

УДК 532.517

DOI: 10.15372/PMTF202415523

## О РОЛИ СКРЫТОГО ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. И. Яворский

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: nick@itp.nsc.ru

На основе полных уравнений Навье — Стокса обсуждается роль скрытого интеграла движения для корректного описания дальнего поля скорости и давления в случае неавтомоделных затопленных струй несжимаемой вязкой жидкости, когда источник движения имеет ненулевой характерный размер. Показано, что появление скрытого интеграла сохранения обусловлено тем, что координаты точки эффективного источника импульса и точки эффективного источника массы могут не совпадать для реальных протяженных в пространстве источников струйного течения. С использованием специальных функций получено точное аналитическое решение для всех членов асимптотического разложения дальнего поля неавтомоделной затопленной струи, описываемое всеми интегралами движения: сохранения полного потока импульса, сохранения полного потока момента импульса, сохранения полного потока массы и связанного с сохранением полного потока момента импульса дополнительного скрытого интеграла сохранения. Показано, что впервые скрытый интеграл фактически был получен Л. Г. Лойцянским при изучении неавтомоделного решения для затопленной струи в рамках приближения пограничного слоя, но был ошибочно интерпретирован как интеграл сохранения потока массы, вытекающей из источника струи. На основе полученного точного решения проведены расчеты полей скорости и давления при различных числах Рейнольдса и различных значениях скрытого интеграла для модели истечения струи из круглой трубки конечного размера. Анализируется влияние скрытого интеграла движения на картину течения.

**Ключевые слова:** скрытый интеграл движения, уравнения Навье — Стокса, неавтомоделные затопленные струи

**1. О проблеме скрытого интеграла сохранения в теории неавтомоделных затопленных струй.** Рассмотрим причины, по которым в теории неавтомоделных затопленных струй, основанной на полных стационарных уравнениях Навье — Стокса

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

появляется скрытый интеграл сохранения. Вопрос о скрытом интеграле движения в теории неавтомоделных затопленных струй вязкой несжимаемой жидкости возник достаточно давно, однако до сих пор не было предложено адекватной физической интерпретации этого интеграла. Как было показано Л. Д. Ландау [1], главный член асимптотического разложения решения уравнений Навье — Стокса для поля скорости струйного течения

на бесконечности является автомодельным решением конического класса, которое ранее обнаружил Н. Н. Слезкин [2]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\nu}{R} \mathbf{V}(\theta), \quad (2)$$

и описывается точным интегралом уравнений, соответствующих законам сохранения полного потока импульса, вытекающего из точечного источника:

$$\mathbf{F} = \oint_{S_R} \Pi \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}. \quad (3)$$

Здесь  $\Pi$  — тензор полного потока импульса:

$$\begin{aligned} \Pi = & \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p(\mathbf{n}_R \otimes \mathbf{n}_R + \mathbf{n}_\theta \otimes \mathbf{n}_\theta + \mathbf{n}_\varphi \otimes \mathbf{n}_\varphi) - \\ & - \mu \left[ \left( \mathbf{n}_R \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial R} + \frac{\mathbf{n}_\theta}{R} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{n}_\varphi}{R \sin \theta} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \mathbf{n}_R \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial R} + \frac{\mathbf{n}_\theta}{R} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{n}_\varphi}{R \sin \theta} \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \right)^T \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$R, \theta, \varphi$  — сферические координаты;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\mathbf{n}_R, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\varphi$  — орты сферической системы координат;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\mu = \rho\nu$  — динамическая вязкость; знак “ $\otimes$ ” обозначает операцию тензорного произведения. Величина  $\mathbf{F}$  есть сила, приложенная в точке  $\mathbf{r} = 0$ , лежащей внутри шара любого радиуса  $R$  с поверхностью  $S_R$ . Таким образом, постановка задачи, которую фактически решал Л. Д. Ландау, при условии (3) принимает вид

$$\text{div } \Pi = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  —  $\delta$ -функция Дирака. Из (1), (3), (4) следует, что решение должно иметь вид (2).

В работе Ю. Б. Румера [3] было найдено осесимметричное решение, которое связывалось со следующим членом асимптотического разложения дальнего поля струи. Это решение определяется законом сохранения полного потока массы с ненулевым расходом  $Q$ , вытекающей из точечного источника струи:

$$Q = \oint_{S_R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Вследствие наличия интеграла сохранения (6) выражение для скорости должно содержать слагаемое, пропорциональное  $1/R^2$ , при этом остальные слагаемые, зависимость которых от сферического радиуса имеет другой вид, не должны давать вклад в расход. Следует отметить, что с учетом размерности источник струи с ненулевым расходом не может быть точечным и должен иметь некоторый ненулевой характерный размер  $a_0$ . Решение для такой неавтомодельной струи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{w}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = O(1/R), \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}) = O(1/R^2), \\ p(\mathbf{r}) = p_1(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r}), \quad p_1(\mathbf{r}) = O(1/R^2), \quad q(\mathbf{r}) = O(1/R^3), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}), p_1(\mathbf{r})$  — решение Ландау задачи (5) (позднее решение этой задачи получил также Г. Сквайр [4]), в котором предполагается, что сила  $\mathbf{F}$  направлена вдоль оси симметрии задачи  $\theta = 0$ , соответственно, затопленная струя направлена в положительном направлении оси  $z$ . В силу осевой симметрии поле скорости имеет функцию тока

$$\psi_1 = \nu f_1(\cos \theta) R.$$

Вводя переменную  $t = \cos \theta$ , решение задачи (5) можно представить в виде

$$f_1(t) = 2 \frac{1-t^2}{A-t}, \quad A > 1; \quad (8)$$

$$v_{1R} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = -\frac{\nu}{R} f_1'(t), \quad v_{1\theta} = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = -\frac{\nu}{R} \frac{f_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad v_{1\varphi}(R, \theta) = 0; \quad (9)$$

$$p_1 = \frac{\rho \nu^2 g(t)}{R^2}, \quad g(t) = 4 \frac{At-1}{(A-t)^2}. \quad (10)$$

Параметр  $A$ , введенный в работе [1], связан с интенсивностью точечного источника импульса (силы), равной интегралу от полного потока импульса (3), (4) по любой замкнутой поверхности, окружающей источник импульса (например, сферы произвольного радиуса):

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Pi \cdot \mathbf{n}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 16\pi \rho \nu^2 A \left( 1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right) \mathbf{n}_z, \quad (11)$$

при этом  $F_z(A)$  — монотонная функция параметра  $A$ , которая стремится к бесконечности при  $A \rightarrow +1$  и стремится к нулю при  $A \rightarrow \infty$ . С помощью  $F_z$  определено число Рейнольдса (см. [1]):

$$\text{Re} = \sqrt{F_z/(\pi \rho \nu^2)}. \quad (12)$$

Подставляя разложение (7) в уравнения Навье — Стокса (1), при  $R \rightarrow \infty$  получаем линеаризованные уравнения Навье — Стокса, которым должны удовлетворять  $\mathbf{w}$ ,  $q$ :

$$(\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w}, \nabla) \mathbf{v}_1 = -\rho^{-1} \nabla q + \nu \Delta \mathbf{w}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0. \quad (13)$$

Эти решения свидетельствуют о том, что дальнейшее поле описывается точными интегралами сохранения, из которых следует зависимость решения от сферического радиуса в виде разложения по целым степеням обратного сферического радиуса  $1/R$  в бесконечно удаленной точке. Подтверждением этого факта является работа [5], в которой найдено решение для закрученной струи. Интенсивность закрутки можно определить из закона сохранения полного потока момента количества движения

$$\mathbf{L} = \oint_{S_R} (\mathbf{r} \times \Pi) \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi \rho R^3 \mathbf{n}_z \int_0^\pi \left[ v_R v_\varphi - \nu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right) \right] \sin^2 \theta d\theta = L_z \mathbf{n}_z. \quad (14)$$

На основе (14) аналогичным образом можно установить, что в этом случае появляется компонента скорости  $w_\varphi = O(1/R^2)$ , а решение уравнений (13) и момент силы вращения для такой задачи есть

$$w_\varphi = l_0 \frac{\nu}{R^2} \frac{\sqrt{1-t^2}}{A-t}, \quad L_z = 4\pi \rho \nu^2 l_0 \left( \frac{4}{3(A^2-1)} - 2 + A \ln \frac{A+1}{A-1} \right), \quad l_0 = \text{const}, \quad (15)$$

где  $l_0$  — постоянная, имеющая размерность длины. Таким образом, был сделан вывод, что на бесконечности поле скорости описывается аналитическими функциями, первые члены разложения этого поля в бесконечно удаленной точке описываются точными интегралами уравнений Навье — Стокса.

Однако в работе [6] было показано, что однородное линейное уравнение (13) может иметь нетривиальные решения вида

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}(\cos \theta) R^{-\alpha}, \quad q = g(\cos \theta) R^{-\alpha-1}, \quad (16)$$

где показатель степени  $\alpha$  находится как собственное значение при выполнении соответствующих однородных граничных условий и условия регулярности решения в особых точках  $\theta = 0, \pi$  или  $t = \pm 1$ . Подставляя (16) в (13) с учетом (8)–(10), в осесимметричном случае получаем спектральную задачу, которая имеет счетное число решений

$$\begin{aligned} [(1-t^2)f_n'']' - 2\frac{1-t^2}{A-t}f_n'' + \left(\alpha_n(\alpha_n-5) + 2(\alpha_n+1)\frac{A^2-1}{(A-t)^2}\right)f_n' - \\ - 4(\alpha_n-2)\left(\frac{A^2-1}{(A-t)^3} - \frac{1}{A-t}\right)f_n - (\alpha_n+1)g_n = 0, \quad (17) \\ g_n' + \alpha_n f_n'' - (\alpha_n-2)\left[\frac{2}{A-t}f_n' + \left(\frac{4t}{A-t} - 2\alpha_n\frac{A^2-1}{(A-t)^2} - \alpha_n(\alpha_n-3)\right)\frac{f_n}{1-t^2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь функции  $f_n(t)$  определяют функцию тока для поля скорости  $\mathbf{w}$ :

$$\psi_w = \nu \sum_{n=2}^{\infty} f_n(t) R^{2-\alpha_n}. \quad (18)$$

Согласно (18) выражения для компонент поля скорости  $\mathbf{w}$  и давления  $q$  принимают вид

$$\begin{aligned} w_R = -\nu \sum_{n=2}^{\infty} f_n'(t) R^{-\alpha_n}, \quad w_\theta = -\nu \sum_{n=2}^{\infty} (2-\alpha_n) \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} R^{-\alpha_n}, \quad w_\varphi = 0, \\ \frac{q}{\rho} = \nu^2 \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) R^{-\alpha_n-1}. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (19) следует, что условие регулярности решения для поля скорости и давления обеспечивается условиями

$$f_n(\pm 1) = 0, \quad |f_n'(\pm 1)| < \infty, \quad |g_n(\pm 1)| < \infty. \quad (20)$$

Система однородных уравнений (17) является системой уравнений типа уравнений Лежандра, поэтому выполнение (20) обуславливает аналитичность функций  $f_n(t)$ ,  $g_n(t)$ . Система (17) может иметь нетривиальные аналитические решения только при определенных значениях показателя степени  $\alpha_n$ . Как отмечено выше, количество таких решений счетно. При этом показатели степени сферического радиуса  $\alpha_n$  оказываются функциями числа Рейнольдса (рис. 1), за исключением первого показателя  $\alpha_2$ , который не зависит от  $Re$  и равен двум:  $\alpha_2 = 2$ . Из [7] и рис. 1 также следует, что при  $Re = 0$  и  $\alpha_n > 2$  собственные значения — целые числа, вырожденные двукратно, а с увеличением числа Рейнольдса вырождение исчезает, показатели степени становятся нецелыми числами. Это означает, что в бесконечно удаленной точке решения уравнений Навье — Стокса являются неаналитическими и имеют существенную особенность. В то же время собственное значение  $\alpha_2 = 2$  не вырождено и остается целым числом. Показатель степени сферического радиуса  $\alpha_2$  соответствует двум законам сохранения: закону сохранения массы и закону сохранения потока момента количества движения. В работе [3] было найдено нетривиальное аналитическое решение системы однородных уравнений (17) при  $\alpha_n = 2$ , а затем методом вариации постоянной решалась неоднородная задача с заданным ненулевым расходом. Однако в этом случае не всегда можно получить регулярное решение. Согласно альтернативе Фредгольма правая часть неоднородного уравнения должна быть ортогональна нетривиальному решению сопряженного однородного уравнения. Действительно, решение с ненулевым расходом, приведенное в [3], оказалось некорректным. Это обусловлено тем, что найденное в [3] решение однородного уравнения для  $w_R$

$$w_R^{Rum} = -\frac{\nu a_0}{R^2} c_0 V_0(t), \quad V_0(t) = 1 - \frac{3(A^2-1)}{(A-t)^2} + \frac{2(A^2-1)^2}{A(A-t)^3} \quad (21)$$

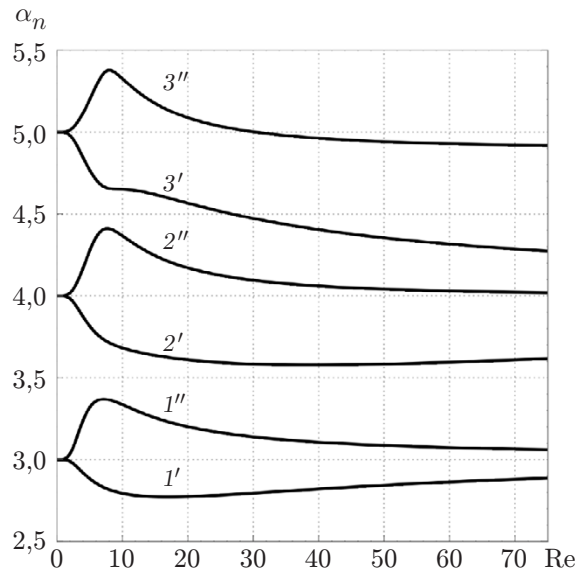


Рис. 1. Зависимость показателей степени  $\alpha_n$  от числа Рейнольдса  $Re$  (12) для спектральной задачи (17), (20):

$1', 1''$  — два решения для квадруполья,  $2', 2''$  — два решения для октуполья,  $3', 3''$  — два решения для 16-поля

соответствует функции тока

$$\psi^{Rum} = \nu a_0 c_0 U_0(t), \quad U_0(t) = (1 - t^2) \frac{1 - At}{A(A - t)^2}, \quad \frac{dU_0}{dt} = V_0(t), \quad a_0, c_0 = \text{const}, \quad (22)$$

которая на оси струи ( $t = \pm 1$ ) обращается в нуль, так же как и функция тока для авто-модельного решения Ландау (8). Таким образом, было найдено нетривиальное аналитическое решение с нулевым расходом. Поэтому предложенное в [3] решение для ненулевого расхода оказалось неаналитическим и содержит логарифмическую особенность на всей полуоси  $\theta = \pi$ , принадлежащей области течения. Это противоречие устранено в работе [6], в которой показано, что в разложение необходимо добавить член с логарифмом сферического радиуса (аналогичный результат был получен позднее в работе [8]). В этом случае находится аналитическое решение, которое описывает течение с ненулевым расходом. Соответственно, асимптотическое разложение функции тока при  $R \rightarrow \infty$  принимает вид

$$\psi = \nu f_1(t)R + \nu a_0 B U_0(t) \ln(R/a_0) + \nu a_0 f_2(t) + O(R^{2-\alpha}), \quad \alpha > 2. \quad (23)$$

Здесь  $a_0$  — характерный размер источника струи; безразмерная постоянная  $B$  линейно зависит от величины расхода  $Q$  (6). Функция  $f_2(t)$  содержит два слагаемых:

$$f_2(t) = B U(t) + c_0 U_0(t). \quad (24)$$

С использованием (8), (22)–(24) формула (6) преобразуется к виду

$$Q = 2\pi\rho\nu a_0 B [U(-1) - U(1)]. \quad (25)$$

Решение  $U_0(t)$  однородной системы уравнений (17) с условиями (20) соответствует нулевому расходу, поэтому коэффициент  $c_0$  в (22) остается неопределенным. В работах [6, 7] была предпринята попытка связать член  $c_0 U_0(t)$  в (24) с законом сохранения момента количества движения, но фактически он не дает вклад в поток полного момента

импульса вследствие осевой симметрии полученных решений. Следует отметить, что разложение (19) по своему физическому смыслу (по аналогии разложения в ряд решения уравнения Лапласа по целым обратным степеням сферического радиуса в бесконечно удаленной точке) является мультипольным разложением решения для затопленной струи. В этом случае можно полагать, что решение  $U_0(t)$  соответствует некоторому струйному диполю. Поскольку  $\alpha_2 = 2$  при всех числах Рейнольдса, следует ожидать, что этому решению соответствует еще один (скрытый) интеграл движения, тогда как высшие мультиполи не порождают дополнительных интегралов движения. Вопрос о физическом смысле этого скрытого интеграла движения в течение длительного времени оставался не выясненным, хотя его роль, особенно в случае закрученных струй, как было показано в [7], существенна. В монографии [7] также приведено полное решение нелинейной задачи для неавтономных затопленных струй вязкой несжимаемой жидкости, в том числе неосесимметричных, в общей постановке, когда решаются полные уравнения Навье — Стокса (1) во внешней области при заданном произвольном поле скорости на замкнутой поверхности, ограничивающей объем, в котором содержится источник струи. Осуществлена попытка конструирования скрытого интеграла сохранения, но это не привело к решению проблемы скрытого интеграла движения. В работе [9] получено аналитическое решение для дальнего поля скорости, соответствующее течению с произвольно направленным вектором потока момента количества движения. Проведенное в [9] исследование не позволило установить физический смысл скрытого интеграла сохранения, но инициировало проведение настоящего исследования, в котором окончательно решена рассматриваемая проблема.

**2. Решение проблемы.** Для нахождения вида скрытого интеграла сохранения используется предположение, что точка приложения внешней силы и точка истечения струи могут не совпадать, поскольку источник неавтономной затопленной струи имеет ненулевой характерный размер. При постановке задачи об истечении импульса, массы и момента количества движения из определенного физического устройства требуется задавать соответствующие распределения скоростей на определенной замкнутой поверхности, окружающей источник струи [7]. В этом случае при переходе к постановке задачи о неавтономной затопленной струе, в которой решение строится в виде разложения в бесконечно удаленной точке, необходимо вычислять, в какой точке пространства расположен эффективный источник импульса и какой точке соответствует эффективный источник массы. Полагая, что начало координат находится в точке эффективного источника массы, автономное решение следует рассматривать в виде

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \dots \quad (26)$$

Это решение соответствует течению, вызванному точечным источником импульса, расположенным в точке  $\mathbf{r} = -\mathbf{a}$ . Нетрудно показать, что разложение (26) в ряд по  $\mathbf{a}$  (в предположении  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{a}|$ ), по сути, есть разложение по степеням обратного сферического радиуса  $1/R$  и второй член в разложении (26) имеет порядок  $O(1/R^2)$ . При этом величины

$$\mathbf{w} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = O(1/R^2), \quad q = (\mathbf{a} \cdot \nabla) p_1(\mathbf{r}) = O(1/R^3)$$

являются точным решением линеаризованного уравнения Навье — Стокса (13). Это можно установить, если подействовать оператором смещения  $\mathbf{a} \cdot \nabla$  на полное уравнение Навье — Стокса (1), в котором скорость и давление есть точное решение автономной задачи для точечного источника импульса (8)–(10):

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) | (\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_1 = -\rho^{-1} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0.$$

Отсюда получаем уравнение (13). Таким образом, можно найти аналитическое точное решение для  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = & -\frac{2\nu a_z}{R^2} A \left( 1 - \frac{3(A^2 - 1)}{(A - t)^2} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{A(A - t)^3} \right) \mathbf{n}_R + \\ & + \frac{2\nu \sin \theta (\cos \varphi a_x + \sin \varphi a_y)}{R^2} \left( \frac{A}{A - \cos \theta} + \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - \frac{2A(A^2 - 1)}{(A - \cos \theta)^3} \right) \mathbf{n}_R + \\ & + \frac{2\nu (\cos \varphi a_x + \sin \varphi a_y)}{R^2(A - \cos \theta)} \mathbf{n}_\theta - \frac{2\nu(A \cos \theta - 1)(\sin \varphi a_x - \cos \varphi a_y)}{R^2(A - \cos \theta)^2} \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned} \quad (27)$$

Первое слагаемое в (27) соответствует искомому члену с произвольным коэффициентом  $c_0$ . Остальные слагаемые совпадают с решением, полученным путем прямого решения уравнения (13), приведенного в работе [9]. Проводя сравнение (27) с соответствующим выражением для  $w_R$  из (21) с учетом (22)–(24), находим

$$c_0 = 2Aa_z/a_0. \quad (28)$$

Таким образом, интенсивность струйного диполя линейно связана со смещением точки приложения силы  $\mathbf{F}$ .

Вычислим поток полного момента количества движения, интегрируя по сфере с произвольным радиусом  $R$ :

$$\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{r} \times \Pi \cdot \mathbf{n}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = L_x \mathbf{n}_x + L_y \mathbf{n}_y + L_z \mathbf{n}_z.$$

Заметим, что поток полного момента количества движения для автомодельной струи Слезкина — Ландау — Сквайра равен нулю. Это обусловлено тем, что тензор полного потока импульса для указанной струи имеет только одну отличную от нуля компоненту  $\Pi_{RR}$ , что было установлено в работе [1]. Компонента  $L_z$  отлична от нуля только для закрученной струи, полученной М. С. Цуккером [5] (см. (15)). Вычисляя остальные слагаемые с помощью формул (27), получаем

$$L_x \mathbf{n}_x + L_y \mathbf{n}_y = (-a_y \mathbf{n}_x + a_x \mathbf{n}_y) F_z.$$

Эта формула полностью соответствует результатам работы [9], за исключением того, что они не были выражены в обозначениях вектора смещения  $\mathbf{a}$  и силы  $\mathbf{F}$ . Приведенные выше формулы позволяют записать выражение для полного потока момента количества движения в инвариантном векторном виде

$$\mathbf{L} = \oint_S (\mathbf{r} \times \Pi) \cdot \mathbf{n} dS = -\mathbf{a} \times \mathbf{F} + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_F) \mathbf{n}_F, \quad \mathbf{n}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}, \quad (29)$$

где  $S$  — произвольная поверхность, ограничивающая объем, содержащий источник струи. Из важной формулы (29) следует, что полный поток момента количества движения  $\mathbf{L}$  есть сумма момента произвольно направленной силы  $\mathbf{F}$ , порождающей струю, и момента силы, вращающего жидкость и направленного вдоль вектора силы  $\mathbf{F}$ . Из (28), (29) следует, что константа  $c_0$  не определяется заданием величины полного потока момента импульса. Она связана с компонентой вектора смещения, параллельной  $\mathbf{F}$ .

Остается найти интеграл сохранения, соответствующий компоненте  $a_z$  вектора сдвига точки приложения силы. Таким интегралом оказался индуцированный этим сдвигом дополнительный расход на произвольной плоскости, перпендикулярной оси струи (ось струи

определяется главным членом разложения полного решения задачи в бесконечно удаленной точке, т. е. направлением силы  $\mathbf{F}$ ):

$$Q_w = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi w_z r dr d\varphi = 4\pi\rho\nu \frac{a_z}{A^2} = \text{const}. \quad (30)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты.

Из (30) следует, что  $Q_w$  — интеграл движения, поскольку он не зависит от координаты  $z$  точки пересечения плоскости интегрирования с осью струи. Этот интеграл не зависит от расхода жидкости, вытекающей из источника струи. В частности, при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, параметр  $A \rightarrow +1$  и  $Q_w \rightarrow 4\pi\rho\nu a_z$ . В этом случае он зависит только от величины смещения  $a_z$ . Окончательно получаем

$$c_0 = \frac{A^3}{2\pi\rho\nu a_0} Q_w. \quad (31)$$

Таким образом, скрытым интегралом движения можно считать  $Q_w$  (30). Этот интеграл связан со сдвигом источника импульса вдоль оси струи  $a_z$ . Введение скрытого интеграла движения в виде (30) не обязательно. Заметим, что согласно (29) интеграл движения  $\mathbf{L}$  содержит два слагаемых, которые по отдельности являются самостоятельными интегралами движения. Один из них — момент силы  $-\mathbf{a} \times \mathbf{F}$ . Поскольку  $\mathbf{F}$  является интегралом движения (11), достаточно знать вектор смещения  $\mathbf{a}$ , чтобы определить этот момент. В то же время задание постоянного вектора  $\mathbf{a}$  равносильно заданию также двух интегралов движения. Момент силы  $-\mathbf{a} \times \mathbf{F}$  задается перпендикулярной  $\mathbf{F}$  компонентой вектора смещения  $\mathbf{a}_\perp$ . Скрытый интеграл движения определяется, если задана параллельная  $\mathbf{F}$  компонента вектора смещения  $\mathbf{a}_\parallel$  (в данном случае она совпадает с  $a_z$ ). Таким образом, скрытым интегралом движения можно считать

$$\mathbf{a}_\parallel = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_F) \mathbf{n}_F. \quad (32)$$

Этот вектор не дает вклад в  $\mathbf{L}$  и является самостоятельным интегралом движения в теории затопленных струй.

Следует отметить, что если выбрать член разложения тензора полного потока импульса, линейного по  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \Pi_w = & \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}_1 + q(R, \theta)(\mathbf{n}_R \otimes \mathbf{n}_R + \mathbf{n}_\theta \otimes \mathbf{n}_\theta + \mathbf{n}_\varphi \otimes \mathbf{n}_\varphi) - \\ & - \nu \left[ \left( \mathbf{n}_R \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial R} + \frac{\mathbf{n}_\theta}{R} \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{n}_\varphi}{R \sin \theta} \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \mathbf{n}_R \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial R} + \frac{\mathbf{n}_\theta}{R} \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{n}_\varphi}{R \sin \theta} \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi} \right)^\top \right], \end{aligned}$$

то, выполняя прямое вычисление и используя члены, обеспечивающие ненулевой расход и вращение струи, выводим формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_w = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Pi_w \cdot \mathbf{n}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \\ \mathbf{L} = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{r} \times \Pi_w) \cdot \mathbf{n}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\mathbf{a} \times \mathbf{F} + L_z \mathbf{n}_z, \end{aligned}$$



подтверждающие правильность полученного решения. Также следует отметить, что следующие члены разложения не влияют на результат, поскольку  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $Q$  есть точные интегралы движения для уравнений Навье — Стокса (1) для стационарных задач о затопленных струях произвольного вида, в том числе неосесимметричных.

В то же время, если в формуле (30) вместо  $w_z$  использовать компоненту автомодельного решения  $v_{1z}$ , то интеграл становится бесконечным при общем нулевом расходе (малоизвестный факт). Это свидетельствует о том, что струя вовлекает в движение (эжектирует) бесконечную массу жидкости, что возможно только в том случае, если струя течет бесконечно долго. Таким образом, интеграл движения  $Q_w$  скрыт. Его невозможно определить, выполняя прямые измерения скорости в эксперименте. Однако можно вычислить все интегралы движения, в том числе расход по площади круга, лежащего в области наблюдаемого в эксперименте установившегося течения вблизи оси струи. Тогда из приведенных выше формул теоретически можно будет вычислить величину смещения  $a_z$ .

Следует отметить, что интеграл (30) по форме и физическому содержанию соответствует интегралу движения, полученному Л. Г. Лойцяным [10] в рамках теории пограничного слоя для неавтомодельной затопленной круглой струи. Однако в [10] этот интеграл интерпретирован как расход жидкости, истекающей из подводящей трубки, из которой бьет струя. Данный результат вошел в учебники [11] (формула (199)). Однако решение Лойцянского для неавтомодельной струи соответствует струйному диполю [7] и его можно получить из решения Румера (21), выполняя предельный переход при  $Re \rightarrow \infty$ . Кроме того, профиль скорости оказывается знакопеременным, причем вблизи оси струи вклад положительного расхода приводит к уменьшению осевой скорости, а вдали от оси — к ее увеличению (см. формулу (198) в [11]), что трудно согласовать с ожидаемой картиной течения. Это обусловлено тем, что полученное слагаемое не является вкладом расхода жидкости, вытекающей из источника струи. Полученный в работе [10] вклад в общий расход создается в результате дополнительной эжекции жидкости вследствие присутствия струйного диполя, который возникает, в случае если источник импульса и источник массы находятся в разных точках на оси струи, как было показано выше. Поэтому можно утверждать, что скрытый интеграл движения для неавтомодельных затопленных струй в виде (30) впервые был обнаружен Л. Г. Лойцяным в 1953 г., но неверно интерпретирован.

**3. Точные аналитические решения для затопленной струи с ненулевым расходом.** Прежде всего следует отметить, что с учетом результатов, приведенных в п. 2, струя с ненулевым расходом имеет пять источников движения, которые описываются соответствующими точными интегралами движения. Первый источник (главный, без него струя отсутствует) — источник импульса — сила  $\mathbf{F}$  (5). Второй источник — полный поток массы или интенсивность источника массы — расход  $Q$  (6). Третий и четвертый источники — компоненты полного потока момента импульса  $\mathbf{L}$  (29), который фактически состоит из двух независимых источников движения: момента силы  $-\mathbf{a} \times \mathbf{F}$  и момента силы, вращающей жидкость,  $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_F)\mathbf{n}_F$ , который направлен вдоль  $\mathbf{F}$  и равен нулю в случае незакрученной струи. Пятый источник, связанный со скрытым интегралом движения  $\mathbf{a}_{\parallel}$  (32) или  $Q_w$  (30), представляет собой струйный диполь, ориентированный вдоль  $\mathbf{F}$ . Интенсивность струйного диполя определяется параметром  $c_0$  (28), (31). Интенсивность всех источников зависит от величины  $\mathbf{F}$ , о чем свидетельствует их зависимость от параметра  $A$  (см. (11), (15), (25), (28)–(31)). Заметим, что для задания третьего и пятого источников требуется знать полный вектор смещения эффективной точки приложения всех сил  $\mathbf{a}$  относительно эффективной точки источника массы. В зависимости от количества источников движения можно ввести соответствующее количество безразмерных критериев подобия. В частности, для незакрученной осесимметричной струи имеется только три ненулевых критерия подобия: два числа Рейнольдса, построенные по интенсивностям источников импульса и

массы, и  $\lambda$  — безразмерная компонента вектора смещения вдоль  $\mathbf{F}$ :

$$\text{Re}_F = \sqrt{\frac{|\mathbf{F}|}{\pi\rho\nu^2}}, \quad \text{Re}_Q = \frac{Q}{\pi\rho\nu a_0}, \quad \lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_F}{a_0}. \quad (33)$$

Для расчетов струйных течений с ненулевым расходом требуется определить функцию  $U(t)$  в (24), которая определяет расход  $Q$  (25). Для этого нужно решить уравнения (17) при  $\alpha_n = 2$  с правой частью, в которую также входит дополнительное слагаемое вследствие наличия члена с  $\ln(R/a_0)$  в разложении для функции тока (23). Как показано в [3], в отсутствие члена с логарифмом правая часть линейно связана с расходом  $Q$ . Однако, поскольку однородное уравнение имеет нетривиальное аналитическое решение  $U_0(t)$  (22), согласно альтернативе Фредгольма разрешимость неоднородной задачи возможна только в том случае, если правая часть ортогональна в соответствующем функциональном пространстве решению однородного сопряженного уравнения. В [6, 7] подробно изложена процедура, в которой преодолевается появляющаяся в этом случае неразрешимость задачи. Вводя в разложение функции тока член с  $\ln(R/a)$ , задачу можно сделать разрешимой, при этом коэффициент  $B$  при слагаемом в (23) однозначно определяется из указанного выше условия ортогональности. В результате коэффициент  $B$  оказывается пропорциональным расходу и равен

$$B = \text{Re}_Q / q(A); \quad (34)$$

где

$$q(A) = \frac{4}{d_0} \left( 2A(A^2 - 1)^2 \ln^2 \frac{A+1}{A-1} - (3A^4 - 11A^2 + 4) \ln \frac{A+1}{A-1} - \frac{18A^6 + 66A^4 - 106A^2 + 6}{9A(A^2 - 1)} \right); \quad (35)$$

$$d_0 = 10A^2 - 6A^4 + 3A(A^2 - 1)^2 \ln \frac{A+1}{A-1}. \quad (36)$$

Соответственно, уравнение для функции  $U(t)$  в (24), (25) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( (1-t^2)(A-t)^2 \frac{d^2 U}{dt^2} \right) + (6A^2 - 1) \frac{dU}{dt} = S(t), \quad (37)$$

где правая часть есть

$$S(t) = \frac{6(A^2 - 1)^2}{(A-t)^2} - \frac{8A(A^2 - 1)}{A-t} + 3(A^2 - 1) + \frac{2-6A^2}{A} (A-t) + \frac{3-5A^2}{d_0} \left( -6A^2 + 3(A^2 - 1)A \ln \frac{A+1}{A-1} + 4 \right) (A-t)^2. \quad (38)$$

Уравнение (37) записано таким образом, чтобы в левой части получился самосопряженный оператор, так же как и в работе [3]. В случае  $B = 0$  уравнение однородное и имеет нетривиальное решение  $V_0(t)$  (21). Функция  $U(t)$  определяется с точностью до постоянной. Постоянная определяется из условия нормировки функции тока (см. (23), (24)). В данной работе нормировка функции тока выбрана таким образом, чтобы она была равна нулю при  $t = 1$  ( $\theta = 0$ ), т. е. на оси струи. Это соответствует выполнению условия  $U(1) = 0$ . Путем прямой подстановки можно подтвердить, что условие ортогональности правой части решению однородного уравнения выполнено:

$$B \int_{-1}^1 S(t) V_0(t) dt = 0.$$

Заметим также, что уравнение (37) является уравнением типа уравнения Лежандра. Теория таких уравнений достаточно хорошо разработана [12]. У них имеется две особые точки  $t = \pm 1$ , в которых решение может быть аналитическим либо иметь логарифмическую особенность. При построении решения неоднородного уравнения необходимо установить наличие решений с логарифмической особенностью, поскольку при использовании различных методов, в частности метода вариации постоянной, в полученном решении неоднородного уравнения может появиться слагаемое с сингулярным решением (так же, как в работе [3]). При использовании различных вариантов численных методов необходимо также следить за тем, чтобы в решении не появилась логарифмическая особенность. В данной работе удалось построить точное аналитическое решение неоднородного уравнения (37), (38). Следует отметить, что при построении решения было найдено сингулярное точное решение однородного уравнения (36) при  $B = 0$ , имеющее вид

$$U_s(t) = \frac{12A^3 - 6A}{A - t} - \frac{6A^4 - 10A^2 + 4}{(A - t)^2} - \frac{3A(1 - t^2)(At - 1)}{(A - t)^2} \ln \frac{1 + t}{1 - t} + \text{const}. \quad (39)$$

С использованием сингулярного решения  $U_s(t)$  в явном виде (39) вклад сингулярности в аналитических формулах для неоднородного уравнения был исключен. Помимо исключения сингулярной части требуется исключить вклад в решение неоднородного уравнения (37) аналитического решения однородного уравнения  $U_0(t)$  (22), поскольку постоянный коэффициент  $c_0$  в решении (24) должен определяться скрытым интегралом сохранения (32). Для того чтобы исключить этот струйный диполь, более предпочтительно использовать производную искомого решения. Ниже приведена аналитическая формула этого решения

$$V(t) = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{d_0} \left\{ P(t) + 2(5A^2 - 3) \left( \frac{2(A^2 - 1)^2}{(A - t)^2} - \frac{(A^2 - 1)A}{A - t} + \frac{2}{3} - A^2 \right) \ln(A - t) + \right. \\ \left. + (A^2 - 1)(5A^2 - 3)A \left( \frac{2(A^2 - 1)^2}{A(A - t)^3} - \frac{3(A^2 - 1)}{(A - t)^2} + 1 \right) \left[ \text{Li}_2\left(\frac{t + 1}{A + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{t - 1}{A - 1}\right) \right] \right\}, \quad (40)$$

где  $P(t)$  — полином второго порядка от переменной  $(A - t)^{-1}$ :

$$P(t) = p_0 + \frac{p_1}{A - t} + \frac{p_2}{(A - t)^2}, \\ p_0 = -\frac{16}{9(A^2 - 1)} - \frac{4}{9} + \left( 2 - \frac{19}{3}A^2 + 5A^4 \right) \ln(A^2 - 1) + \\ + (11A^2 - 9) \left( A^2 - \frac{A}{6} (3A^2 - 1) \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right), \\ p_1 = 28A^5 - \frac{136}{3}A^3 + 12A + \\ + (A^2 - 1) \left( A(5A^2 - 3) \ln(A^2 - 1) - (14A^4 - 15A^2 + 3) \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right), \\ p_2 = (A^2 - 1)^2 \left( (6 - 10A^2) \ln(A^2 - 1) - \frac{A}{2} (29A^2 - 21) \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right) - \\ - (A^2 - 1)(29A^4 - 47A^2 + 12). \quad (41)$$

Заметим, что выражение для  $V_0(t)$  (21) является полиномом третьей степени переменной  $(A - t)^{-1}$ . При стандартных процедурах нахождения частного решения неоднородного уравнения (37), (38) получается решение вида (40), в котором полином  $P(t)$  является полиномом третьей степени. Это означает, что решение содержит струйный диполь. С помощью

решения однородного уравнения  $V_0(t)$  третью степень переменной  $(A - t)^{-1}$  из частного решения неоднородного уравнения можно исключить, тогда получится решение (40) с указанным выше полиномом второго порядка, которое не содержит струйный диполь. Точное решение (40) содержит специальную функцию — полилогарифм

$$\text{Li}_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k^2}.$$

Константы  $B$ ,  $d_0$  определены в (34)–(36).

Для построения картины линий тока будем использовать функцию тока (23), (24). Функция  $U(t)$ , входящая в функцию тока  $\psi$ , является интегралом от функции  $V(t)$  (40) (выражение не приводится вследствие его громоздкости). Далее будет использоваться функция  $U(t) - U(1)$  в соответствии с принятой выше нормировкой функции тока.

**4. Роль скрытого интеграла сохранения в стандартной модели неавтономных затопленных струй.** Исследуем влияние на картину течения скрытого интеграла сохранения на примере численных расчетов полей течения и давления на основе разложения функции тока (23) для дальнего поля осесимметричной незакрученной неавтономной затопленной струи. Вид разложения (23), (24) был выбран таким образом, чтобы все члены этого разложения определялись интегралами движения для неавтономной затопленной струи — полными потоками импульса, массы, момента количества движения и скрытым интегралом. Как отмечено в п. 3, в этом случае решение определяется заданием трех критериев подобия  $\text{Re}_F$ ,  $\text{Re}_Q$ ,  $\lambda$  (33). Если задано определенное устройство, генерирующее затопленную струю, то критерии могут оказаться зависимыми. Выберем “стандартную” модель источника струи, описывающую устройство в виде круглой подводной трубки, из которой истекает струя в пространство, затопленное той же жидкостью. В этом случае потоки импульса и массы определяются по формулам

$$F_z = \rho v_0^2 \pi a_0^2, \quad Q = \rho v_0 \pi a_0^2,$$

где  $v_0$  — скорость жидкости в подводной трубке;  $a_0$  — радиус трубки. Тогда (33) преобразуется к виду

$$\text{Re}_F = \text{Re}_Q = \text{Re} = \frac{v_0 a_0}{\nu}, \quad \lambda = \frac{a_z}{a_0}.$$

Обезразмерим сферический радиус, скорость и давление с помощью величин  $a_0$ ,  $v_0$  и  $\rho v_0^2$  соответственно. Тогда выражения для безразмерных компонент поля скорости и давления принимают следующий вид (ср. [7]):

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{2}{R} \left( \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right) - B \frac{\ln R}{R^2} V_0(\cos \theta) - \frac{B}{R^2} V(\cos \theta) - \frac{c_0}{R^2} V_0(\cos \theta) \right], \\ v_\theta &= \frac{1}{\text{Re}} \left[ -\frac{1}{R} \frac{2 \sin \theta}{A - \cos \theta} - \frac{B}{R^2} \frac{U_0(\cos \theta)}{\sin \theta} \right], \quad v_\varphi = 0; \\ p &= \frac{1}{\text{Re}^2} \left[ \frac{4}{R^2} \frac{A \cos \theta - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 2B \frac{\ln R}{R^3} V_0(\cos \theta) + \frac{B}{R^3} g(\cos \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2B}{R^3} V(\cos \theta) - \frac{2c_0}{R^3} V_0(\cos \theta) \right], \\ g(\cos \theta) &= -\frac{2(A^2 - 1)^2}{3A(A - \cos \theta)^3} + \frac{4(A^2 - 1)}{(A - \cos \theta)^2} + \frac{2 - 6A^2}{A(A - \cos \theta)} + g_0, \\ g_0 &= \frac{2}{3d_0} \left( 6A^4 - 4A^2 + 6 - 3(A^2 - 1)A^3 \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right). \end{aligned} \tag{42}$$

Безразмерная функция тока есть

$$\psi = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{2 \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} R - B \ln R U_0(\cos \theta) + B[U(\cos \theta) - U(1)] + c_0 U_0(\cos \theta) \right). \quad (43)$$

Число Рейнольдса  $\text{Re}$  определяется из (11), (12) и равно

$$\text{Re} = 4 \sqrt{A \left( \frac{4}{3(A^2 - 1)} + 1 - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right)}, \quad (44)$$

константы  $B$  и  $d_0$  определены в (34)–(36),  $c_0 = 2Aa_z/a_0$  (28). Таким образом, решение (42), (43) полностью определено, если заданы два параметра: число Рейнольдса  $\text{Re}$  и безразмерный вектор смещения  $\lambda = a_z/a_0$ . Параметр  $A$  вычисляется по заданному числу Рейнольдса  $\text{Re}$  (44). В формулах (42) компонента скорости  $v_R$  имеет четыре слагаемых. Первое слагаемое, соответствующее автомодельному решению, — главный член разложения в бесконечно удаленной точке. Второе и четвертое слагаемые соответствуют струйному диполю. Второе слагаемое — струйный диполь, генерируемый расходом. Четвертое слагаемое — струйный диполь, возникающий в результате сдвига точки приложения силы и соответствующий скрытому интегралу движения. Наличие ненулевого расхода определяет только третье слагаемое, содержащее  $V(\cos \theta)$ . В выражении для функции тока (43) слагаемые имеют тот же физический смысл.

Расчеты были проведены в широком диапазоне чисел Рейнольдса от  $\text{Re}_{\min} = 0,05$  до  $\text{Re}_{\max} = 250$  для ламинарных струйных течений при значениях вектора смещения  $a_z = -a_0, 0, a_0$ , эффективный источник импульса был расположен в области источника струи. Все расчеты проводились с высокой степенью точности в пакете Wolfram Mathematica с мантисой, превышающей 20 значащих цифр. Особое внимание было уделено точности расчетов вблизи особых точек уравнений, для чего были созданы соответствующие алгоритмы. Кроме того, приведенные выше формулы были проверены в том же пакете различными способами.

В формулах (42), (43) слагаемые с коэффициентом  $B$  определяются путем задания расхода затопленной струи  $Q$  (см. (6), (25), (34)–(36)), а слагаемое с коэффициентом  $c_0$  (28) представляет собой вклад скрытого интеграла сохранения  $\mathbf{a}_{\parallel}$  (32). На рис. 3–11 для иллюстрации роли скрытого интеграла движения представлены зависимости вкладов различных интегралов движения на оси струи при удалении от ее источника и соответствующие картины линий тока.

На рис. 2 представлена зависимость от угла  $\theta$  третьего слагаемого в разложении для радиальной компоненты скорости (42), определяющего ненулевой расход, при  $\text{Re} = 0,05$ . Видно, что эта зависимость описывает практически изотропное течение жидкости из источника струи. Вблизи источника струи указанное слагаемое является доминирующим при малых числах Рейнольдса. Это обусловлено тем, что в данном случае полный поток импульса  $F_z$  является величиной второго порядка, малой по сравнению с расходом  $Q$  (32). Соответственно, вклад струйных диполей будет также второго порядка малости (рис. 3).

Линии тока вблизи области источника струи, представленного в виде сферы радиусом  $a_0$ , показаны на рис. 4, а. Вдали от источника струи вклад автомодельного решения в поле скорости преобладает и картина течения имеет вид потока, обтекающего источник массы (рис. 4, б). Жидкость, эжектируемая струей, обтекает область, в которой движется жидкость, вытекающая из источника массы.

С увеличением числа Рейнольдса до значения  $\text{Re} = 2$  картина течения вблизи источника струи радикально изменяется. Истечение жидкости из источника струи становится существенно асимметричным. На рис. 5 представлено распределение составляющей компоненты радиальной скорости, задающей ненулевой расход. Видно, что на оси струи ( $\theta = 0$ )

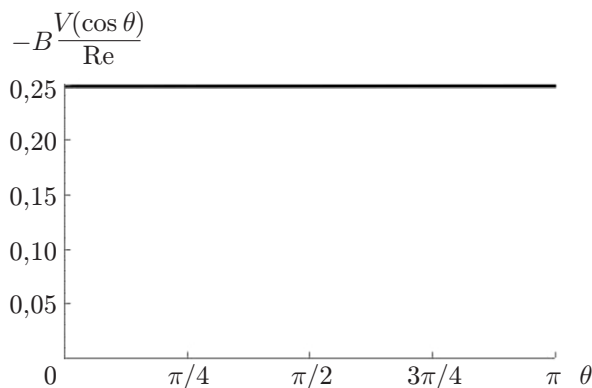


Рис. 2. Зависимость третьего слагаемого в разложении для радиальной компоненты скорости (42) от угла  $\theta$  при  $\text{Re} = 0,05$

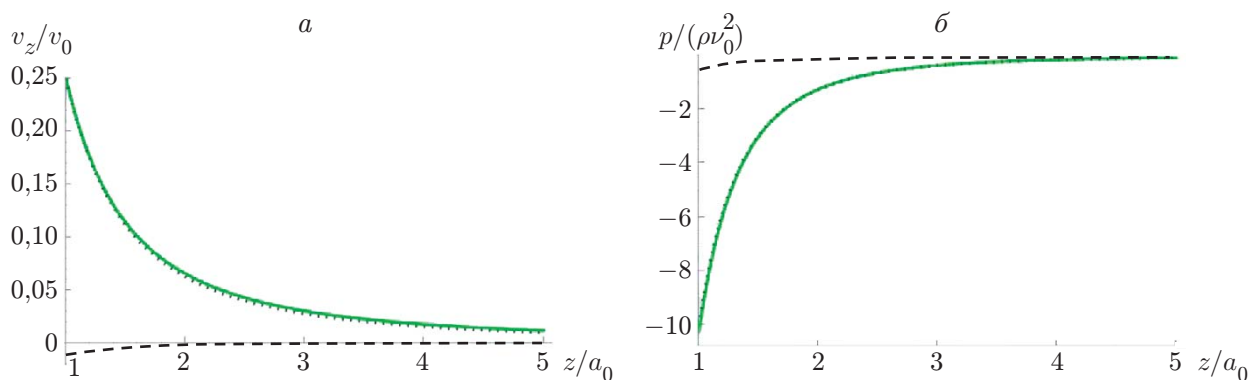


Рис. 3. Вклады ненулевого расхода на оси струи (пунктирные линии) и скрытого интеграла движения (штриховые линии) в скорость (а) и давление (б) (сплошные линии) при  $\text{Re} = 0,05$ ,  $a_z/a_0 = 1$

дополнительная скорость, зависящая от потока массы из источника струи, существенно уменьшается. На рис. 6 приведены вклады ненулевого расхода и скрытого интеграла в полный вектор скорости на оси струи. При  $\text{Re} = 2$  вклад от источника массы (пунктирная линия) становится пренебрежимо малым, при этом вклад скрытого интеграла (штриховая линия) значителен. Существенное влияние оказывает положение эффективного источника импульса (точки приложения силы). Вклад в скорость может быть как положительным (см. рис. 6, б), так и отрицательным (см. рис. 6, а). При увеличении расстояния от источника до величины, равной 3 калибра, влияние неавтомоделности на величину скорости на оси струи становится незначительным. Однако вне оси струи влияние скрытого интеграла движения (положения точки приложения силы) и ненулевого расхода остается существенным даже на больших расстояниях. На рис. 7 приведены картины линий тока вблизи источника струи. Для демонстрации особенностей влияния положения точки приложения силы  $\mathbf{F}$  показано течение внутри источника струи (штриховая окружность на рис. 7) в отсутствие всех других членов разложения. На рис. 7, а точка приложения силы (указана стрелкой) находится левее эффективного источника массы (сфера радиусом  $a_0/10$ ). Струя проникает внутрь и обтекает источник массы, образуя зону возвратного течения. Жирной линией ограничена область, занимаемая жидкостью, вытекающей из источника массы. Эта область значительно шире области, представленной на рис. 7, б, и простирается на

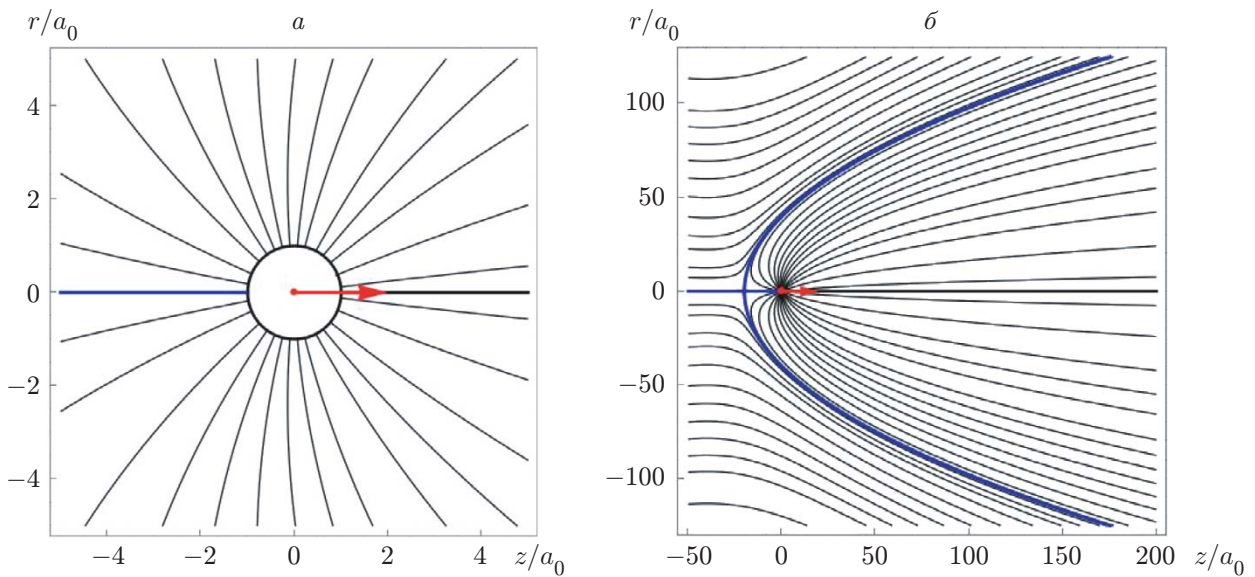


Рис. 4. Линии тока для затопленной струи с ненулевым расходом при  $Re = 0,05$ ,  $a_z/a_0 = 0$ :

$a$  — область течения вблизи источника струи в виде шара радиусом  $a_0$ ,  $b$  — область течения, включающая дальнее поле струи на расстоянии, равном 100 калибров подводной трубы; жирная линия — линия тока  $\psi = 0,5$ , разделяющая жидкость, эжектируемую струей, и жидкость, вытекающую из источника струи; стрелка — вектор силы, формирующей струю

значительное расстояние от источника импульса вдоль струи. Если эффективный источник массы находится позади эффективного источника импульса (см. рис. 7,б), то линия тока, отделяющая жидкость, вытекающую из источника массы, от жидкости, эжектируемой струей, смещается в направлении против потока, поскольку воздействие источника импульса на источник массы становится существенно меньшим, в то же время линии тока прижимаются к оси струи в силу более интенсивной эжекции в область, примыкающую к точке эффективного источника импульса.

Известно, что для дальнего поля турбулентных струй применима модель Буссинеска с постоянной турбулентной вязкостью. Из результатов экспериментов следует, что этим течениям соответствует построенное по турбулентной вязкости число Рейнольдса  $Re_T = 35$  (см. [7, 11]). Поэтому можно применить теорию неавтономных затопленных ламинарных струй для описания поля течения в турбулентной струе, положив  $Re = 35$ . На рис. 8–10 представлены зависимости для поля скорости при  $Re = 35$ .

На рис. 8 видно, что вклад ненулевого расхода оказывается несущественным (пунктирные линии), вклад струйного диполя, соответствующего скрытому интегралу движения (штриховые линии), существенный, но быстро уменьшается с ростом координаты  $z$ . Вклад члена разложения радиальной скорости, задающей ненулевой расход, показан на рис. 9. В диапазоне углов  $\pi/4 < \theta \leq \pi$  скорость практически постоянна, как и в случае точечного источника массы, но в окрестности оси струи ( $\theta = 0$ ) имеет характер поля локализованного струйного диполя с интенсивным возвратным течением на оси. На рис. 10 представлены линии тока при различных положениях эффективного источника импульса. Заметим, что в этом случае области, занимаемые жидкостью, вытекающей из источника массы, полностью охватывают источник струи. При этом размеры этой области изменяются почти в два раза для рассматриваемых двух положений эффективного источника импульса.

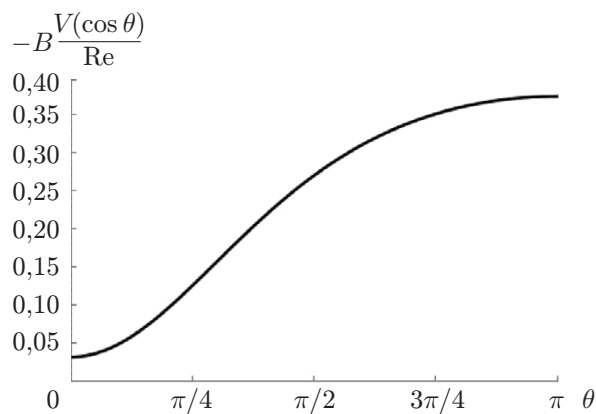


Рис. 5. Распределение составляющей компоненты радиальной скорости, задающей ненулевой расход, при  $\text{Re} = 2$ ,  $a_z = 0$

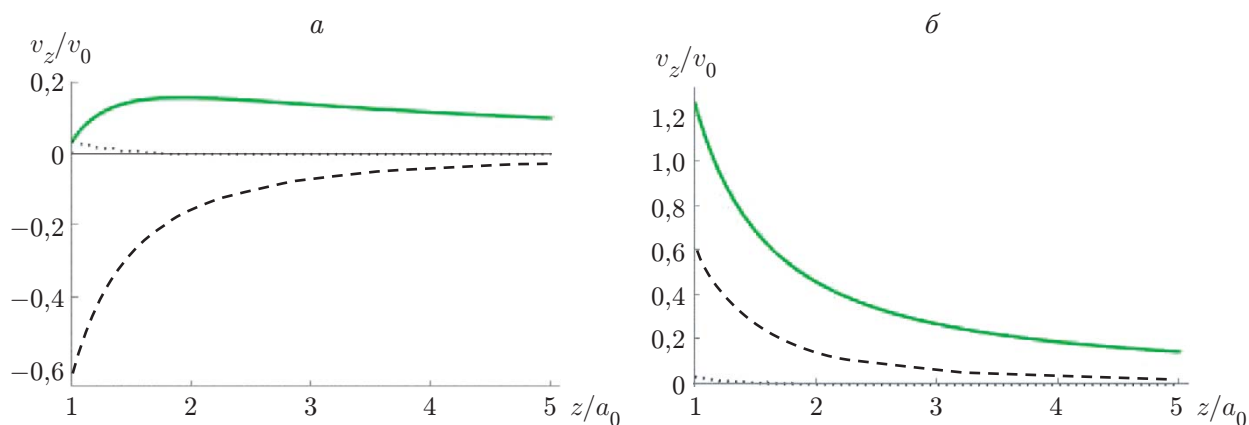


Рис. 6. Вклады ненулевого расхода на оси струи (пунктирные линии) и скрытого интеграла движения (штриховые линии) в скорость (сплошные линии) при  $\text{Re} = 2$ ,  $a_z/a_0 = 1$  (а) и  $a_z/a_0 = -1$  (б)

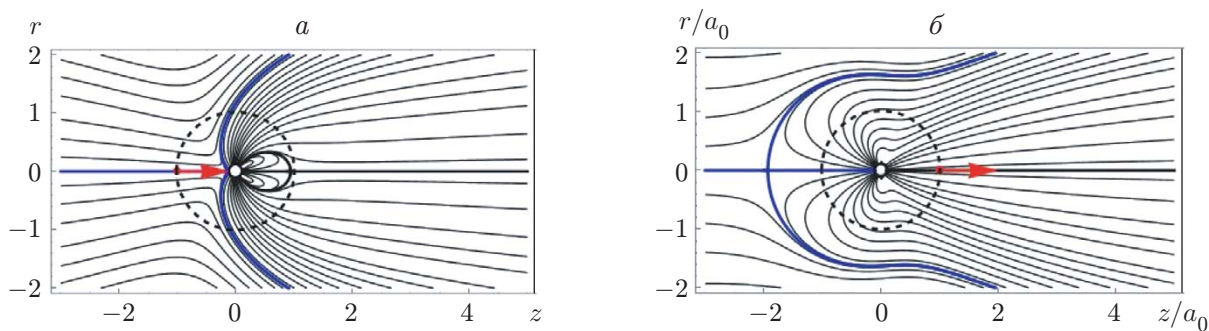


Рис. 7. Линии тока при различных положениях точки эффективного источника импульса относительно положения точки эффективного источника массы ( $\text{Re} = 2$ ): а —  $a_z/a_0 = 1$ ,  $z = -a_0$ , б —  $a_z/a_0 = -1$ ,  $z = a_0$



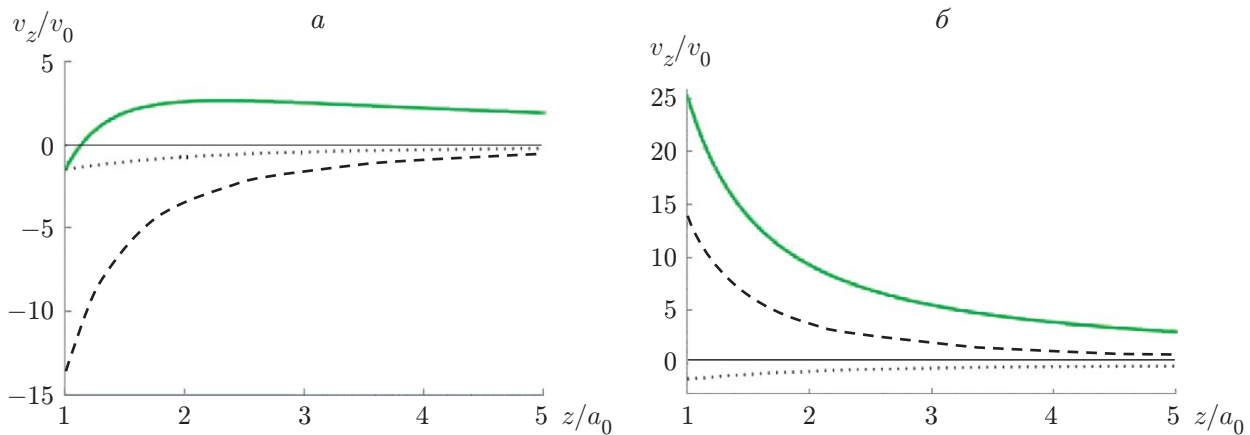


Рис. 8. Вклады ненулевого расхода (пунктирные линии) и скрытого интеграла движения (штриховые линии) в скорость на оси струи вблизи источника движения при различных положениях эффективного источника импульса ( $Re = 35$ ):  $a$  —  $z = -a_0$ ,  $a_z/a_0 = 1$ ,  $b$  —  $z = a_0$ ,  $a_z/a_0 = -1$ ; сплошные линии — скорость на оси с учетом всех членов разложения (42)

Следует отметить, что размер областей, занимаемых жидкостью, вытекающей из источника массы, с ростом числа Рейнольдса значительно увеличивается (рис. 11). Размер областей превышает 15 калибров, и они сдвигаются в область дальнего поля струи, поэтому разложение поля скорости в бесконечно удаленной точке (42), (43) адекватно описывает такие течения.

**5. Обсуждение результатов и заключение.** В работе представлены точные аналитические решения уравнений Навье — Стокса для всех главных членов разложения вектора скорости и давления в бесконечно удаленной точке, соответствующие интегралам движения: полному потоку импульса, полному потоку момента количества движения, потоку массы и скрытому интегралу движения. В дополнение к известным решениям получено точное аналитическое решение, описывающее течение с ненулевым расходом.

Выявлен физический смысл скрытого интеграла движения. Показано, что все полученные ранее аналитические решения [3, 9] для незакрученной струи с произвольно направленным моментом количества движения можно получить из автомодельного решения Слезкина — Ландау — Сквайра [6], если предположить, что положение эффективного точечного источника импульса струи не совпадает с положением эффективного точечного источника массы в струе. В этом случае естественным образом возникает момент силы  $-\mathbf{a} \times \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{a}$  — вектор смещения источника импульса относительно источника массы. Этот момент силы является интегралом движения и был получен ранее для неосесимметричной струи [9]. Данный интеграл соответствует сохраняющемуся полному потоку момента импульса  $\mathbf{L}$  (29) для незакрученной струи. При этом компонента вектора пространственного смещения вдоль вектора полного потока импульса не дает вклад в момент силы. Тем не менее наличие компоненты вектора смещения  $a_z$  в направлении силы  $\mathbf{F} = F_z \mathbf{n}_z$  порождает в жидкости дополнительное движение с интенсивностью, пропорциональной этому смещению. Дополнительное движение, в свою очередь, создает дополнительную эжекцию струи. Количественную характеристику этого движения можно определить, вычислив расход жидкости, возникающий вследствие дополнительной эжекции, через плоскость, перпендикулярную вектору полного потока импульса  $\mathbf{F}$ . Результаты расчетов показывают, что дополнительный расход не зависит от положения плоскости и пропорционален компоненте вектора пространственного смещения источника импульса  $a_z$  (30). Этот ин-

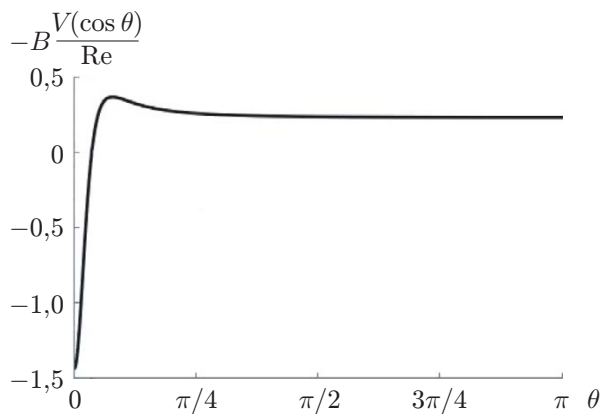


Рис. 9. Зависимость третьего слагаемого в разложении для радиальной компоненты скорости (42) от угла  $\theta$  при  $\text{Re} = 35$

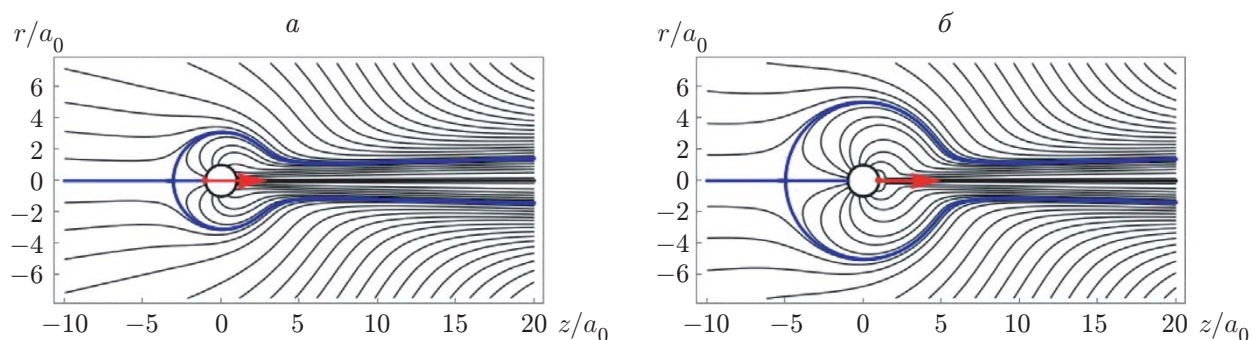


Рис. 10. Линии тока при различном положении точки эффективного источника импульса относительно положения точки эффективного источника массы ( $\text{Re} = 35$ ):  
 $a$  —  $a_z/a_0 = 1$ ,  $z = -a_0$ ,  $б$  —  $a_z/a_0 = -1$ ,  $z = a_0$

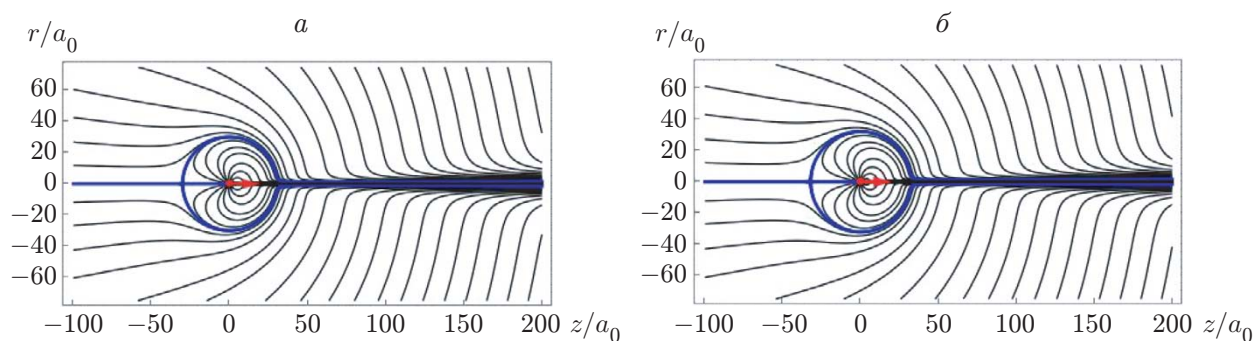


Рис. 11. Линии тока при различном положении точки эффективного источника импульса относительно положения точки эффективного источника массы ( $\text{Re} = 250$ ):  
 $a$  —  $a_z/a_0 = 1$ ,  $z = -a_0$ ,  $б$  —  $a_z/a_0 = -1$ ,  $z = a_0$

теграл сохранения аналогичен интегралу сохранения, полученному Л. Г. Лойцянским [10] в рамках приближения пограничного слоя, но неверно интерпретирован как расход жидкости от источника струи. В то же время произвольно направленный вектор смещения источника импульса  $\mathbf{a}$  обуславливает появление источника момента количества движения  $-\mathbf{a} \times \mathbf{F}$  (29). При этом компонента вектора смещения, параллельная вектору  $\mathbf{F}$ , не дает вклад в поток момента количества движения  $\mathbf{L}$ , но порождает скрытый интеграл движения  $\mathbf{a}_{\parallel}$  (32) или эквивалентный ему интеграл движения (30). Этот скрытый интеграл определяет дипольный момент  $c_0$  (28) струйного диполя, решение для которого было получено в [3], а физический смысл установлен в [6]. Наличие струйного диполя физически соответствует случаю, когда, например, имеются близко расположенные источник и сток импульса с векторами сил, параллельными вектору расстояния между ними. Для источника импульса, вытекающего из реального устройства, второй силой может оказаться сила трения, которая будет направлена против потока. Эффективные точки приложения силы, порождающей струю, и силы трения (например, на поверхности подводящей трубки) в осесимметричном случае будут находиться на оси, но в общем случае не будут совпадать. Величина смещения между точками приложения сил будет зависеть от геометрических параметров конструкции устройства, генерирующего струю. Это устройство может содержать источник массы, так же как в стандартной модели источника затопленной струи, или не содержать его, в случае если источником струи является, например, вентилятор или погружной поршневой насос. Заметим, что в случае протяженного в пространстве источника струи, не содержащего источника массы, строго говоря, не следует считать, что момент силы  $\mathbf{F}$  и скрытый интеграл движения можно обратить в нуль, если начало координат поместить в точку приложения силы  $\mathbf{F}$ . Это обусловлено тем, что моменты и диполь возникают в случае ненулевого конечного размера источника, при этом следует учитывать конкретное для каждого устройства пространственное распределение скорости, давления и соответственно сил на внутренней границе области струйного течения. В рамках приближения, рассмотренного в данной работе, можно считать, что источник массы точечный, поскольку диполь и последующие мультиполи источника массы содержатся в следующих членах разложения, которые не были учтены. Однако в общем случае нужно решать краевую задачу для внешнего разложения полей скорости и давления с соответствующими граничными условиями на замкнутой поверхности, ограничивающей область источника струи, аналогично тому как это было сделано в [7].

В данной работе в рамках стандартной модели источника затопленной струи с помощью полученного аналитического решения показано влияние скрытого интеграла движения на поле скорости неавтономной незакрученной осесимметричной струи несжимаемой вязкой жидкости. Представлены результаты расчетов при различных числах Рейнольдса и значениях безразмерного скрытого интеграла движения  $\lambda$  (см. рис. 2–11). Отмечается существенное влияние ненулевого расхода, скрытого интеграла движения и источника массы в струе вне зоны интенсивного струйного течения на картину течения.

В результате исследования получен полный набор из пяти интегралов движения неавтономной неосесимметричной затопленной струи вязкой несжимаемой жидкости, описывающих дальнее поле течения. Этот результат в совокупности с аналитическим решением уравнений Навье — Стокса для дальнего поля неавтономной струи позволяет ставить адекватные граничные условия на внешней границе расчетной области при численном решении задач о струйном течении в неограниченном пространстве, обеспечивающие сохранение всех интегралов движения. Следует отметить, что ранее было построено полное решение нелинейной задачи о затопленной струе в виде мультипольных разложений в бесконечно удаленной точке полей скорости и давления по обратным степеням сферического радиуса с показателями степени, которые являются функциями числа Рейнольдса

(см. рис. 1) [7]. Приведено доказательство сходимости этих рядов в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, в том числе для неосесимметричных и закрученных струй. В совокупности с результатами, полученными в настоящей работе, теория затопленных ламинарных струй вязкой несжимаемой жидкости, истекающих из источника конечного размера, приобрела заверченный характер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д.** Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 7. С. 299–301.
2. **Слезкин Н. А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1934. Вып. 2. С. 89–90.
3. **Румер Ю. Б.** Задача о затопленной струе // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 2. С. 255–256.
4. **Squire H. B.** The round laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4. P. 321–329.
5. **Цуккер М. С.** Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 4. С. 500–503.
6. **Гольдштик М. А., Яворский Н. И.** О затопленных струях // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 573–583.
7. **Яворский Н. И.** Теория затопленных струй и следов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1998.
8. **Kurdyumov V. N.** Far-field description of the flow produced by a source of both momentum and mass // J. Fluid Mech. 2005. V. 532. P. 191–198.
9. **Мулладжанов Р. И., Яворский Н. И.** Решение задачи об истечении неосесимметричной закрученной затопленной струи // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 46–51.
10. **Лойцянский Л. Г.** Распространение закрученной струи в безграничном пространстве // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 1. С. 3–16.
11. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
12. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 27/V 2024 г.,  
после доработки — 27/V 2024 г.  
Принята к публикации 3/VI 2024 г.*