

14. Hamilton R. L., Crosser O. K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems // Ind. and Engng Chem. Fundam.— 1962.— V. 1, N 3.
15. Garrett K. W., Rosenberg H. M. The thermal conductivity of epoxy-resin/powder composite materials // J. Phys. D. Appl. Phys.— 1974.— V. 7, N 9.
16. De Araujo F. F. T., Rosenberg H. M. The thermal conductivity of epoxy-resin/metal powder composite materials from 17 to 300 K // J. Phys. D. Appl. Phys.— 1976.— V. 9, N 4.
17. Кронкалс Г. Е., Майоров М. М., Фертман В. Е. Температурная зависимость физических свойств магнитных жидкостей // Магнитная гидродинамика.— 1984.— № 2.
18. Кронкалс Г. Е. Измерение коэффициентов теплопроводности и электропроводности феррожидкости в магнитном поле // Магнитная гидродинамика.— 1977.— № 3.
19. Фертман В. Е. Теплофизические свойства магнитных жидкостей // ИФЖ.— 1987.— Т. 53, № 3.

г. Минск

Поступила 16/VI 1989 г.

УДК 532.522

Н. Н. Лукерченко

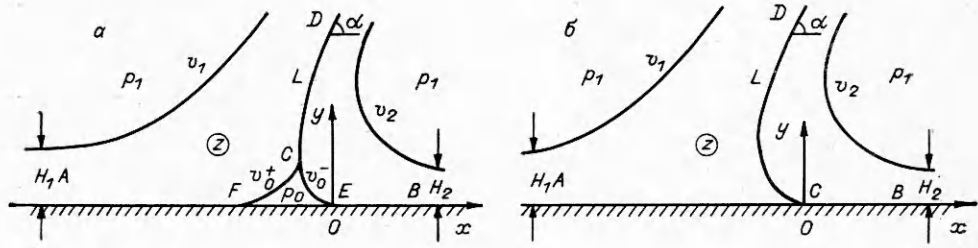
СРАВНЕНИЕ ДВУХ СХЕМ ВСТРЕЧНОГО СОУДАРЕНИЯ СТРУЙ, ИМЕЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ КОНСТАНТЫ БЕРНУЛЛИ

В [1] рассмотрена задача о соударении биметаллических пластин при сварке взрывом. Оно моделируется схемой течения двухслойных струй идеальной невесомой несжимаемой жидкости. Считается, что течение плоское стационарное. Если плотности металлов, образующих биметаллические пластины, различны, то константы Бернулли в разных слоях неодинаковы, и поэтому линии раздела слоев представляют собой линии тангенциального разрыва скорости. Возможно такое сочетание исходных параметров, определяющих течение, при котором линия тангенциального разрыва скорости — раздваивающаяся линия тока. Тогда, как следует из интеграла Бернулли, не может реализоваться классическая схема течения с критической точкой, скорость в которой по обе стороны линии раздела струй обращается в нуль. В этом случае можно рассматривать схему течения с застойной зоной (рис. 1, а), предложенную для задач с линиями тангенциального разрыва скорости Л. И. Седовым [2]. Размеры и форма застойной зоны зависят от величины заданного в ней давления p_0 , его значение может изменяться в определенных пределах.

Если константы Бернулли взаимодействующих струй одинаковы, то при стремлении p_0 к давлению торможения p_* размеры застойной зоны неограниченно уменьшаются, и она стягивается в точку. При этом схема течения с застойной зоной непрерывным образом переходит в схему течения с критической точкой. Аналогично обстоит дело и тогда, когда константы Бернулли разных струй различны.

На основании невозможности реализации при разных константах Бернулли классической схемы течения с критической точкой в [1] делается ошибочный вывод о том, что p_0 должно отличаться от p_* струи с меньшей константой Бернулли на некоторую величину, и поэтому размеры застойной зоны не могут быть меньше определенных. На самом деле, как показано ниже, при $p_0 \rightarrow p_*$ застойная зона и в случае разных констант Бернулли неограниченно уменьшается, стягиваясь в точку, а схема течения с застойной зоной переходит в схему течения с точкой заострения (возврата) граничной линии тока ACD (рис. 1, б) [3]. Изображенная картина течения имеет место, если скоростной напор струи A меньше скоростного напора струи B . В точке C линия тангенциального разрыва скорости L идет по касательной к прямолинейной границе AB , причем угол наклона линии тока $B CD$ в точке C изменяется непрерывно, а угол наклона линии тока ACD в точке C терпит скачок, равный 180° . В точке C скорость струи A обращается в нуль, а скорость струи B , имеющей большой напор, в точке C отлична от нуля.

1. Вместо течения с застойной зоной [1] изучим обращенное течение, полученное из первоначального заменой вектора скорости в каждой точке на противоположный. Тогда придем к задаче о соударении струй, текущих навстречу друг другу вдоль прямолинейной твердой стенки AB . В общем случае скоростные напоры струй могут быть различными. Такая задача решена в [4] итерационным методом, сходным с изложенным в [3]. Решение ищется путем конформных отображений комплекс-



Р и с. 1

ных потенциалов отдельных струй w^+ и w^- и функций Жуковского ω^+ и ω^- на параметрические полуплоскости t и u с соответствием точек, указанным на рис. 2, а.

Обозначим: p_1, v_1, v_2 — давление и модули скоростей на свободных линиях тока AD и BD соответственно; H_1, H_2 — ширины струй на бесконечности; ρ_1, ρ_2 — плотности жидкостей в струях; v_0^+, v_0^- — модули скорости на границах застойной зоны FC и CE ; $\omega^+ = \ln(dw^+/v_1 dz) = \ln(v^+/v_1) - i\theta^+$ и $\omega^- = \ln(dw^-/v_2 dz) = \ln(v^-/v_2) - i\theta^-$ — функции Жуковского; t_0, u_0 — координаты образов точек F и E на параметрических полуплоскостях.

Искомое решение описывается системой уравнений

$$(1.1) \quad w^+(t) = \frac{q_1}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad \frac{dw^+}{dt} = \frac{2q_1}{\pi(1-t^2)};$$

$$(1.2) \quad w^-(u) = \frac{q_2}{\pi} \ln \frac{1-u}{1+u}, \quad \frac{dw^-}{du} = -\frac{2q_2}{\pi(1-u^2)};$$

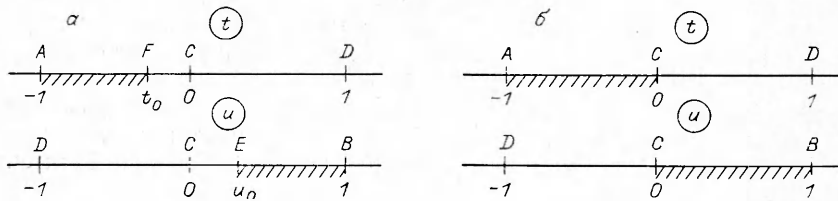
$$(1.3) \quad \omega^+(t) = \frac{1}{iu} \sqrt{\frac{t(t^2-1)}{t-t_0}} \left\{ \ln \frac{v_0^+}{v_1} \int_{t_0}^0 \sqrt{\frac{\tau-t_0}{\tau(\tau^2-1)}} \frac{d\tau}{\tau-t} + \int_0^1 \sqrt{\frac{t_0-\tau}{\tau(\tau^2-1)}} \frac{\theta(\tau) d\tau}{\tau-t} \right\};$$

$$(1.4) \quad \omega^-(u) = -\pi i + \frac{1}{\pi i} \sqrt{(u-u_0)(u-1)} \int_{-1}^{\xi} \frac{\ln \frac{v}{v_2}(\xi)}{\sqrt{(1-\xi)(u_0-\xi)}(\xi-u)} d\xi$$

(q_1, q_2 — объемные расходы струй A и B : $q_1 = v_1 H_1, q_2 = v_2 H_2$; θ — угол наклона вектора скорости к оси Ox).

Вдоль линии тангенциального разрыва скорости L ($0 < t < 1, -1 < u < 0$) имеет место

$$(1.5) \quad \ln \frac{v^+}{v_1}(t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t(1-t^2)}{t-t_0}} \left\{ \ln \frac{v_0^+}{v_1} \int_{t_0}^0 \sqrt{\frac{\tau-t_0}{\tau(\tau^2-1)}} \frac{d\tau}{\tau-t} + \right.$$



Р и с. 2

$$+ \operatorname{Re} \int_0^1 \sqrt{\frac{\tau - t_0}{\tau(1-\tau^2)}} \frac{\theta(\tau) d\tau}{\tau - t};$$

$$(1.6) \quad \theta^-(u) = \pi + \frac{1}{\pi} \sqrt{(1-u)(u_0-u)} \operatorname{Re} \int_{-1}^{u_0} \frac{\ln \frac{v^-}{v_2}(\xi)}{\sqrt{(1-\xi)(u_0-\xi)}} \frac{d\xi}{\xi - u}.$$

Постоянные t_0 и u_0 определяются из уравнений

$$(1.7) \quad \ln \frac{v_0^+}{v_1} \int_{t_0}^0 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau^2-1)}(\tau-t_0)} + \int_0^1 \frac{\theta(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau^2)}(\tau-t_0)} = 0;$$

$$(1.8) \quad \frac{H_2 v_0^+}{H_1 v_1} \int_0^{u_0} \frac{\sin \theta(\xi) d\xi}{1-\xi^2} - \frac{v_0^-}{v_2} \int_{t_0}^0 \frac{\sin \theta(\tau) d\tau}{1-\tau^2} = 0.$$

На L должны выполняться граничные условия непрерывности давления и угла наклона вектора скорости

$$(1.9) \quad \ln \frac{v^-}{v_2}(u) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_2 v_2^2} \left[\exp \left(2 \ln \frac{v^+}{v_1}(t) \right) - 1 \right] \right\};$$

$$(1.10) \quad \theta^-(u) = \theta^+(t),$$

где $t \in [0,1]$, $u \in [-1,0]$ и t и u связаны соотношением

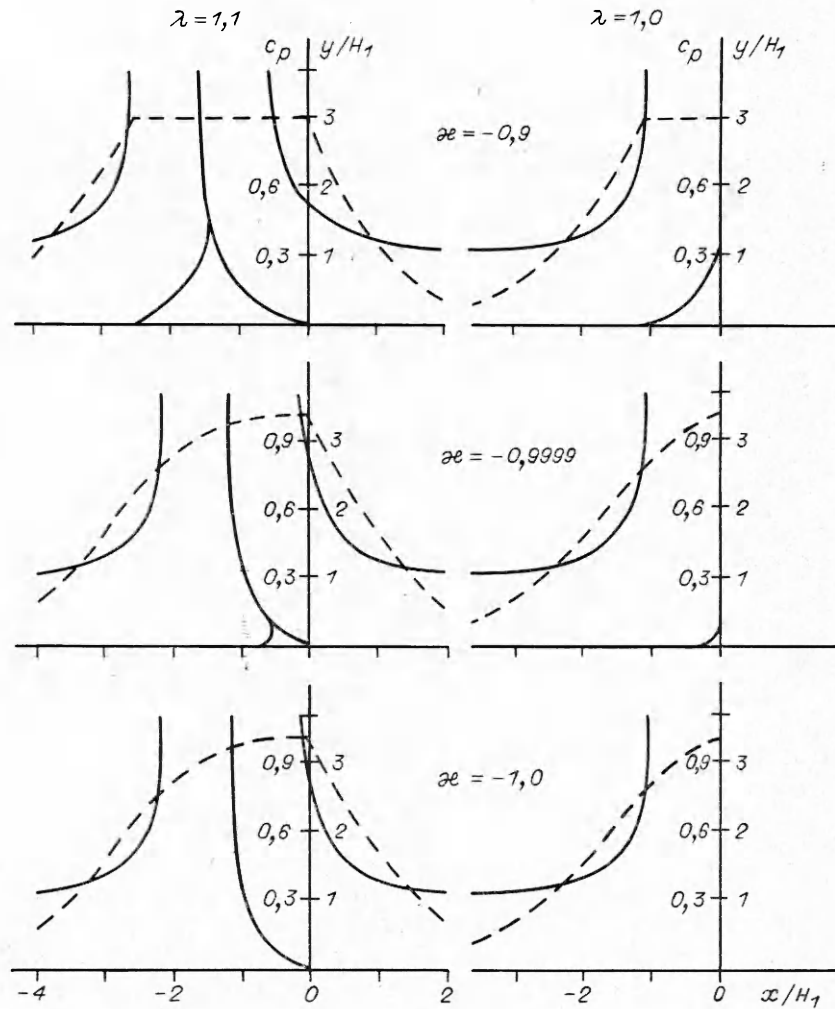
$$(1.11) \quad \frac{du}{dt} = - \frac{H_1}{H_2} \frac{1-u^2}{1-t^2} \exp \left(\ln \frac{v^-}{v_2}(u) - \ln \frac{v^+}{v_1}(t) \right).$$

Решение рассматриваемой задачи определяется тремя безразмерными параметрами: отношением ширин струй на бесконечности $h = H_2/H_1$, отношением скоростных напоров струй на бесконечности $\lambda = \rho_2 v_2^2 / \rho_1 v_1^2$ и числом $\kappa = (p_1 - p_0)/(1/2) \rho_1 v_1^2$, характеризующим p_0 . Для определенности будем считать, что $\lambda \geq 1$.

Схема течения с застойной зоной при разных скоростных напорах ($\lambda \neq 1$) так же, как и в случае одинаковых напоров ($\lambda = 1$), допускает произвол: p_0 может изменяться от p_1 на свободных линиях тока AD и BD до $p_* = p_1 + (1/2) \rho_1 v_1^2$ струи A с меньшим скоростным напором, что отвечает изменению безразмерного κ соответственно от 0 до -1 . При $\kappa \rightarrow 0$ размеры застойной зоны неограниченно увеличиваются.

Рассмотрим поведение решения при $\kappa \rightarrow -1$. На рис. 3 изображены геометрические картины течения для $h = 1$, $\lambda = 1,1$ и различных κ . Для сравнения приведены картины течения в случае $h = 1$, $\lambda = 1$ для тех же κ (расчеты проведены по формулам [5], в силу симметрии изображена половина течения, линейные размеры отнесены к ширине H_1 струи A). Пунктиром дано распределение коэффициента давления $c_p = (p - p_1)/(1/2) \rho_1 v_1^2$ вдоль твердой прямоугольной границы течения. Видно, что в обоих случаях ($\lambda = 1$ и $\lambda = 1,1$) при $\kappa \rightarrow -1$ ($p_0 \rightarrow p_*$) размеры застойной зоны неограниченно уменьшаются, и она стягивается в точку. При этом если в случае одинаковых скоростных напоров схема течения с застойной зоной переходит в схему течения с критической точкой, скорость струй в которой по обе стороны от линии раздела струй обращается в нуль, то при различных напорах она переходит в схему течения с точкой возврата (заострения) граничной линии тока.

При изменении κ в пределах от -1 до $-0,99$ (для $\lambda = 1,1$) форма свободных линий тока и линии тока ECD (см. рис. 1, a) остается практически неизменной, хотя размеры застойной зоны меняются существенно.



Р и с. 3

На рис. 4 изображены графики распределения коэффициента давления c_p вдоль линии тока ECD в зависимости от ее длины s , отсчитываемой от точки E , для различных κ (линия 1 — $\kappa = -0,9$). Для $\kappa = -1 \div -0,999$ графики совпадают (линия 2). Рис. 3, 4 показывают, что для схемы течения с точкой возврата ($\kappa = -1$, $\lambda \neq 1$) вблизи этой точки как вдоль линии тока AC , так и вдоль линии тока CD значение c_p близко к константе, равной единице, т. е. значение давления близко к значению p_* струи A , а величина модуля скорости мало отличается от нуля.

2. Покажем теперь, что при $\kappa \rightarrow -1$ система уравнений, описывающая течение по схеме с застойной зоной, переходит в систему уравнений, описывающих течение по схеме с точкой заострения.

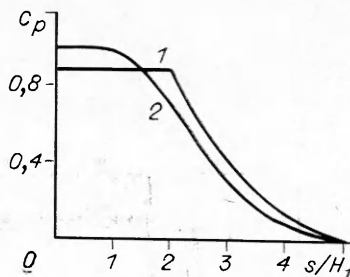
Течение с точкой заострения (см. рис. 1, б) определяется двумя безразмерными параметрами: $h = H_2/H_1$ и $\lambda = \rho_2 v_2^2 / \rho_1 v_1^2$. Ищем решение отдельно для каждой струи, считая заданным на разделяющей линии тока CD распределение давления (для струи B) или угол наклона вектора скорости (для струи A). Отображая области изменения комплексных потенциалов w^+ и w^- и функций Жуковского ω^+ и ω^- на параметрические полуплоскости t и u с соответствием точек, указанным на рис. 2, б, получим систему уравнений, описывающих рассматриваемое течение. Уравнения для отображений $w^+(t)$ и $w^-(u)$ на t и u , а также граничные условия на линии тангенциального разрыва скорости такие же, как и при течении по схеме с застойной зоной: (1.1), (1.2), (1.9) — (1.11). Остальные уравнения

имеют вид, аналогичный уравнениям (1.3) — (1.6), причем, как легко показать, получаются из последних предельным переходом при условиях $t_0 \rightarrow 0^-$, $u_0 \rightarrow 0^+$, которые равносильны условию $\kappa \rightarrow -1$.

При $\kappa \rightarrow -1$ модуль скорости v_0^+ на границе застойной зоны FC стремится к нулю, поэтому длина дуги FC также стремится к нулю, значит, $t_0 \rightarrow 0^-$. Как следует из (1.8), при этом $u_0 \rightarrow 0^+$, поэтому длина дуги CE стремится к нулю.

Таким образом, в случае разных констант Бернулли при $\kappa \rightarrow -1$ размеры застойной зоны неограниченно уменьшаются, она стягивается в точку, а схема течения с застойной зоной переходит в схему течения с точкой возврата граничной линии тока.

Автор выражает благодарность Л. И. Седову и В. П. Карликову за внимание и полезные обсуждения результатов работы.



Р и с. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Кинеловский С. А., Тришин Ю. А. Симметричное соударение двухслойных струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1980.— № 2.
2. Седов Л. И. Новые методы и новые направления механики сплошной среды // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Шурыгин В. М. Аэродинамика тел со струями.— М.: Машиностроение, 1977.
4. Лукерченко Н. Н. Соударение плоских струй, имеющих различные скоростные напоры, с образованием застойной зоны: Реферат // ПТО.— 1981.— № 6. Рукопись деп. в ЦНТИ «Поиск», № 035—2675.
5. Лукерченко Н. Н. Соударение двух струй с образованием застойной зоны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1978.— № 5.

г. Москва

Поступила 21/II 1989 г.,
в окончательном варианте — 4/V 1989 г.

УДК 539.376

А. В. Манжиров, В. А. Черныш

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОИСТОГО НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕЮЩЕГО ЦИЛИНДРА, ПОДКРЕПЛЕННОГО ЖЕСТКИМ КОЛЬЦОМ

1. Постановка задачи. Исследуем контактное взаимодействие жесткого подкрепляющего кольца с двухслойным вязкоупругим неоднородным стареющим цилиндром, находящимся под действием внешнего давления. Полагаем, что слои цилиндра изготовлены из разных материалов, в разные моменты времени. Наружный слой внутреннего радиуса a и наружного b изготовлен в момент времени τ_1 , внутренний слой толщины h — в момент τ_2 , причем h гораздо меньше характерного размера области контакта l и внутреннего радиуса двухслойного цилиндра ($a - h$). Между слоями осуществляется гладкий контакт. В момент времени τ_0 в цилиндре устанавливается с натягом δ_0 жесткое кольцо с профилем поверхности $g(z)$ и подается внешнее давление $P(t)$. Считаем, что кольцо находится на достаточном расстоянии от торцов цилиндра и их влиянием на напряженное состояние под самим кольцом можно пренебречь. Торцы закрыты жесткими заглушками, устраняющими их осевое перемещение (рис. 1).

© 1990 Манжиров А. В., Черныш В. А.