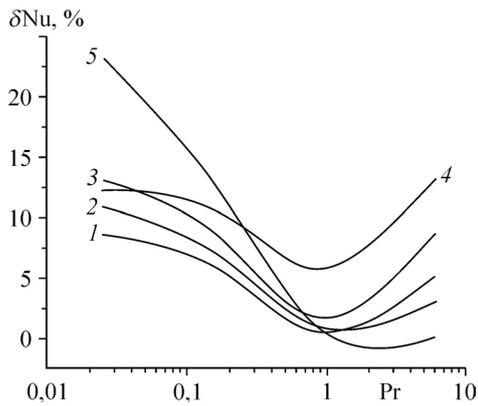


Рис. 15. Зависимость относительной разности чисел Нуссельта δ_{Nu} при постоянном и переменном значениях турбулентного числа Прандтля Pr_t от молекулярного числа Прандтля Pr для ряда комбинаций интенсивности вдува (отсоса) j_w^0 и градиента давления K .

$$j_w^0 / K \cdot 10^6 = 0/0 (1), 0,002/1 (2), -0,002/1 (3), -0,002/-1 (4), 0,002/-1 (5).$$

На рис. 15 представлена зависимость относительной разности чисел Нуссельта $\delta_{Nu} = (Nu_c - Nu_v) / Nu_v \cdot 100\%$, где Nu_c и

Nu_v — значения числа Нуссельта при постоянном и переменном значениях числа Pr_t соответственно. При анализе приведенных здесь результатов следует иметь в виду, что при течении с ускорением ($K > 0$) интенсивность вдува (отсоса) $j_w^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_1$ уменьшается по длине пластины из-за роста скорости набегающего потока u_1 и возрастает при течении с торможением ($K < 0$) из-за падения скорости u_1 . Как видно из рисунка, отличие числа Nu , определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0,85$, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла ρq_t , возрастает с уменьшением и увеличением молекулярного числа Прандтля Pr относительно значения $Pr = 0,71$ для воздуха. Вдув, отсос, положительный и отрицательный градиенты давления также увеличивают это отличие, которое для исследованного диапазона указанных параметров достигает 15%. Таким образом, если в экспериментах точность определения числа Nu выше, то предположение о постоянстве числа Pr_t нельзя считать оправданным.

Заключение

С использованием дифференциальной модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла, проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля Pr , интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку j_w^0 и параметра ускорения (торможения) набегающего потока K , которое позволило установить следующее.

1. Расчетное изменение в пограничном слое турбулентного числа Прандтля для ряда теплоносителей показало, что для воздуха ($Pr = 0,71$) величина Pr_t практически постоянна по всей толщине пограничного слоя и лежит в диапазоне значений $Pr_t = 0,85-0,9$, обычно используемых в расчетах теплообмена. В жидкостях (в воде ($Pr = 5,9$) и трансформаторном масле ($Pr = 88$)) с ростом молекулярного числа Прандтля Pr величина Pr_t в области вязкого подслоя ($y^+ \leq 10$) возрастает. Для смесей газов с малыми значениями молекулярного числа Прандтля (гелий с ксеноном ($Pr = 0,21$) и с аргоном ($Pr = 0,41$)) величина Pr_t также возрастает в вязком подслое, но в меньшей степени, чем в жидкостях. Для жидкого металла (ртуть) с очень малым значением молекулярного числа Прандтля ($Pr = 0,025$) величина Pr_t существенно изменяется не только вблизи стенки, но и вдали от нее.

2. Численное исследование изменения в пограничном слое турбулентного числа Прандтля проведено в диапазоне изменения величины интенсивности вдува (отсоса) $j_w^0 = -0,005 \div 0,005$. Показано, что при слабом отсосе влияние его на число Pr_t для воздуха и газовых смесей слабое. С увеличением интенсивности отсоса число Pr_t в логарифмической области возрастает, и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной этого роста Pr_t является существенная деформация профилей скорости и температуры. Показано, что лишь для интенсивного отсоса ($j_w^0 = -0,005$) турбулентное число Прандтля заметно отличается от величины $Pr_t \approx 1$. Отмечено, что характер изменения величины Pr_t в пограничном слое существенным образом зависит от величины числа Рейнольдса по длине пластины Re_x (по толщине потери импульса Re_θ).

3. Исследование влияния градиента давления на турбулентное число Прандтля показало, что поскольку градиент давления в первую очередь влияет на динамические характеристики пограничного слоя — величину турбулентного трения, — то при сильном ускорении потока это приводит к росту турбулентного числа Прандтля в области логарифмического слоя.

4. Поскольку точность определения величины Pr_t невелика, а для некоторых теплоносителей экспериментальные зависимости для Pr_t вообще отсутствуют, верификацию полученных расчетных зависимостей для Pr_t не всегда удается провести. Поэтому для косвенного подтверждения полученных расчетных зависимостей для Pr_t выполнено сравнение результатов расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными, входящими в определения величины Pr_t : профилями температуры, скорости, турбулентных потоков тепла и трения, а также коэффициентов трения и теплообмена (чисел Нуссельта и Стантона). Полученные результаты расчетов удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

5. Проведено исследование влияния переменности турбулентного числа Прандтля на характеристики теплообмена, в частности, на число Нуссельта Nu . Показано, что отличие числа Nu , определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0,85$, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, возрастает с уменьшением и увеличением молекулярного числа Прандтля Pr относительно значения $Pr = 0,71$ для воздуха. Вдув, отсос, положительный и отрицательный градиенты давления также увеличивают это отличие, которое для исследованного диапазона указанных параметров достигает 15 %. Таким образом, если в экспериментах точность определения числа Nu выше, то предположение о постоянстве числа Pr_t нельзя считать оправданным.

Список литературы

1. Kays W.M. Turbulent Prandtl number — where are we? // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1994. Vol. 116. P. 284–295.
2. McEligot D.M., Taylor M.F. The turbulent Prandtl number in the near-wall region for low-Prandtl-number gas mixture // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 39. P. 1287–1295.
3. Redjem-Saad L., Ould-Rouiss M., Lauriat G. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: effect of Prandtl number // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2007. Vol. 28, No. 5. P. 847–861.
4. Kawamura H., Ohsaka K., Abe H., Yamamoto K. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 1998. Vol. 19, No. 5. P. 482–491.
5. Kawamura H., Abe H., Matsuo Y. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 1999. Vol. 20, No. 3. P. 196–207.
6. Moffat R.J., Kays W.M. A review of turbulent-boundary-layer heat transfer research at Stanford, 1958–1983 // Advances Heat Transfer. 1984. Vol. 16. P. 241–365.

7. **Kader B.A., Yaglom A.M.** Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 2329–2351.
8. **Kays W.M.** Convective heat and mass transfer. McGraw-Hill Education; 4th edition, 2004. 512 p.
9. **Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.** К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
10. **Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г.** Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса: обзор // Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. С. 183–197.
11. **Hanjalic K., Launder B.E.** A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 52. P. 609–638.
12. **Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
13. **Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
14. **Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42–50.
15. **Жукаускас А.А., Шланчяускас А.А.** Теплообмен в турбулентном потоке жидкости. Вильнюс: Минтас, 1973. 327 с.
16. **Кадер Б.А., Яглом А.М.** Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
17. **Кокорев Л.С.** О соотношении коэффициентов турбулентного обмена тепла и количества движения в турбулентном потоке жидкого металла // Жидкие металлы: сб. статей. М.: Атомиздат, 1963. С. 27–33.
18. **Гешев П.И.** Турбулентный перенос тепла в пристенном потоке жидкого металла // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1975. № 6. С. 59–64.
19. **Moffat R.J., Kays W.M.** The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental heat transfer with uniform blowing and suction // Int. J. Heat Mass Transfer. 1968. Vol. 11, No. 10. P. 1547–1550.
20. **Thielbahr W.H., Kays W.M., Moffat R.J.** The turbulent boundary layer — experimental heat transfer with blowing, suction, and favorable pressure gradient // Report No. HMT-5. Thermosciences Div. Dept. of Mech. Engineering, Stanford Univ., Stanford, CA, 1969. 190 p.
21. **Leont'ev A., Lushchik V., Makarova M.** Heat and mass transfer in a tube with permeable walls: influence of suction and the Prandtl number // Proceedings of the Eight Intern. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, September 15–18, 2015 — Begell House Inc. USA, 2015. P. 145–148.
22. **Blackwell B.F., Kays W.M., Moffat R.J.** The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients // Report No. HMT-16. Thermosciences Div. Dept. of Mech. Engineering, Stanford Univ., Stanford, CA, 1972. 158 p.

*Статья поступила в редакцию 22 мая 2017 г.,
после доработки — 20 сентября 2017 г.*