

от плоской жесткой стенки расчет дает значение температуры \bar{T}_2 , равное 400К. В то же время из данных фиг. 5 следует, что в случае $h/R = 0,9$ за фронтом отраженной волны достигается температура ~ 3500 К. При таких температурах должно произойти заметное изменение величины γ , однако характерные расстояния, на которых реализуются максимальные значения скорости волны очень малы, соответственно малы и характерные времена. Для случая $h/R = 0,9$ число Маха отраженной волны падает \sim от 8 до 4 на расстояниях порядка 1—2 мм за времена порядка 0,5—1 мкс. За такие малые времена при температурах ≤ 3500 К равновесие не успевает устанавливаться, и изменением γ можно пренебречь.

Наличие щели в теле сегмента каким-то образом возмущает течение, однако на фронте ударной волны возмущения затухают приблизительно в 10 раз на расстояниях $\sim 3\lambda$ (λ — длина волны возмущения [3]). В нашем случае λ порядка ширины щели. В описываемых экспериментах минимальное расстояние, на котором происходит скачок скорости (при $h/R = 0,9$), $x_1 = 12$ мм, что много больше ширины щели $\simeq 1$ мм. Наличие щели, если и оказывает влияние, то скорее в сторону уменьшения эффекта кумуляции.

В заключение отметим, что более специальные формы углубления в торце пробки в конце канала ударной трубы могут привести к еще большему эффекту. В частности, к усилению эффекта может привести форма поверхности сегмента, в которой осуществлялось бы схлопывание поперечной волны в форме цилиндра или в форме конуса, обращенного вершиной ко дну сегмента.

Поступила 27 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Мешков Е. Е. Отражение плоской ударной волны от жесткой вогнутой стенки. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1970, № 4, с. 33.
2. Schardin H. Ein Beispiel zur Verwendung des Stosswellenrohres für Probleme der instationären Gasdynamik. — ZAMP, 1958, Bd 9, N 5/6, S. 606—621. Рус. пер. в кн.: Ударные трубы. М., ИЛ, 1962.
3. Kovitz A. A., Briscoe M. G. Stability of a plane shock waves in free space and in the presence of rigid or interfacial boundaries. — «J. acoust. Soc. Amer.», 1969, vol. 45, N 5, p. 1157—1165.

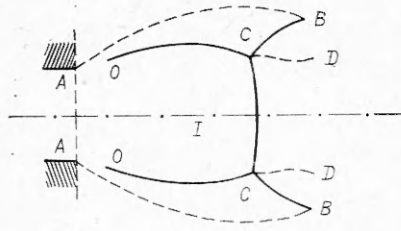
УДК 533.6.011 : 51.72

О МОДЕЛЯХ ПОТОКОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СВОЙСТВА СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Г. Дулов

(Красноярск)

1. Свободная сверхзвуковая нерасчетная струя часто является набегающим потоком или фоном для более сложных явлений и процессов (фиг. 1, где штриховые линии — контактные разрывы, сплошные — ударные волны). Поэтому простота аналитического описания таких струй



Ф и г. 1

представляет собой важное условие успешного решения проблемных вопросов более высокой степени трудности, чем сама струя. Рассмотрим следующую простейшую модель свободной струи: одномерный сверхзвуковой поток движется в канале с проницаемыми стенками. Скорость истечения через отверстия в стенках равна местной скорости звука. Увеличивая площадь отверстий, в пределе получаем одномерный поток,

в котором скорость по нормали к цилиндрической поверхности равна скорости звука. Если истечение происходит в среду с противодействием, то в некотором промежуточном сечении канала появляется ударная волна. Ее положение легко определяется и практически точно соответствует положению центрального скачка в недорасширенной струе. Простое совершенствование этой грубой модели позволяет получить хорошие количественные результаты в отношении всех основных параметров сверхзвуковой струи в области свободного расширения (область I, фиг. 1). В качестве аппроксимирующего потока рассматривается течение в канале с переменной площадью сечения и с проницаемыми стенками. В пределе роль проницаемой стенки играет одна из характеристических поверхностей, сходящих с кромки сопла, форма которой определяется с точностью до величин четвертого порядка малости относительно угла расхождения потока.

Оформим математически приведенные соображения, используя следующие обозначения: x, y — координаты в плоскости осевого сечения потока; u, v — проекции скорости на оси x, y ; w — модуль скорости; θ — угол наклона вектора скорости к оси симметрии; M — число Маха; α — угол Маха ($\sin \alpha = 1/M$); k — отношение теплоемкостей; p — давление; ρ — плотность; h — статическое теплосодержание; h_m — полное теплосодержание; S — энтропия; ψ — функция тока, уравнение состояния предполагается заданным в виде $h(p, S)$. Индексами и отмечаются параметры на границе струи, a — на срезе сопла. Все величины будем считать безразмерными: координаты отнесены к радиусу выходного сечения сопла, скорости — к величине максимальной скорости стационарного истечения в вакуум $w_m = \sqrt{2h_m}$, давление — к давлению торможения в исходном изэнтропическом течении. Уравнение Д. Бернулли при таких условиях запишется в виде $w^2 + h = 1$.

В уравнениях движения осуществим стандартный переход на плоскость переменных годографа (u, v). Для задач с осевой симметрией такой переход обычно бесполезен при исследовании точных постановок и методов, но может оказаться весьма удобным для построения приближенных решений. В уравнениях, записанных на плоскости годографа, вместо переменных u, v перейдем к переменным ξ, η при помощи соотношений

$$\xi = w^2 = 1 - h = u^2 + v^2; \quad \eta = v^2 = (1 - h) \sin^2 \theta.$$

Из уравнения Эйлера, преобразованного к указанным переменным, следует существование характеристической функции течения $\varphi(\xi, \eta)$ такой, что

$$\varphi_{\xi} = y^2/2h_p - \psi/2\sqrt{\xi - \eta}; \quad \varphi_{\eta} = \psi/2\sqrt{\xi - \eta}.$$

При любой функции φ уравнение Эйлера удовлетворено тождественно. С помощью уравнения неразрывности получаются выражения для производных от осевой координаты x по переменным ξ, η

$$(1.1) \quad x_{\xi} = \sqrt{h_p} \frac{(\xi - \eta) [\varphi_{\xi\xi} + j(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})]}{2\sqrt{2\eta(\xi - \eta)(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})}}; \quad x_{\eta} = \sqrt{h_p} \frac{\varphi_{\eta} + 2(\xi - \eta)\varphi_{\xi\eta}}{2\sqrt{2\eta(\xi - \eta)(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})}},$$

где $j = -h_{pp}/h_p^2$. Исключая перекрестным дифференцированием x из формул (1.1), получаем уравнение второго порядка в частных производных типа Монжа—Ампера с квазилинейной частью

$$(1.2) \quad 2(\xi - \eta)\eta(\varphi_{\xi\eta}^2 - \varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta}) - \eta\{2[1 - (\xi - \eta)j](\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta}) - \varphi_{\eta}\}\varphi_{\eta\eta} - \\ - 2\eta(2\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})\varphi_{\xi\eta} - [(2\xi - \eta)\varphi_{\eta} + 2\xi\varphi_{\xi}]\varphi_{\xi\xi} - 2\xi j(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})^2 - (1 - \eta j) \times \\ \times \varphi_{\eta}(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta}) = 0.$$

Это уравнение однородно относительно искомой функции, все слагаемые в нем содержат производные в виде произведения двух частных производных, причем коэффициенты при этих произведениях — полиномы по переменной η степени не выше второй. Такая структура уравнения позволяет искать решение в виде степенного ряда по переменной η . Следует ожидать, что подобное разложение эффективно, когда течение имеет преимущественно осевое направление. Введем постоянный параметр ε , характеризующий порядок угла ϑ в рассматриваемой области движения, и будем считать ε малой величиной. Очевидно, $\eta \sim \varepsilon^2$. Поэтому введем деформированную переменную $\bar{\eta}$ из соотношения $\eta = \varepsilon^2 \bar{\eta}$ и будем искать решение в виде разложения

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \varphi_k(\xi, \bar{\eta}).$$

Приравняв нулю выражения при одинаковых степенях ε в уравнении (1.2), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов φ_k . Так как ε в дальнейших рассуждениях не участвует, полагаем $\varepsilon = 1$, т. е. возвращаемся к недеформированной переменной η

$$(2\xi j - 1)(\varphi_{k\eta\eta} - (1/\eta)\varphi_{k\eta}) = F_{k-1}; \quad F_{-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

При $k > 0$ F_{k-1} в общем случае могут быть выражены через функции φ_n с меньшими индексами ($n < k$). Считаем $2\xi j \neq 1$, т. е. $M \neq 1$. Тогда находим

$$\varphi_0 = C\eta^2/2 + D,$$

где C и D — произвольные функции переменной ξ

$$\varphi_1 = [1/(2\xi j - 1)] \{4\xi(CC'' - C'^2) + (5 + 2\xi j)CC' + \\ + 3jC^2\eta^3/3 + [(1 + 2\xi j)D' + 4D''\eta]\}.$$

Здесь штрихами обозначены производные по ξ . В приближении $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^2\varphi_1$ течение описывается формулами

$$(1.3) \quad x = \int (\sqrt{h_p/8\xi})(2\xi j - 1)Cd\xi + (\sqrt{h_p/8\xi})(C + 4\xi C')\eta; \\ y^2/2 = h_p C^2 \eta + [h_p(2\xi j - 1)]\{4\xi(CC'' - C'^2) + 4(1 + \xi j)CC' + \\ + 3jC^2\eta^2 + 2(D' + 2\xi D'')\}.$$

Очевидно, $D \equiv 0$, если течение содержит ось симметрии. С помощью решения в форме (1.3) дадим математическое описание двух указанных выше моделей свободных струй.

Одномерная модель. Можно видеть, что первые слагаемые в правых частях (1.3) в точности совпадают с формулами одномерной теории стационарных течений в каналах с переменной площадью сечения. Необычно введена лишь произвольная функция $C(\xi)$, которая связана с формой канала. Для целей рассматриваемой задачи такая запись более удобна. Итак, пусть

$$(1.4) \quad x = \int (\sqrt{h_p/8\xi}) (2\xi j - 1) C d\xi; \quad y^2/2 = h_p C^2 \eta.$$

Граничные условия в одномерной модели: на характеристической поверхности $y = 1$ $\vartheta = \alpha$ (α — угол Маха), т. е. $\eta = (1 - \xi)/M^2$, и, следовательно, $C^2 = M^2/2h_p(1 - \xi)$. Для идеального газа с постоянными теплоемкостями $M^2 = [2/(k - 1)]\xi/(1 - \xi)$. Подставляя C в первую из формул (1.4) и интегрируя, получим

$$(1.5) \quad x = M/(k - 1) - [(k + 1)/(k - 1)^2] \sqrt{(k - 1)/2} \arctg(M\sqrt{(k - 1)/2}) + \text{const.}$$

Эту формулу можно использовать для описания распределения чисел Маха вдоль оси струи, хотя она дает асимптотически неверный результат при $M \rightarrow \infty$.

Ударная волна в имитирующем канале при истечении в среду с противодавлением устанавливается в том сечении, где критическое давление p_1 становится равным давлению в окружающей среде p_n , а если принять, что давления в условных отверстиях и в канале выравниваются, то за скачком давление p_2 нужно положить равным давлению в окружающей среде. Если использовать формулу (1.5), то второе предположение дает лучшее согласование с экспериментальными данными, но если используется точный закон распределения чисел Маха вдоль оси струи (например, полученный методом характеристик), то первое предположение приводит к более точным значениям координаты центрального скачка x_c . При этом x_c получаются несколько меньше истинных. При условии $p_2 = p_n$ x_c для точных $M(x)$ оказываются больше экспериментальных. Наиболее точные значения x_c получаются, если использовать приближенную формулу (1.5) с условием $p_1' = p_n$. По-видимому, здесь происходит взаимная компенсация ошибок. Для газов с постоянными теплоемкостями из условия адиабатичности и формулы для давления за прямым скачком получаем уравнения для числа Маха M непосредственно перед фронтом скачка

$$\frac{p_i}{p_a} = \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_a^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{k/(k-1)}, \quad i = 1 \text{ либо } 2.$$

По найденному M определяется координата скачка x_c .

Модель второго приближения. Для описания этой модели используем полные формулы (1.3). Воображаемая проникаемая поверхность, ограничивающая канал, является характеристикой. Вдоль нее нормальная компонента скорости равна местной скорости звука. Используем уравнения характеристик в форме

$$(1.6) \quad \begin{aligned} dy/dx &= \text{tg}(\vartheta - \alpha); \\ d\vartheta - \frac{\cos^2 \alpha}{(k-1)/2 + \sin^2 \alpha} d\alpha - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \vartheta}{\cos(\vartheta - \alpha)} \frac{dx}{y} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha \sim \vartheta$, то $h \sim \vartheta^2$ и, следовательно, h — малая величина,

квадраты которой можно не учитывать, т. е. в такой постановке имеем дело с гиперзвуковым приближением. Подставляя x, y в виде (1.3) и удерживая первые два члена разложения по h , после громоздких выкладок получаем решение в параметрической форме

$$(1.7) \quad x = x_0(h) - \frac{1}{4} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{M_0}{\sqrt{1-h_0}} \frac{4\beta(1-h) - 1}{\sqrt{1-h} e^{\beta(h_0-h)}} \eta;$$

$$x_0(h) = \frac{M_0 e^{-\beta h_0}}{\sqrt{1-h_0}} \left[\left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(1 - \frac{\beta - \frac{k}{2}}{\frac{\gamma}{2} - 1} h \right) - \left(1 - \frac{\hat{\beta} - \frac{k}{2}}{\frac{\gamma}{2} - 1} h_0 \right) \right];$$

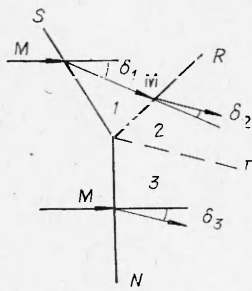
$$y = \left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{M_0}{\sqrt{1-h_0}} \frac{1 - \left(\beta - \frac{3}{4} \right)}{e^{\beta(h_0-h)}} \sqrt{\eta},$$

где $\gamma = 1/(k - 1)$; индексом 0 отмечены начальные параметры для характеристики, сходящей с кромки сопла; параметр β остается неопределенным в рассматриваемой постановке задачи и может быть использован для удовлетворения дополнительным требованием. Формулы (1.7) описывают поля параметров в области свободного расширения струи и при надлежащем подборе β хорошо согласуются с расчетами по методу характеристик. Вторая из формул дает распределение h (или чисел Маха) по оси струи. В отличие от (1.5) она имеет правильную асимптотику при $h \rightarrow 0$ ($M \rightarrow \infty$).

2. Выше были рассмотрены модели потоков, имитирующие течение в области свободного расширения струи, не зависящее от противодействия и наличия преграды. На всех остальных участках струи течение существенно определяется противодействием, а также в случае несвободного истечения в областях, примыкающих к преграде, положением и формой преграды. В частности, эти факторы влияют на характеристики волн в окрестности точки ветвления скачков (точка C на фиг. 1). Для дальнейшего важно иметь достаточно простые расчетные соотношения, характеризующие взаимное влияние параметров в вершинах угловых зон, сходящихся к тройной точке (фиг. 2).

Расчет тройных конфигураций ударных волн может быть сведен к решению довольно сложного в общем случае трансцендентного уравнения [1]. Локальное использование такой процедуры, особенно в качестве граничного условия, часто создает большие трудности. Возможно построение явного решения в окрестности тройной точки в гиперзвуковом приближении. Аналитическая запись этого решения проста, если ограничиться квадратичным разложением по двум параметрам $1/M$ и $(k - 1)$, где M — число Маха набегающего потока.

Если три образующих фронтов ударных волн сходятся в одной точке, то одна часть набегающего потока претерпевает однократное сжатие на фронте ударной волны, а другая проходит через два скачка. Результирующий эффект этих воздействий характеризуется одинаковыми увеличениями давлений. Когда все волны имеют конечную интенсивность, то в потоке с однократным сжатием волна должна быть наиболее сильной, близкой к прямому скачку. На фиг. 2 это волна N . Здесь приняты обозначения: S — падающий скачок, R — отраженный скачок, N — сильный скачок, T — контактный разрыв.



Фиг. 2

В окрестности тройной точки законы сохранения дают следующую систему уравнений:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_3 &= P(M, p_3/p); \operatorname{tg} \delta_1 = P(M, p_1/p); \\ \operatorname{tg} \delta_2 &= P(M_1, p_2/p_1); M_1^2 = R(M, p_1/p), \end{aligned}$$

где δ — угол отклонения потока на фронте ударной волны, индексы 1, 2, 3 соответствуют номерам областей на фиг. 2. Функции P и R можно считать известными, если задано уравнение состояния газа. В случае идеального газа с постоянными теплоемкостями эти функции имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P(M, z) &= \frac{z-1}{1+kM^2-z} \left(\frac{\frac{2kM^2}{k+1}}{z + \frac{k-1}{k+1}} - 1 \right)^{1/2}; \\ R(M, z) &= \frac{M^2 \left(\frac{k+1}{k-1} z + 1 \right) - \frac{2}{k-1} (z^2-1)}{z \left(z + \frac{k+1}{k-1} \right)}. \end{aligned}$$

На контактном разрыве выполняются условия

$$(2.3) \quad p_2 = p_3; \delta_3 - \delta_1 + \delta_2 = 0.$$

Так как обычно один из скачков сильный, близкий к прямому, то рациональным упрощением расчетных соотношений является линеаризация по отношению к тройной конфигурации с одним прямым скачком [2, 3].

Если скачок N прямой, то параметры в области 3 определяются независимо: $\delta_3 = 0$, p_3/p — известная функция M и k , когда задано уравнение состояния газа. Для идеального газа

$$p_3/p = [2k/(k+1)]M^2 - (k-1)/(k+1).$$

Условия (2.3) в этом случае можно переписать следующим образом:

$$(2.4) \quad -\delta_1 + \delta_2 = 0;$$

$$(2.5) \quad p_1/p = (p_3/p)p_1/p_2.$$

Подставляя в соотношение (2.4) соответствующие выражения для углов отклонения потока на фронтах ударных волн, получаем

$$\operatorname{arctg} P(M, p_1/p) - \operatorname{arctg} P(M_1, p_2/p_1) = 0.$$

Совместно с последним соотношением системы (2.1) и условием (2.5) это выражение дает в общем случае трансцендентное уравнение для давления p_1 между фронтами разветвленных ударных волн S и R (см. фиг. 2). Для идеального газа с постоянными теплоемкостями уравнение будет алгебраическим и примет вид

$$(2.6) \quad \sum_{n=0}^6 K_n(M, k) \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^n = 0.$$

Для больших чисел M можно найти его приближенное решение в виде полинома по степеням $1/M$

$$(2.7) \quad p_1/p_2 = a + b/M + c/M^2.$$

Сохраняя в разложении коэффициентов k_n величины вплоть до второго порядка малости, после несложных преобразований получаем

$$(2.8) \quad \sum_{n=0}^4 \left(a_n + \frac{c_n}{M^2} \right) \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^n = 0,$$

где коэффициенты a_n и c_n зависят только от отношения теплоемкостей. Уравнение (2.8) получено после сокращения промежуточного соотношения на $(p_1/p_2)^2$, что исключает двойной корень $p_1/p_2 = 0$ уравнения (2.6). Подставляя (2.7) в (2.8), снова отбрасываем члены высших порядков малости, а оставшиеся собираем по степеням $1/M$. Приравнявая нулю коэффициенты при степенях $1/M$ для нахождения a , b , c , входящих в формулу (2.7), получаем следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^4 a_n a^{n-1} = 0; \quad b = 0; \quad c = - \frac{\sum_{n=0}^4 c_n a^n}{\sum_{n=1}^4 a_n a^{n-1}}.$$

Ради простоты конечных соотношений a и c ищем в виде степенных разложений по величине $(k-1)$ с сохранением первых трех членов. В результате находим

$$(2.9) \quad a = 0,25(k-1) - 0,5(k-1)^2; \quad c = [4 + 2(k-1) - 7(k-1)^2]/2(k-1).$$

В струйной тройной конфигурации ударных волн предполагаем, что угол δ_3 мал (скачок N близок к прямому) и параметры течения между фронтами скачков мало отличаются от соответствующих параметров в конфигурации с одним прямым скачком; тогда

$$p_1 = p_{10} + \Delta p_1; \quad p_2 = p_{20} + \Delta p_2; \quad M_1 = M_{10} + \Delta M_1; \\ \delta_2 = \delta_0 + \Delta \delta_2; \quad \delta_1 = \delta_0 + \Delta \delta_1 (\delta_{20} = \delta_{10} = \delta_0).$$

Для производных от функций (2.2) введем следующие обозначения:

$$(2.10) \quad P_1(M, z) = \frac{\partial P}{\partial (M^2)} = \frac{k^2}{k+1} \frac{P(z+1-M^2)}{(1+kM^2-z) \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - z - \frac{k-1}{k+1} \right)}, \\ P_2(M, z) = \frac{\partial P}{\partial z} = P \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1+kM^2-z} - \frac{0,5}{z + \frac{k-1}{k+1}} - \frac{0,5}{\frac{2k}{k+1} M^2 - z - \frac{k-1}{k+1}} \right); \\ R_2(M, z) = \frac{\partial R}{\partial z} = - \frac{\left(M^2 + \frac{2}{k-1} \right) \left[\frac{k+1}{k-1} (z^2+1) + 2z \right]}{z^2 \left(z + \frac{k+1}{k-1} \right)^2}.$$

С точностью до малых величин первого порядка из второго условия (2.3) находим

$$(2.11) \quad \Delta p_1/p = \gamma \delta,$$

где γ — функция от M и k , определяемая из расчета тройной конфигурации с одним прямым скачком уплотнения

$$(2.12) \quad \gamma = \left\{ \cos^2 \delta_0 \left[P_2 \left(M, \frac{p_{10}}{p} \right) - P \left(M_{10}, \frac{\bar{p}}{p_{10}} \right) R_2 \left(M, \frac{\bar{p}_{10}}{\bar{p}} \right) \right] + P_2 \left(M_{10}, \frac{p_{20}}{p_{10}} \right) \left(\frac{p}{p_{10}} \right)^2 \frac{p_{20}}{p} \right\}^{-1};$$

P_1, P_2, R_2 вычисляются по формулам (2.10) подстановкой соответствующих M и z . Можно существенно продвинуться в сторону меньших значений M , если в формуле (2.7) сохранить линейный член по $1/M$ и коэффициенты a, b, c определить подбором, аппроксимируя результаты точных расчетов. Рекомендуются следующие зависимости:

$$\begin{aligned} a &= -0,0175 + 0,3793(k-1) - 0,1727(k-1)^2; \\ b &= 1,2382 - 1,2579(k-1) + 0,3813(k-1)^2; \\ c &= -0,4044 + 0,2830(k-1) + 0,0324(k-1)^2. \end{aligned}$$

Если p_1/p_2 определяется соотношением (2.7), то можно получить простую зависимость для γ . После подстановки выражений для величин, входящих в правую часть (2.12), произведем разложение по $1/M$ с сохранением первых трех членов. В результате для величины γ/M^2 получим соотношение, аналогичное (2.7). Отсюда следует, что

$$\gamma = A + BM + CM^2,$$

где A, B, C зависят только от k . Эти коэффициенты хорошо аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned} A &= -1,7901 + 13,2841(k-1) - 13,2702(k-1)^2; \\ B &= 1,6318 - 10,3203(k-1) + 9,8089(k-1)^2; \\ C &= 0,1315 + 2,3768(k-1) - 1,6327(k-1)^2. \end{aligned}$$

Результаты расчетов произвольной тройной конфигурации ударных волн по изложенному приближенному способу удовлетворительно согласуются с результатами точного расчета при значениях δ_3 до $10 - 12^\circ$. Расхождение относительных давлений менее 8% при $M > 2$.

Применение приведенных приближенных зависимостей сводит расчет параметров в тройных конфигурациях ударных волн к выполнению элементарных вычислений.

3. Резко выраженный неоднородный характер носят явления в окрестности границы струи, вблизи от фронта висячего скачка по обе его стороны, в зоне ветвления скачков. Для приближенного аналитического описания течений в этих областях можно рекомендовать следующий прием, апробированный многочисленными сравнениями с результатами расчетов и данными экспериментов в широком диапазоне исходных параметров [4].

Предположим, что известно n -параметрическое семейство кривых $f(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ такое, что при любом режиме истечения может быть выбрана кривая этого семейства, достаточно хорошо аппроксимирующая границу струи, т. е. вопрос о нахождении границы сводится к определению n значений параметров a_i для конкретных условий истечения. Если для наглядности границу струи уподобить твердой стенке, то висячий скачок можно трактовать как головную волну, возникающую при обтекании вогнутой поверхности сверхзвуковым потоком. Чем больше числа Маха в этом потоке, тем ближе такая волна подходит к обтекаемой поверхности. На этом основании некоторыми авторами использовалась

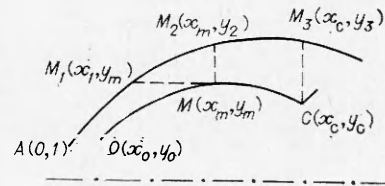
предельная гиперзвуковая аппроксимация: предполагалось, что висячий скачок совпадает с границей струи. При конечных, но больших числах Маха перед висячим скачком его образующая по форме мало отличается от линии, изображающей границу, и геометрически может быть получена из нее путем относительно небольшой деформации. Такую деформацию аналитически приближенно можно произвести за счет изменения параметров в структурной зависимости, определяющей форму границы струи, т. е. задача определения формы висячего скачка сводится к выбору конкретной кривой из того же n -параметрического семейства $f(x, y, b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$. Здесь для отделения второй процедуры выбора от первой свободные параметры семейства обозначены через $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Число $2n$ равно числу условий, которые удастся сформулировать достаточно просто для границы и висячего скачка.

Перейдем к возможным формулировкам этих условий. Часть из них удастся поставить точно и просто, другие поддаются лишь более или менее приближенному описанию. Выше уже был рассмотрен приближенный прием для нахождения положения центрального скачка уплотнения. Существует немало других приближенных и полуэмпирических способов определения этой величины с хорошей точностью. Ниже будем считать координату x_c известной. Диаметр центрального скачка (координата y_c) значительно труднее поддается вычислению. По существу, нет надежных способов нахождения этой величины. Поэтому далее будем считать y_c неизвестным наряду с параметрами, определяющими границу и дугу скачка. Пока предположим, что удалось рассчитать все параметры течения в окрестности точки ветвления фронтов ударных волн.

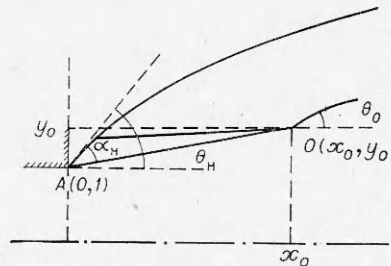
Висячий скачок зарождается во внутренних точках потока в виде волны нулевой интенсивности как результат пересечения отраженных от границы характеристик. На некотором участке его можно считать совпадающим с огибающей указанных характеристик, причем, поскольку начальный радиус кривизны границы отличен от нуля [5], пересекаются уже первые отраженные характеристики. Исходя из этих соображений, можно найти точку зарождения висячего скачка и его начальный угол наклона. Таким образом, имеется возможность поставить следующие пять очевидных условий, которым должны удовлетворять уравнения образующих границы и скачка: 1) граница проходит через точку $(0, 1)$; 2) ее угол наклона в этой точке равен θ_n ; 3) известен угол наклона скачка при $x = x_c$; 4) могут быть вычислены координаты точки зарождения висячего скачка (x_0, y_0) ; 5) поддается определению начальный угол наклона висячего скачка.

Наконец, применяя интегрально закон сохранения массы до сечения, в котором расположен центральный скачок (см. фиг. 1), при некоторых упрощающих предположениях можно определить радиус границы в этом сечении (координату y_3). Этот результат используется в качестве условия 6.

Еще два приближенных условия могут быть получены из рассмотрения течения в окрестности точки M (фиг. 3), где касательная к образующей висячего скачка параллельна оси симметрии. Будем счи-



Фиг. 3



Фиг. 4

тать, что на участке OM ударная волна еще настолько слаба, что ее фронт практически не отличается от огибающей семейства отраженных от границы характеристик, которые сами прямолинейны. Тогда характеристика, приходящая от границы в точку M , совпадает с касательной к висячему скачку в этой точке и, следовательно, параллельна оси симметрии. Отсюда следует условие 7: ордината точки $M(y_m)$ равна ординате той точки на границе, в которой угол наклона касательной равен известному углу Маха α_n . И, наконец, условие 8: массовые расходы газа через отрезки M_1M и MM_2 равны (см. фиг. 3). Расход через сечение MM_2 может быть определен в том же приближении, что и через сечение SM_3 , а вдоль прямолинейной характеристики M_1M распределение всех параметров известно, в частности, может быть вычислен массовый расход.

Рассмотрим два варианта решения задачи: с учетом условий 7, 8 и без учета этих условий. В первом случае можно выбирать четырехпараметрические семейства кривых для аппроксимации границы и висячего скачка ($n = 4$), во втором случае — трехпараметрические ($n = 3$).

Приступим к конкретной реализации намеченной схемы. Запись первых трех условий очевидна. Рассмотрим в указанном выше порядке сформулированные условия, начиная с четвертого.

Условие 4. Координаты (x_0, y_0) точки могут быть выражены через радиус кривизны R_n начального элемента границы струи в предположении, что вплоть до точки пересечения характеристики практически прямолинейны (фиг. 4).

Простую приближенную формулу для R_n можно получить из уравнения движения в проекции на нормаль к линии тока с учетом уравнения неразрывности

$$\rho w^2/R = -\partial p/\partial n, \quad \partial\theta/\partial n + (1/\rho w)\partial\rho w/\partial s = -\sin\theta/y,$$

где R — местный радиус кривизны; s и n — расстояния вдоль линии тока и по нормали к ней. Так как вдоль границы $\rho w = \text{const}$, из последних уравнений получим

$$\rho w^2/R = (\sin\theta/y)\partial p/\partial\theta.$$

Производная $\partial p/\partial\theta$ вычисляется вдоль нормали к границе. Изменение давления в элементарной волне сжатия, отраженной от границы, вычислим приближенно по плоской теории малых возмущений. Течение в окрестности границы безвихревое, поэтому

$$dp \approx (\rho w^2/\sqrt{M^2 - 1})d\theta.$$

Таким образом,

$$(3.1) \quad R_n = \frac{\sqrt{M_n^2 - 1}}{\sin\theta_n} = \frac{\text{ctg}\alpha_n}{\sin\theta_n},$$

где α_n — угол Маха; θ_n — начальный угол наклона образующей границы к оси струи. Приближенная формула (3.1) дает вполне удовлетворительное согласование с результатами точных вычислений [5]. Согласно (3.1) и фиг. 4, координаты точки зарождения висячего скачка определяются по формулам

$$x_0 = (\cos\alpha_n/\sin\theta_n)\cos(\theta_n - \alpha_n); \quad y_0 = 1 + (\cos\alpha_n/\sin\theta_n)\sin(\theta_n - \alpha_n).$$

Условие 5. Параметры в окрестности тройной точки обладают большой чувствительностью к изменению величины начального угла наклона

θ_0 висячего скачка к оси струи. Дуга висячего скачка имеет значительную протяженность, поэтому малые погрешности в определении угла θ_0 могут быть источником значительных ошибок в конце этой дуги. Вычислим величину приращения характеристического угла $(\theta - \alpha)$ при смещении вдоль последней характеристики, сходящей с острой кромки сопла. В окрестности этой кромки производные газодинамических величин вдоль характеристик первого семейства в области волны разрежения по абсолютной величине гораздо больше тех же величин в направлении характеристик второго семейства. Поэтому соотношение совместности вдоль характеристик первого семейства выполняется приближенно по всем направлениям в той же форме, что и для плоских течений

$$(3.2) \quad d\theta + \{\cos^2\alpha / [(k-1)/2 + \sin^2\alpha]\} d\alpha = 0.$$

В частности, это соотношение справедливо вдоль начального элемента граничной характеристики, на которой выполняется точное соотношение для характеристик второго семейства

$$(3.3) \quad d\theta - \{\cos^2\alpha / [(k-1)/2 + \sin^2\alpha]\} d\alpha - \sin\alpha \sin\theta dl = 0,$$

где dl — элемент смещения вдоль указанной характеристики. Из (3.2), (3.3) следует, что

$$d(\theta - \alpha)/dl = [(k+1)/4] \sin\alpha \cdot \sin\theta / \cos^2\alpha.$$

Последняя формула дает возможность ввести линейную поправку к величине угла

$$\theta_0 = \theta_n - \alpha_n + [d(\theta - \alpha)/dl]_n l = \theta_n - \alpha_n + [(k+1)/4] \operatorname{tg}\alpha_n.$$

Приведенные расчеты показали, что учет такой поправки является одной из основных предпосылок повышения точности определения параметров конфигурации ударных волн в струе.

Условие 6. Расход массы газа через кольцевое сечение CM_3 (см. фиг. 3)

$$(3.4) \quad Q = 2\pi \int_{y_c}^{y_3} \rho u y dy,$$

где u — осевая составляющая скорости. В области между границей и висячим скачком нет резких пиков газодинамических параметров, поперек области все величины меняются достаточно плавно. Плотность потока массы ρu в сечении CM_3 аппроксимируем линейной функцией по y . Индексом 1 отметим параметры в точке C между фронтами разветвленных скачков. В таких предположениях

$$\rho u \approx \rho_1 u_1 + [(\rho_n u_n - \rho_1 u_1) / (y_3 - y_c)] (y - y_c).$$

После вычисления интеграла в (3.4) результат приводится к виду $Q = 2\pi \times [\rho_1 u_1 (y_3 + y_c) + (\rho_n u_n - \rho_1 u_1) (y_c + 2y_3) / 3] (y_3 - y_c)$. Расход Q равен расходу в струе за вычетом расхода газа, проходящего сквозь центральный скачок. Поскольку рассматриваемое сечение обычно располагается вблизи от максимального сечения струи, угол наклона границы к оси струи в точке M_3 — величина малая и по крайней мере для u_n можно положить $u_n = w_n \cos\theta_n \approx w_n$.

Условия 7 и 8. Вдоль характеристики второго семейства M_1M нужно положить $y = \text{const} = y_m$, а следовательно, $\theta \equiv \alpha$, где α — угол Маха

($\sin \alpha = 1/M$). Выбирая в качестве аргумента число Маха M , из (1.6) получаем

$$dx/dM = \{2 + [(k-3)/2]M^2\} / \{1 + [(k-1)/2]M^2\} = 1/K.$$

Дальнейшие выкладки могут быть выполнены точно, однако получаются неоправданно громоздкими. Без существенной потери точности можно использовать приближенные записи

$$K \approx \text{const} = K_n; \rho a \approx \rho_n a_n [1 + (d \ln \rho a / dM)_n (M - M_n)]; \\ M - M_n \approx K_n (x - x_c)$$

вдоль характеристики $M_1 M$ (a — скорость звука),

$$\rho u \approx \rho_n u_n [1 - (d \ln \rho u / dy)_n (y - y_2)]$$

на линии MM_2 . Подставляя эти выражения в равенство расходов (на $M_1 M$ $v \equiv a$), после простых преобразований получаем уравнение, связывающее координаты точек на двух искомым кривых

$$2[1 + (d \ln \sqrt{\rho a} / dM)_n K_n (x_m - x_1)] (x_m - x_1) = \\ = M_n (y_2 - y_m) [y_2 - y_m - (d \ln w / dM)_n K_n (x_m - x_1) (y_2 - 2y_m) / 3],$$

Относительно выбора параметрических семейств кривых, аппроксимирующих границу и дугу висячего скачка, укажем следующие рекомендации.

В случае четырехпараметрической задачи в качестве априорной информации можно взять тот факт, что границу часто удается вполне удовлетворительно изобразить дугой окружности, т. е. вдоль границы кривизна должна быть слабоменяющейся функцией длины дуги или координаты, например, y . Эту функцию в первом приближении можно представить в виде линейной зависимости $a_1 - a_2^2 y$. С другой стороны, для относительно малых углов кривизну приближенно будем считать равной $d^2 y / dx^2$. Тогда получаем уравнение

$$d^2 y / dx^2 = a_1 - a_2^2 y,$$

общий интеграл которого

$$(3.5) \quad y = a_3 \sin(a_2 x + a_4) + a_1 / a_2^2$$

дает четырехпараметрическое представление границы (a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные параметры). Кривые семейства (3.5) могут хорошо аппроксимировать границу и скачок практически на любом режиме истечения. Однако подстановка функции (3.5) в сформулированные выше восемь условий приводит к весьма сложной системе трансцендентных уравнений. Для быстрых ориентировочных расчетов лучше использовать трехпараметрическую модель. В случае трехпараметрической задачи структурная формула для семейства кривых сразу же получается из решения в околоосевом приближении в форме (1.3), из которого следует, что все изобары и граница, в частности, описываются уравнением кривых второго порядка в виде

$$(3.6) \quad y = \sqrt{a_1 + a_2 x + a_3 x^2},$$

т. е. граница и фронт волны в этом приближении аппроксимируются дугами эллипсов.

Рассмотрим специально вопрос об определении радиуса центрального скачка y_c . Ради простоты конечного результата остановимся на случае трехпараметрической аппроксимации вида (3.6).

В струйном течении всегда существует тенденция к выравниванию потока в направлении оси струи. Уже за первой системой скачков углы наклона вектора скорости к оси струи становятся малыми. Этим свойством обладает и контактный разрыв, сходящийся с контура центрального скачка, который в первом приближении можно рассматривать как прямой скачок уплотнения. Тогда начальный угол наклона контактного разрыва равен нулю, а поток перед фронтом скачка можно считать одномерным.

В качестве второго приближения представим следующую схему: вектор скорости w перед тройной точкой C образует с осью симметрии малый угол ε , угол падающего скачка с этим вектором изменяется на малую величину $\Delta\omega$, центральный скачок искривляется, а начальный элемент контактного разрыва остается параллельным оси. Следовательно, во втором приближении $\varepsilon - \delta_1 + \delta_2 = 0$, где δ_1 и δ_2 — углы разворота потока на падающем и отраженном скачках соответственно.

Воспользуемся полученной выше формулой (2.11). Тогда

$$(3.7) \quad \Delta p_1/p = \gamma(M)\varepsilon, \quad \Delta\omega = (k+1)\gamma(M)\varepsilon/2kM^2\sin 2\omega.$$

В трубке тока, проходящей через контур центрального скачка, течение перед последним полагаем одномерным. Поэтому

$$(3.8) \quad \varepsilon \approx dy/dx = (d \ln y/dM)(dM/dx)y = [\beta(M)/\eta(M)]y,$$

где

$$\beta(M) = [\eta(M)/2x^1(M)]d \ln q(M)/dM;$$

$$\eta(M) = 1 - (k+1)\gamma(M)/2kM^2\sin 2\omega.$$

Здесь $q(M)$ — табличная газодинамическая расходная функция; $x(M)$ — функция, характеризующая распределение чисел Маха вдоль оси струи. На основании (3.7), (3.8)

$$\theta_c = \omega + \Delta\theta = \omega - \beta y_c.$$

Подставляя значение θ_c в условия 3—5, найдем радиус центрального скачка уплотнения

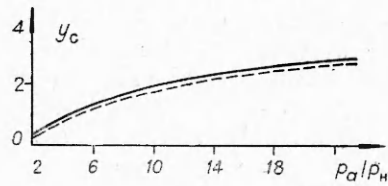
$$(3.9) \quad y_c = \frac{1}{2} \left(1 - \beta \frac{x_c - x_0}{\cos^2 \omega} \right)^{-1} \left\{ \left[(x_c - x_0)^2 \operatorname{tg}^2 \omega + 4y_0 \left(1 - \beta \frac{x_c - x_0}{\cos^2 \omega} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_0 + (x_c - x_0) \operatorname{tg} \theta_0) \right]^{1/2} - (x_c - x_0) \operatorname{tg} \omega \right\}.$$

Были проведены многочисленные расчеты конфигураций ударных волн для недорасширенных струй в широких диапазонах значений исходных параметров. Результаты расчетов сравнивались с опубликованными данными численных расчетов и экспериментальных замеров. На фиг. 5 приведено сравнение расчета по формуле (3.9) с данными экспериментов [5] (сплошная и штриховая кривые соответственно) при $M_a = 1,5$, $k = 1,4$.

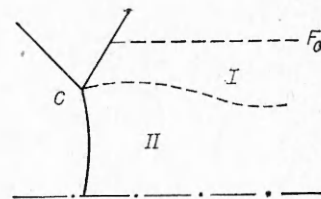
Аналогичные результаты получены для других значений исходных параметров

$$1 \leq M_a \leq 5, \quad 2 \leq p_a/p_n \leq 100.$$

Проведенная оценка влияния возможных допущений на величину радиуса центрального скачка показала, что замена его прямым скачком ($\beta = 0$) вносит ошибку в значение y_c порядка 20—30%. Смещение точки



Ф и г. 5



Ф и г. 6

зарождения висячего скачка на кромку сопла изменяет значение y_c на 30—40%. Но наибольшая погрешность связана с определением начального угла наклона висячего скачка: приравнивание θ_0 углу $\hat{v}_n - \alpha_n$ изменяет y_c на 50—70%. При этом указанные ошибки могут проявляться в одном направлении, т. е. не компенсируют друг друга.

4. Ради полноты рассмотрения вопроса о свободной струе остановимся на возможном способе описания течения в струйке газа, прошедшей через центральный скачок уплотнения, в частности определения формы контактного разрыва.

Пусть существует некоторая трубка тока с площадью поперечного сечения $F_0 \approx \text{const}$ (фиг. 6) такая, что на ее границе течение практически уже не зависит от формы контактного разрыва. Будем считать образующие этой поверхности прямолинейными и параллельными оси симметрии струи. Течение в трубке тока разобьем на две части: одномерное течение внутри трубки тока, опирающейся на контур центрального скачка (область II на фиг. 6), и внешнее сверхзвуковое течение в кольцевой области I, где одномерное описание движения оказывается недостаточным. Если f — площадь поперечного сечения области II, то изменение давления вдоль контактного разрыва со стороны этой области запишем в виде

$$dp_2 = (dp/df)df.$$

Изменение давления со стороны сверхзвуковой области I определяется двумя причинами: во-первых, при каждом повороте границы на малый угол $d\theta$ от границы отходят элементарные волны сжатия или разрежения в соответствии с направлением поворота, во-вторых, происходит эффективное расширение или сжатие всего потока вследствие изменения площади поперечного сечения кольцевой трубки тока. Эти эффекты могут проявляться как в одном, так и в противоположном направлении. Результирующее изменение давления со стороны внешнего потока представим в виде

$$dp_1 = (\partial p/\partial F)dF + (\partial p/\partial \theta)d\theta.$$

Условия непрерывности давления на контактной поверхности $dp_1 = dp_2$ можно записать в виде

$$(4.1) \quad (dp/df)df = (\partial p/\partial F)dF + (\partial p/\partial \theta)d\theta.$$

По одномерной теории

$$\frac{dp}{df} = -\frac{1}{f} \frac{k p M_2^2}{M_2^2 - 1}, \quad \frac{\partial p}{\partial F} = -\frac{1}{F} \frac{k p M_1^2}{M_1^2 - 1}.$$

По теории простых волн

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{k M_1^2 p}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Очевидно,

$$f = \pi y^2; F = F_0 - f.$$

После указанных подстановок равенство (4.1) принимает вид

$$(4.2) \quad d\theta + \left(\frac{\ddot{y}}{F_0 - f} \frac{2\pi}{\sqrt{M_c^2 - 1}} + \frac{\sqrt{M_2^2 - 1}}{M_1^2 - 1} \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{2}{y} \right) dy = 0.$$

Радиус трубки тока II представляет собой относительно мало меняющуюся величину. Поэтому первое слагаемое в скобке является конечной почти постоянной величиной. Второе слагаемое может неограниченно расти при $M_2 \rightarrow 1$, но в сечениях, где M_2 значительно меньше единицы, это слагаемое намного меньше первого, поскольку величина $M_2^2/M_1^2 \ll 1$. Таким образом, вклад второго слагаемого нужно учитывать лишь вблизи от критического сечения, т. е. M_2 во втором слагаемом можно заменить его асимптотическим выражением при $M_2 \rightarrow 1$, которое следует из дифференциального соотношения между площадью сечения и числом Маха в одномерном потоке.

$$(4.3) \quad \frac{df}{f} = \frac{M_2^2 - 1}{M_2 \left(1 - \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)} dM_2.$$

Отсюда при $M_2 \rightarrow 1$ получаем

$$(y - y_*)/y \approx [2/(k+1)](M_2 - 1)^2,$$

где y_* — радиус критического сечения

$$\frac{y_*}{y_c} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_{2c}^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{(k+1)/4(k-1)},$$

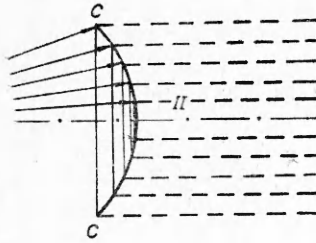
M_{2c} — число Маха за центральным скачком. Введем обозначение $\eta = (y - y_*)/y_*$. Тогда $M_2 \approx 1 \mp \sqrt{[(k+1)/2]\eta}$ (знак — следует брать для дозвукового участка струйки, + для сверхзвукового). Согласно сказанному выше, на всем дозвуковом участке в уравнении (4.2) можно положить $M_1 - 1 \approx \sqrt{[(k+1)/2]\eta}$. После интегрирования с условием $\theta = 0$ при $\eta = 0$ (в критическом сечении) получаем

$$(4.4) \quad \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{M_{2c}^2 - 1}}{\sqrt{k+1}} \frac{2\sqrt{2}}{y_c} - \frac{y_c}{F_0 - f} \frac{\pi \sqrt{\eta}}{\sqrt{M_{2c}^2 - 1}} \right) y_* \sqrt{\eta}$$

(в скобках маломеняющиеся величины заменены их значениями в начальном сечении). Из (4.4) следует, что $\theta = 0$ (кроме минимального сечения) и в сечении, где

$$\sqrt{\eta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}} \frac{M_{2c}^2 - 1}{\pi y_c M_{2c}^2} (F_0 - f).$$

Здесь, очевидно, имеет место максимум площади сечения струйки. Однако по последней формуле радиус этого сечения пока определить нельзя,



Ф и г. 7

так как F_0 — неизвестная константа. Для ее определения в (4.4) нужно знать начальное значение угла наклона контактного разрыва ϑ_c , а выше $\vartheta_c = 0$. Можно определить эту величину более точно в рамках принятой схемы рассуждений. Поясним эту возможность, не вдаваясь в детали, поскольку ϑ_c для свободной струи в дальнейшем интереса не представляет.

Центральный скачок в свободной струе — криволинейная поверхность, обращенная выпуклостью вниз по потоку (фиг. 7). Уже отмеча-

лась тенденция в струе к выравниванию направлений скоростей вдоль оси симметрии. Если принять, что выравнивание за центральным скачком достигается полностью, то течение в *II* будет представлять собой изобарический вихревой поток, параллельный оси. Угол поворота потока на фронте волны в каждой точке фронта тогда равен наклону вектора скорости ϑ к оси перед фронтом, т. е.

$$(4.5) \quad \vartheta \approx \frac{\frac{p_2}{p} - 1}{1 + kM^2 - \frac{p_2}{p}} \sqrt{\frac{\frac{2k}{k+1} M^2}{\frac{p_2}{p} + \frac{k-1}{k+1}} - 1}$$

по известной формуле для ударных волн (2.1). Здесь тангенс заменен аргументом; p_2 — постоянное давление за фронтом; p — переменное давление в неравномерном потоке перед фронтом, которое является известной функцией от M (изэнтропическая связь), т. е. в силу (4.5) $\vartheta = \Theta(M)$, где Θ — известная функция. Течение перед фронтом скачка рассмотрим в одномерном приближении. Тогда

$$\vartheta = dy/dx = (y/2)(d \ln f/dM)dM/dx.$$

В одномерном потоке $d \ln f/dM$ — известная функция M , т. е. $(1/2)d \ln f/dM = \varphi(M)$. Из двух последних равенств

$$(4.6) \quad dM/dx = \Theta(M)/y\varphi(M).$$

Пусть $\partial y/\partial x$ — производная вдоль фронта волны; ω — угол наклона фронта к вектору скорости перед фронтом, тогда

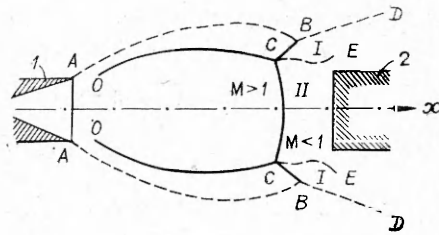
$$\partial y/\partial x = \operatorname{tg}(\omega - \vartheta) = \varepsilon(M),$$

где $\varepsilon(M)$ — известная функция. Отсюда и из (4.6)

$$\partial \ln y/\partial M = \varepsilon(M)\varphi(M)/\Theta(M).$$

Последнее равенство определяет $y(M)$, а из (4.1) находится $M(x)$, т. е. закон распределения чисел Маха перед фронтом волны. Такое распределение отличается от заданного в набегающей струе. Поэтому полное выравнивание направлений скорости невозможно и достигается лишь настолько, насколько допускает существующее распределение $M(x)$ в струе перед скачком. Вблизи от оси струи $\vartheta \sim y$. Простейшим уточнением расчетной схемы будет принятие зависимости $\vartheta = ay$ за фронтом скачка (a — постоянный коэффициент). Если при всех прежних допущениях считать, что $\vartheta \neq 0$, $\vartheta = ay$, то вместо ϑ нужно писать $\vartheta - ay$, а результат интегриро-

вания соотношения (4.6) будет содержать параметр a : $M = M(x, a)$. Теперь a нужно выбрать так, чтобы в некотором смысле оптимально приблизить зависимость $M(x, a)$ к заданной. Это определит $\theta_c = ay_c$. Все указанные операции реализуются просто, поскольку рассматриваемый интервал изменения чисел Маха очень мал и всюду можно ограничиться первыми членами разложений.



Ф и г. 8

Рассмотрим модельные построения для несвободных струй, взаимодействующих с преградами, считая, что преграда не нарушает осевой симметрии.

5. По-прежнему одним из основных вопросов остается задача определения положения центрального скачка уплотнения. Теперь координата x_c зависит не только от противодействия, но прежде всего от положения и формы преграды. Пока нет удобных и простых приемов определения этой величины. Экспериментальные исследования не поддаются достаточному обобщению, численные методы встречаются с большими трудностями при их реализации.

На фиг. 8 приведена схема потока в случае натекания на преграду недорасширенной струи ($p_a/p_n > 1$), где OC — висячий, CB — отраженный и CC — центральный скачки уплотнения; CE — контактный разрыв; ABD — граница струи, сплошная линия — фронты ударных волн, штриховая — контактные разрывы. Вплоть до последней системы скачков уплотнения (CC и CB) перед лицевой стороной преграды 2 поток совпадает с течением в свободной струе при тех же параметрах в выходном сечении сопла 1. Решение для этой части потока принимается известным.

Поток за системой скачков уплотнения CC и CB можно разбить на две области: II — область течения за центральным скачком уплотнения между контактным разрывом и поверхностью тела, I — область периферийного потока, внешняя по отношению к II .

Если найдена форма контактного разрыва, то расчет течения в области периферийного потока сводится к задаче обтекания неравномерным потоком некоторого тела с одной присоединенной ударной волной.

Для определения течения в области II предлагается приближенный метод, основанный на линейной аппроксимации зависимости скорости от давления вдоль линии тока. Подобный подход использовался в задачах внешнего обтекания [6,7].

Линейная аппроксимация позволяет проинтегрировать систему уравнений газовой динамики для невязкого нетеплопроводного газа. При этом получается простая связь между кинематическими параметрами течения (кинематический интеграл), которая дает возможность найти положение тройной точки и форму контактного разрыва без решения задачи в целом [8].

Зависимость скорости от давления записывается в виде

$$w = Ap + B,$$

где A и B — функции только одной переменной функции тока ψ , которая определяется соотношением

$$(5.1) \quad d\psi/\rho w = y \cos \theta dy - y \sin \theta dx.$$

В силу принятой аппроксимации ρw есть тоже функция лишь одной переменной ψ , поэтому в левой части уравнения (5.1) имеем полный диф-

ференциал некоторой функции. Условие того, что справа полный дифференциал, запишется в виде

$$\partial(y \cos \vartheta)/\partial x + \partial(y \sin \vartheta)/\partial y = 0.$$

Отсюда
(5.2)

$$x = y \sin \vartheta \ln \operatorname{tg}(\vartheta/2) + f(y \sin \vartheta),$$

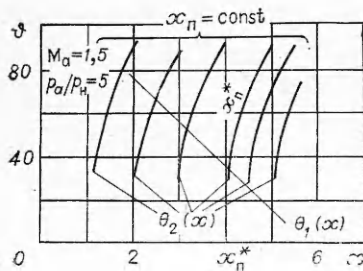
где $f(y \sin \vartheta)$ — произвольная функция своего аргумента, определяемая из условия непроницаемости на поверхности тела. Для основных форм преград выражение для нее записывается в явном виде.

При наличии кинематического интеграла (5.2) можно проинтегрировать уравнение линии тока. Результат получается в конечной форме. Таким образом, можно определить уравнение линии контактного разрыва как линии тока, сходящей с контура центрального скачка уплотнения.

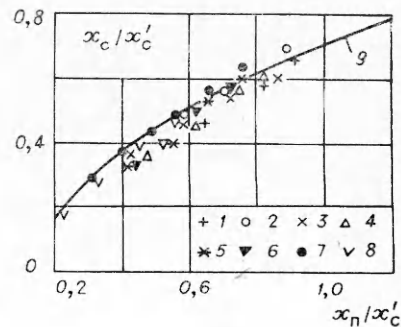
Так как заранее положение центрального скачка неизвестно, считается, что тройная точка может занимать любое положение на висячем скачке уплотнения. Знание поля потока в свободной струе с теми же параметрами в выходном сечении сопла, что и у струи, набегающей на преграду, дает уравнение дуги висячего скачка и параметры потока перед ним. Для каждой точки этого скачка по соотношениям для тройной конфигурации ударных волн можно определить все параметры потока за тройной точкой, в том числе и угол наклона вектора скорости к оси симметрии. Таким образом, из расчета свободной струи получается зависимость этого угла от осевой координаты $\vartheta = \Theta_1(x)$.

При заданном положении преграды для всех точек висячего скачка можно найти угол наклона вектора скорости за тройной точкой и из расчета области II. Вдоль контура тела заданной формы считается известной зависимость $\vartheta = \Theta_2(y)$, что определяет вид произвольной функции $f(y \sin \vartheta)$. Для каждой точки, отвечающей уравнению висячего скачка, по соотношению (5.2) находится ϑ , т. е. определяется та же зависимость угла наклона вектора скорости за тройной точкой, но уже из решения, учитывающего условия на теле $\vartheta = \Theta_2(x)$. Положение тройной точки определяется по пересечению кривых $\vartheta = \Theta_1(x)$: $\vartheta = \Theta_2(x)$.

На фиг. 9 в качестве примера приведены результаты расчета для одного из конкретных случаев, когда параметры в выходном сечении сопла постоянны, а расстояние между соплом и преградой принимает ряд значений. Имеется одна кривая зависимости $\vartheta = \Theta_1(x)$ и набор кривых зависимости $\vartheta = \Theta_2(x)$, каждая кривая из этого набора соответствует определенному положению преграды $x = x_n$. Положение тройной точки для каждого значения x_n находится по пересечению соответствующей кривой $\vartheta = \Theta_2(x)$ с кривой $\vartheta = \Theta_1(x)$.

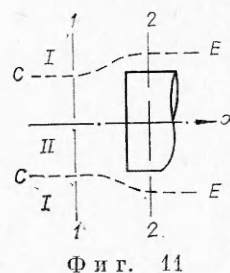


Ф и г. 9



Ф и г. 10

По схеме, данной выше, были проведены расчеты положения центрального скачка (тройной точки) в следующем диапазоне определяющих параметров: $p_a/p_n = 3 - 12$; $M_a = 1 - 3$; $\vartheta_a = 0^\circ$, $k = 1,4$. Преграды брались плоские бесконечные и цилиндрические с плоским торцом. Расстояние между соплом и преградой не превышало длины начального газодинамического участка струи. Параметры потока в области, совпадающей с течением в свободной струе, и уравнение дуги падающего скачка рассчитывались по изложенному выше способу.



На фиг. 10 дано сравнение расчетных данных в относительных координатах с экспериментальными данными для натекания струи на плоскую бесконечную преграду (значения M : 1 — 1,0; 2, 3, 4 — 1,5; 5, 6 — 2,0; 7, 8 — 3,0, значения p_a/p_n : 1, 4, 6 — 12; 2, 8 — 5; 3, 5, 7 — 8). Расстояния от сопла до преграды и до центрального скачка x_c отнесены к расстоянию между соплом и центральным скачком x'_c в свободной струе. Для каждой точки параметры свободной струи брались равными параметрам струи, набегающей на преграду. Экспериментальные данные представлены на фиг. 10 в виде кривой 9 обобщенной зависимости [9], справедливой в рассматриваемом диапазоне определяющих параметров (сплошная линия). Совпадение расчетных данных с экспериментальными можно считать удовлетворительным.

6. Трубки тока в окрестности оси симметрии набегающей струи претерпевают резкие изменения их конфигурации перед преградой. Относительно небольшую область существенно пространственного течения можно имитировать разрывом параметров потока, в число которых включается площадь поперечного сечения трубки (фиг. 11). Влияние преграды на основные параметры струйного потока изучается при помощи общих законов сохранения, записанных для условного разрыва [10]. Такой подход позволяет, в частности, установить связь между положением маховского диска в системе разветвленных скачков и силой воздействия струи на преграду. Апробацией предлагаемого подхода является проверка этой связи по легко measurableм в эксперименте величинам, что сделано для имеющихся данных.

Для условного разрыва запишем общие законы сохранения:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \rho_1 w_1 F_1 &= \rho_2 w_2 (F_2 - F_{II}); \\ \rho_2 w_2^2 (F_2 - F_{II}) - \rho_1 w_1^2 F_1 &= p_1 F_1 - p_2 (F_2 - F_{II}) - R'; \\ \frac{w_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} &= \frac{w_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1}, \end{aligned}$$

где F — площадь поперечного сечения трубки тока (F_{II} — площадь преграды). Индексы 1 и 2 относятся к соответствующим контрольным сечениям 1 — 1 и 2 — 2 на фиг. 11. Обозначим

$$R' = R - R'',$$

где R — реакция преграды; R'' — осевая составляющая силы, действующей на поверхность контактного разрыва между сечениями 1 и 2. Для силы R' введем безразмерный коэффициент β

$$(6.2) \quad R' = \beta \rho_1 w_1^2 F_1.$$

Учитывая (6.2), из системы (6.1) получается уравнение

$$\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{(kM_2^2 + 1)^2}{[kM_1^2(1-\beta) + 1]^2},$$

решение которого имеет вид

$$M_2^2 = 1 - \frac{(k+1) \sqrt{[kM_1^2(1-\beta) + 1]^2 - 2(k+1)M_1^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)}}{k \sqrt{[kM_1^2(1-\beta) + 1]^2 - 2(k+1)M_1^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)} + 1 + kM_1^2(1-\beta)}.$$

Знак перед радикалом выбран такой, чтобы при $w_1 \rightarrow 0$ $w_2 \rightarrow 0$.

Максимальное значение числа Маха ($M_2 = 1$) достигается, когда подкоренное выражение равно нулю. Отсюда для предельного режима

$$\beta = \frac{(1 - M_1^2)^2}{kM_1^2 \left[1 + kM_1^2 + M_1 \sqrt{2(k+1) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)} \right]},$$

где знак перед радикалом выбран из условия $\beta \geq 0$ (сила $R' \geq 0$ и направлена по оси струи).

Поток перед преградой разделим на внешний I и внутренний II по отношению к контактному разрыву CE , сходящему с контура центрального скачка (см. фиг. 11). Если давление со стороны внешнего потока p можно считать мало меняющейся величиной, то

$$R'' \approx p(F_2 - F_1).$$

Форма контактного разрыва такова, что $p \geq p_1$ (p_1 — давление во внутреннем потоке). В оценочных расчетах p принималось равным нижнему пределу p_1 .

Из законов сохранения следует

$$(6.3) \quad \frac{p_1}{p_2} = f \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}},$$

где $f = (F_2 - F_n)/F_1$.

Если пренебречь необратимыми потерями между сечениями $I - I$ и $2 - 2$, то

$$(6.4) \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{h/(k-1)}.$$

Из уравнений (6.3), (6.4) находим

$$f = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{-(k+1)/(k-1)}.$$

Для $M_2 = 1$

$$f = M_1 \left(\frac{k+1}{2} \right)^{(k+1)/2(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{-(k+1)/2(k-1)}$$

Окончательно

$$R = p_1 [F_1(f-1) - F_{II}] + \beta k p_1 M_1^2 F_1.$$

Течение до центрального скачка совпадает с течением в свободной струе. Поэтому для определения параметров за центральным скачком достаточно знать лишь его положение.

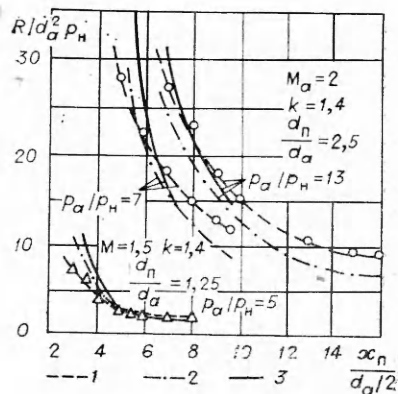
Рассмотрим результаты расчетов, в которых значения координаты центрального скачка x_c брались по экспериментальным данным [11]. Течение за скачком считалось параллельным оси ($F_1 = F_c$), а параметры потока в сечении $I-I$ полагались равными параметрам на оси струи за прямым скачком уплотнения. Результаты расчетов сравнивались с данными, полученными интегрированием по имеющимся экспериментальным точкам, характеризующим распределение давления на поверхности преграды.

На фиг. 12 приведены результаты в случае стационарного обтекания, кривые 1 соответствуют экспериментальным данным, 2 — расчету по изложенной выше схеме. Аналогичное соответствие результатов получено и для других исходных параметров, когда радиус преграды порядка радиуса центрального скачка уплотнения.

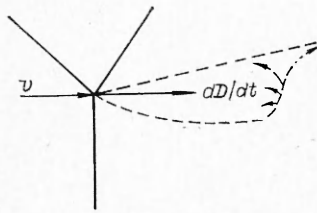
Положение маховского диска можно определить и расчетным путем по способу, изложенному выше. Кривые 3 на фиг. 12 соответствуют результатам расчета реакции тела с применением расчетных значений x_c .

7. Если положение преграды таково, что пересечение кривых $\varphi = \Theta_1(x)$ и $\varphi = \Theta_2(x)$ отсутствует ($x_n > x_n^*$ на фиг. 9), то теоретически можно построить решение задачи: положение скачка при этом должно соответствовать максимально допустимому удалению от преграды и при таком x_c решением являются два значения $\varphi = \Theta_1(x_c)$ и $\varphi = \Theta_2(x_c)$ для искомого угла, что можно трактовать как появление за точкой ветвления фронтов двух контактных разрывов, выходящих из одной точки с клиновидной застойной областью между ними. Этот вопрос заслуживает более тщательного обсуждения.

Если три образующих фронтов ударных волн сходятся в одной точке, то общие законы сохранения, связывающие параметры газа в окрестности такой точки, дают, вообще говоря, переопределенную систему соотношений. Для устранения возможного противоречия становится необходимым увеличение произвола в количестве исходных параметров. Простейшим, достаточным является предположение о наличии контактного разрыва, выходящего из точки ветвления. Следующий шаг в увеличении указанного произвола — принятие возможности появления двух контактных разрывов, которые образуют два противоположных берега изобарической области, заполненной газом в состоянии относительного покоя по отношению к точке ветвления скачков. Такая область может быть названа следом тройной точки из-за явной качественной аналогии с аэро-



Ф и г. 12



Ф и г. 13

динамическим следом за плохо обтекаемыми телами.

В стационарных условиях след за тройной точкой возникать не может, так как даже очень малые по величине касательные напряжения на его границе не могут быть ничем уравновешены, и в любом реальном потоке такое образование оторвется от волновой конфигурации, свернется в вихри и будет унесено потоком. Однако при движении тройной

конфигурации с ускорением, направленным вдоль вектора относительной скорости набегающего потока перед точкой ветвления, равнодействующая касательных напряжений на границе следа может быть скомпенсирована силами инерции. В этом случае след, заполненный вихрями, может существовать и развиваться за счет подпитки массой из внешнего потока (фиг. 13), где сплошные линии — фронты ударных волн, штриховые — контактные разрывы, v — скорость набегающей потока, D — скорость перемещения точки ветвления.

Если все волны имеют конечную интенсивность, то скоростной напор в потоке, претерпевшем двухступенчатое сжатие, во много раз больше скоростного напора за сильным скачком. Это значит, что роль первого из указанных потоков по отношению ко второму приближается к эффекту твердой стенки. Граница с высоконапорным потоком становится почти прямолинейной, и освобождение объема для развивающегося следа происходит главным образом за счет деформации потока, прошедшего через почти прямой скачок. Таким образом, область следа имеет форму впадины на цилиндрической поверхности, ограничивающей область низконапорного течения.

Образование впадины, обтекаемой сверхзвуковым потоком, можно иллюстрировать на следующей простой модельной задаче: пусть набегающий поток представляет собой двухслойное течение идеальной среды, разделенной контактным разрывом в виде горизонтальной плоскости. Над этим разрывом скорость существенно сверхзвуковая, под разрывом поток низконапорный, дозвуковой. Обтекаемым телом является двугранный угол с ребром, расположенным в плоскости контактного разрыва перпендикулярно направлению скорости набегающего потока. Обтекаемый угол может свободно вращаться вокруг своего ребра и имеет грани малой протяженности в направлении течения.

Очевидно, силовой баланс будет таким, что верхняя грань угла, подвергаясь воздействию высоконапорного потока, практически располагается в плоскости контактного разрыва, слабо возмущая внешний поток. Нижняя грань, напротив, глубоко проникает в низконапорную область, создавая развитое отрывное течение за счет деформации дозвукового потока. Вполне аналогичный эффект имеет место за точкой ветвления ударных волн в рассматриваемой ситуации. Из-за невозможности удовлетворения условиям задачи при помощи схемы из трех скачков с одним контактным разрывом возникают два контактных разрыва с конечным углом раствора клинообразной области между ними (аналог двугранного угла). По крайней мере начальные элементы линий скольжения ведут себя подобно граням легкого клина, деформируя главным образом поток с относительно небольшим скоростным напором, т. е. образуется свободный объем типа впадины на поверхности цилиндра, ограничивающего дозвуковое течение.

Обтекание такой впадины и ее развитие происходит под доминирующим влиянием внешнего сверхзвукового потока.

При ударе сверхзвуковой струи в преграду в некотором достаточно узком интервале параметров истечения конфигурация ударных волн в струе теряет устойчивость, стационарное обтекание самопроизвольно переходит в нестационарное и перед лицевой стороной преграды возникает самоподдерживающийся сильно пульсирующий волновой процесс. Теперь ясно, что в механизме этого явления большую, вероятно, определяющую роль играет внутренний турбулентный след, периодически возникающий и распадающийся за линией ветвления фронтов сильных ударных волн. Применение результатов исследования этого явления к анализу пульсационных режимов дало возможность объяснить и согласовать многие экспериментально наблюдаемые факты.

Пульсации потока сопровождаются значительными перемещениями по неравномерному фону сильного центрального скачка, в результате чего по дозвуковой струйке за этим скачком проходят интенсивные энтропийные волны.

Обычно наблюдается несколько дискретных колебательных тонов, существенно различающихся по частоте. Низкочастотные пульсации могут иметь большую амплитуду и представляют основной интерес для исследования. У высокочастотных колебаний амплитуда обычно невелика, а оценки частоты показывают, что эти колебания связаны с процессами, распространяющимися со скоростью звука.

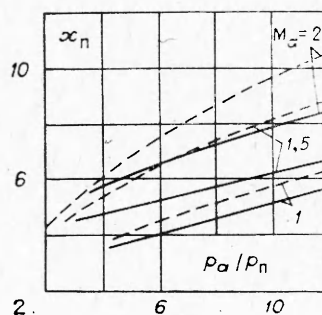
В работе [2] сделана попытка построения упрощенной математической модели этого явления на основе одномерного описания нестационарных волновых процессов в предположении, что основной отбор массы в область следа сосредоточен в хвостовой части следа, где имеет место резкое изменение геометрии потока. Последнее обстоятельство позволило имитировать это явление разрывом параметров одномерного потока с включением в их число площади живого сечения и массового расхода. Такая схематизация течения может применяться для описания начальной стадии формирования следа, когда диссипативные процессы смешения не оказывают существенного влияния на динамику явления. В более поздние моменты времени предпочтительнее является модель с доминирующим изобарическим смешением потоков.

Трудность решения задач в целом определяется двумя основными причинами: недостаточной изученностью и сложностью количественного описания движения тройной конфигурации ударных волн с образованием следа за точкой ветвления; сложным пространственным характером течения в окрестности преграды.

Вторая причина в рассматриваемых задачах играет подчиненную роль, и поэтому можно удовлетвориться приближенным подходом, например, в форме имитирующего разрыва, рассмотренного выше.

След за тройной точкой является тем единственным элементом системы, который принципиально не может существовать и развиваться в стационарных условиях реального течения и в этом смысле является первопричиной перехода к пульсационному режиму взаимодействия.

Таким образом, есть основания предполагать, что область параметров, в которой отсутствует пересечение кривых $\vartheta = \Theta_1(x)$, $\vartheta = \Theta_2(x)$ (см. фиг. 9), представляет собой зону нестационарного взаимодействия. Из анализа полученных расчетных данных следует, что граница отсутствия стационарного решения соответствует (в терминологии рабо-



Ф и г. 14

ты [9]) нижней границе зоны сильной неустойчивости. На фиг. 14 приведено сопоставление этих границ в случае натекания струи на плоскую бесконечную преграду. Сплошная линия — граница отсутствия решения, на фиг. 9 ей соответствует $x_{II} = x_{II}^*$. Штриховая линия — нижняя граница сильной неустойчивости, [9]. Хотя количественное совпадение удовлетворительно лишь при $M_a = 1$, качественное согласование имеет место на всех режимах. Подобные результаты получены и для конечных преград (цилиндр с плоским торцом).

Удовлетворительной математической модели колебательного цикла, построенной на основе гипотезы периодического возникновения и распада следа за тройной точкой, пока нет.

Поступила 26 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Henderson L. F. On confluence of three shock waves in a perfect gas.— «Aeronautical quart.», 1964, vol. XV, N 2.
2. Дулов В. Г. О движении тройной конфигурации ударных волн с образованием следа за точкой ветвления.— ПМТФ, 1973, № 6.
3. Голубков А. Г., Голубкова Н. А., Смирнова Г. И. Тройные конфигурации ударных волн в гиперзвуковых потоках.— «Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук», 1975, № 3, вып. 1.
4. Дулов В. Г., Смирнова Г. И. Расчет основных параметров свободных сверхзвуковых струй идеальной сжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1971, № 3.
5. Love E. S., Grigshy C. E., Lee L. P., Woodling M. J. Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets. NASA TR, 1959, R-6.
6. Михеев А. С. Аналитическое решение задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа.— «Вести. Ленингр. ун-та», 1962, № 7, вып. 2.
7. Михеев А. С. Обтекание тела вращения сверхзвуковым потоком газа.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1963, № 7, вып. 2.
8. Голубков А. Г., Дулов В. Г. Взаимодействие сверхзвуковых струй с преградами.— «Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук», 1972, № 13, вып. 3.
9. Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н. Особенности неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с безграничной преградой.— «Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук», 1972, № 13, вып. 3.
10. Голубков А. Г., Дулов В. Г. Об имитации влияния преграды, размещенной в сверхзвуковой струе, условным разрывом параметров потока.— «Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук», 1975, № 3, вып. 1.
11. Голубков А. Г., Козьменко Б. К., Остапенко В. А., Солотчин А. В. О взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской ограниченной преградой.— «Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук», 1972, № 13, вып. 3.