УДК 533.6.011.72

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ ПЛОСКОЙ ПЕРЕРАСШИРЕННОЙ СТРУИ В ОКРЕСТНОСТИ КРОМКИ СОПЛА

В. Н. Усков, М. В. Чернышов

Балтийский государственный технический университет "Военмех",
190005 Санкт-Петербург
E-mails: uskov@peterlink.ru, mvcher@newmail.ru

Изложен метод теоретического исследования поля течения двумерной (плоскопараллельной или осесимметричной) перерасширенной струи идеального совершенного газа в окрестности кромки сопла. Проанализировано изменение кривизны скачка уплотнения, уходящего от кромки, а также его интенсивности и параметров течения за ним в зависимости от числа Маха, нерасчетности плоской струи и показателя адиабаты газа.

Ключевые слова: сверхзвуковая перерасширенная струя, кривизна скачка, граница струи, сжатый слой.

Введение. Основные соотношения. Многие свойства сверхзвуковой газовой струи определяются особенностями ее течения в окрестности кромки сопла (в устье струи). Например, начальная кривизна границы осесимметричной струи обусловливает развитие продольных вихрей Тейлора — Гертлера [1–6], форма падающего скачка уплотнения — завихренность потока в сжатом слое за ним, а отрыв пограничного слоя от стенок сопла, возможно, предсказуем путем анализа свойств уходящего от кромки скачка и границы струи в невязком течении.

В данной работе теоретически, на основе дифференциальных условий динамической совместности [7], исследуется кривизна скачка уплотнения, уходящего от кромки сопла при истечении плоской перерасширенной струи. Показано, что данная величина является важным параметром задачи, с помощью которого анализируются изменения интенсивности скачка, числа Маха, статического и полного давлений в сжатом слое за скачком, кривизна границы струи в окрестности кромки сопла. Исследование проведено в широком диапазоне основных параметров перерасширенной струи невязкого совершенного газа.

Перерасширенная затопленная струя характеризуется нерасчетностью $n = p/p_n$, числом Маха M на выходе из сопла и показателем адиабаты газа γ. В работе принято, что p и M обозначают параметры потока в выходном сечении сопла вблизи его кромки (точка A на рис. 1), p_n — давление в затопленном пространстве. Интенсивность скачка $J = p_n/p = 1/n$. Максимальное значение J ($J_{\max} = (1 + \varepsilon)\,\mathrm{M}^2 - \varepsilon$, $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$) соответствует прямому скачку в выходном сечении и определяет нижнюю границу теоретически возможной нерасчетности струи: $n_{\max} < n < 1$ ($n_{\max} = 1/J_{\max}$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00713).

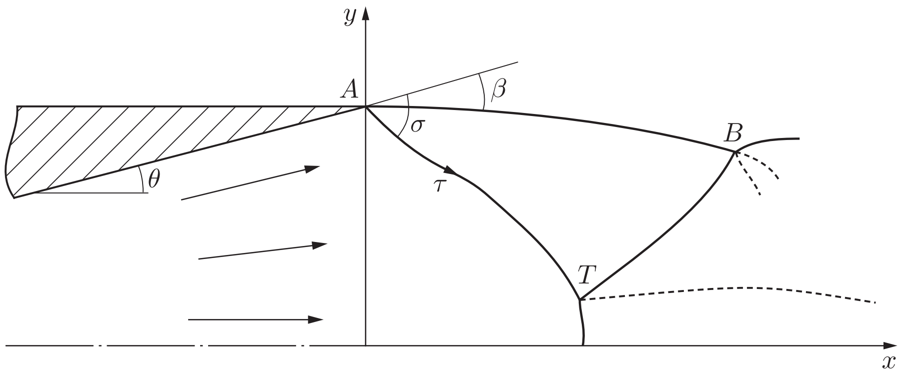

Рис. 1. Схема течения плоской перерасширенной струи в пределах “первой бочки”

Поток за падающим скачком уплотнения AT является сверхзвуковым при $n_* < n < 1$ и дозвуковым при $n_{\max} < n < n_*$, где $n_* = 1/J_*$, а особая интенсивность

$$J_*(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{M}^2 - 1}{2}\right)^2 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1) + 1}$$

соответствует торможению потока с числом Маха до критической скорости за скачком. Особыми [7, 8] называются также значения интенсивностей

$$J_l(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{M}^2 - 2}{2}\right)^2 + (1 + 2\varepsilon)(\mathrm{M}^2 - 1) + 2}, \qquad J_\Gamma(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^2 - 1. \tag{1}$$

Первое из них определяет скачок, отклоняющий поток на наибольший угол $\beta(\mathrm{M}, J, \gamma)$ при фиксированном числе Маха перед ним, а второе — интенсивность скачка, отклоняющего поток на максимальный угол по сравнению со всеми другими скачками той же интенсивности (возникающими при других числах Маха перед ними). Особым интенсивностям соответствуют нерасчетности $n_l = 1/J_l$, $n_\Gamma = 1/J_\Gamma$. При всех $\mathrm{M} > 1$ выполняются неравенства $1 < J_\Gamma < J_* < J_l < J_{\max}$ и соответственно $n_{\max} < n_l < n_* < n_\Gamma < 1$.

Зависимости $n_{\max}(\mathrm{M})$, $n_l(\mathrm{M})$, $n_*(\mathrm{M})$ перерасширенной струи от числа Маха перед скачком показаны кривыми *1–3* на рис. 2,*а,б*, а зависимость $n_\Gamma(\mathrm{M})$ — кривой *4* на рис. 2,*а*.

Производные различных газодинамических переменных струйного течения претерпевают разрыв на падающем скачке и связаны локальными дифференциальными условиями совместности [7] в виде

$$N_{i2} = C_i \sum_{j=1}^{4} A_{ij} N_j, \qquad i = 1, \ldots, 3, \tag{2}$$

где N_{i2}, N_j — неравномерности потока за скачком и перед ним соответственно; коэффициенты C_i и A_{ij} зависят от M, J и θ. Неравномерности $N_1 = \partial \ln p/\partial s$, $N_2 = \partial\theta/\partial s$ и $N_3 = \partial \ln p_0/\partial n$ характеризуют соответственно неизобаричность, кривизну линий тока и завихренность потока с постоянным полным теплосодержанием; $N_4 \equiv K_\sigma$ — кривизна скачка. Условия (2) определяют неравномерности потока в сжатом слое непосредственно за скачком найденной кривизны, если известно поле течения перед ним.

Условие изобаричности течения ($N_{12} = 0$) вдоль свободной поверхности (границы струи) AB (см. рис. 1) определяет искомую кривизну скачка

$$K_\sigma = -\frac{1}{A_{14}} \sum_{j=1}^{3} A_{1j} N_j, \tag{3}$$

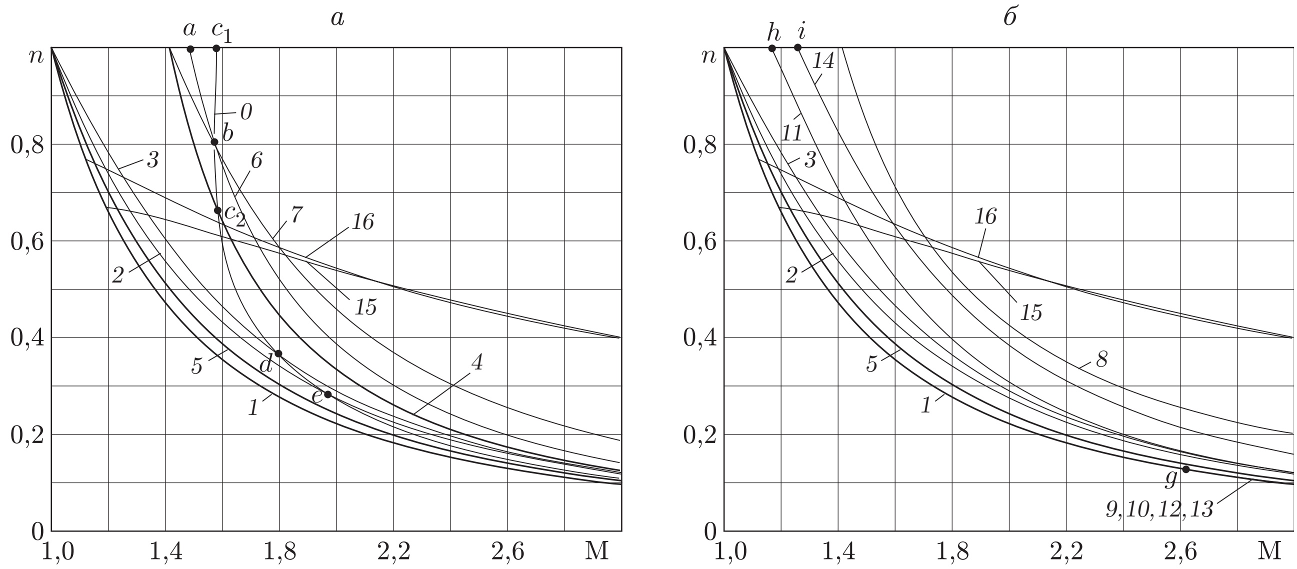

Рис. 2. Нерасчетности струи, соответствующие особенностям скачка уплотнения (a), границы струи и течения за скачком ($б$) в окрестности кромки сопла

от которой зависит кривизна $N_{22} \equiv K_\tau$ границы струи:

$$K_\tau = \frac{C_2}{A_{15}} \sum_{j=1}^{3} (A_{2j}A_{14} - A_{1j}A_{24})N_j.$$

Зависимость (3), уравнения движения двумерного потока газа перед скачком и за ним в “естественной” системе координат (s, n)

$$\frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\gamma\,\mathrm{M}^2}\, N_1 + \frac{\partial\theta}{\partial n} + N_4 \sin\theta = 0, \qquad \gamma\,\mathrm{M}^2\, N_2 = -\frac{\partial \ln p}{\partial n}, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$$

и известные соотношения между формой скачка, его интенсивностью и числами Маха на его сторонах [7]

$$J = (1 + \varepsilon)\,\mathrm{M}^2 \sin^2\sigma - \varepsilon,$$

$$\operatorname{tg}|\beta| = \sqrt{\frac{J_{\max} - J}{J + \varepsilon}}\, \frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{J_{\max} + \varepsilon - (1 - \varepsilon)(J - 1)}, \qquad \mathrm{M}_2 = \sqrt{\frac{(J + \varepsilon)\,\mathrm{M}^2 - (1 - \varepsilon)(J^2 - 1)}{J(1 + \varepsilon J)}}$$

(σ — угол наклона скачка к вектору скорости потока перед ним) после преобразований определяют локальные изменения интенсивности и числа Маха за скачком по направлению τ вдоль него:

$$\begin{gathered} \frac{dJ}{d\tau} = -2(J + \varepsilon)(A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + qK_\sigma), \\ \frac{d\mathrm{M}_2}{d\tau} = -[1 + \varepsilon(\mathrm{M}_2^2 - 1)]\Big(\frac{\mathrm{M}_2\, N_{22}}{1 - \varepsilon} + \frac{N_{32}}{(1 + \varepsilon)\mathrm{M}_2}\Big) \sin(\sigma - \beta). \end{gathered} \qquad (4)$$

Здесь $c = \sqrt{(J + \varepsilon)/(J_{\max} + \varepsilon)}$; $q = \sqrt{(J_{\max} - J)/(J + \varepsilon)}$; $A_1 = s[1 - (1 - 2\varepsilon)(\mathrm{M}^2 - 1)]/[(1 + \varepsilon)\,\mathrm{M}^2]$; $s = \sqrt{(J_{\max} - J)/(J_{\max} + \varepsilon)}$; $A_2 = c[(1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1))/(1 - \varepsilon) - q^2]$; $A_3 = c[1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1)]/(J_{\max} + \varepsilon)$.

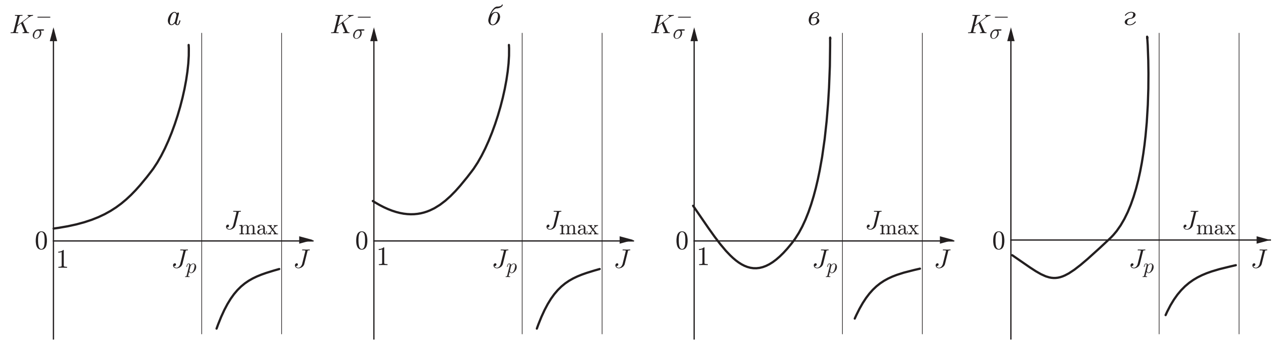

Рис. 3. Изменение кривизны падающего скачка в зависимости от его интенсивности:
а — $\mathrm{M} < \mathrm{M}_a$; *б* — $\mathrm{M}_a < \mathrm{M} < \mathrm{M}_b$; *в* — $\mathrm{M}_b < \mathrm{M} < \mathrm{M}_c$; *г* — $\mathrm{M} > \mathrm{M}_c$

Кривизна скачка уплотнения в плоской перерасширенной струе. Пусть для определенности параметры изоэнтропического течения перед падающим скачком описываются моделью цилиндрического источника (см. рис. 1). Этой моделью обычно пользуются при описании истечения из клиновидного (с полууглом раствора $\theta > 0$) или в частном случае профилированного ($\theta = 0$) сопла. Дифференцирование известных соотношений [9] позволяет выявить неизобаричность потока перед скачком на кромке:

$$N_1 = -\gamma\,\mathrm{M}^2 \sin\theta / [(\mathrm{M}^2 - 1) r]$$

(r — расстояние от кромки сопла до плоскости симметрии). Ввиду прямолинейности линий тока и отсутствия завихренности $N_2 = N_3 = 0$. Соотношение (3) дает возможность провести анализ влияния параметров задачи M, n, γ, θ на особенности поля течения в окрестности кромки сопла. В частности, кривизна скачка монотонно зависит от угла полураствора (пропорциональна величине $\sin\theta$). Во всех дальнейших примерах расчета рассматриваются безразмерная кривизна $K_\sigma^- = rK_\sigma/\sin\theta$ и показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

При малых числах Маха величина K_σ^- положительна (скачок AT на рис. 1 выпуклый вниз в окрестности кромки) и возрастает как функция интенсивности скачка на участке $(1; J_p)$, стремясь при $J \to J_p$ к бесконечности (рис. 3,*а*). Интенсивность $J_p(\mathrm{M}) \in (J_l; J_{\max})$ (так называемая точка постоянного давления) находится из условия $A_{14} = 0$ и всегда соответствует дозвуковому течению за падающим скачком. Соответствующая нерасчетность струи $n_p = 1/J_p$ показана на рис. 2 кривой *5*. При $J > J_p$ кривизна отрицательна. При всех особых значениях интенсивности, не равных J_p, кривизна скачка конечна. В частности, при $J \to 1$ (вырождение в слабый разрыв), при $J \to J_{\max}$ (прямой скачок) и при $J = J_\Gamma(\mathrm{M})$ она равна

$$\lim_{J\to 1} K_\sigma^- = -\frac{(1-2\varepsilon)\,\mathrm{M}^2 - 2(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\,\mathrm{M}(\mathrm{M}^2-1)}, \qquad \lim_{J\to J_{\max}} K_\sigma^- = -\frac{\mathrm{M}^2}{(1-\varepsilon)(\mathrm{M}^2-1)},$$

$$\lim_{J\to J_\Gamma} K_\sigma^- = -\frac{[(1-2\varepsilon)\,\mathrm{M}^2 - 2(1-\varepsilon)]\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1 + \varepsilon}}{(1-\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon}\;\mathrm{M}(\mathrm{M}^2-1)}.$$

Увеличение числа Маха до значения $\mathrm{M}_a = \sqrt{(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)} = 1{,}483$ приводит к возникновению минимума кривизны (рис. 3,*б*) — сначала в точке $J = 1$. Нерасчетность $n_{\min} = 1/J_{\min}$, соответствующая минимуму кривизны скачка, отображена на рис. 2,*а* кривой *6*. Значение кривизны скачка в точке минимума падает до нуля при числе Маха $\mathrm{M}_b = 1{,}571$ и интенсивности $J_b = 1{,}242$, а в дальнейшем становится отрицательным (рис. 3,*в*). При произвольном показателе адиабаты газа значения M_b и J_b — наибольшие вещественные корни уравнений

$$(3-4\varepsilon)^2\,\mathrm{M}_b^8 - 8(3-6\varepsilon+4\varepsilon^2)\,\mathrm{M}_b^6 + 8(1-3\varepsilon+4\varepsilon^2)\,\mathrm{M}_b^4 + 32\varepsilon(1-\varepsilon)\,\mathrm{M}_b^2 + 16(1-\varepsilon)^2 = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{4} a_k J_b^k = 0,$$

$$a_4 = (1-\varepsilon)(3-4\varepsilon)(3+5\varepsilon), \qquad a_3 = -4(1-\varepsilon)(6+\varepsilon-3\varepsilon^2+16\varepsilon^3),$$

$$a_2 = -2(7+36\varepsilon-45\varepsilon^2-94\varepsilon^3+32\varepsilon^4-32\varepsilon^5), \quad a_1 = 4(4+11\varepsilon+6\varepsilon^2+39\varepsilon^3+52\varepsilon^4-16\varepsilon^5),$$

$$a_0 = 13+62\varepsilon+85\varepsilon^2-16\varepsilon^4+48\varepsilon^5.$$

Кривая *0* на рис. 2,*а* определяет нерасчетности струи, при которых от кромки сопла уходит скачок нулевой кривизны.

При числе Маха $\mathrm{M}_c = \sqrt{2(1-\varepsilon)/(1-2\varepsilon)} = 1{,}581$ впервые становится отрицательной кривизна скачка, вырождающегося в слабый разрыв (точка c_1 на рис. 2,*а*). Другое значение интенсивности скачка, обладающего нулевой кривизной, при том же числе Маха равно значению $J_\Gamma(\mathrm{M}_c) = 1/(1-2\varepsilon) = 1{,}5$ и соответствует на рис. 2,*а* точке c_2. При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_c$ интенсивность скачка нулевой кривизны быстро растет (кривая *0* на рис. 2,*а*) и достигает значения $J_d = J_*(\mathrm{M}_d) = 2{,}699$ при $\mathrm{M}_d = 1{,}787$. Течение за скачком, прямолинейным вблизи кромки сопла, становится дозвуковым. Число Маха M_d и интенсивность J_d — наибольшие вещественные корни уравнений

$$2(1-4\varepsilon)(1-2\varepsilon)\,\mathrm{M}_d^6 - (17-73\varepsilon+96\varepsilon^2-64\varepsilon^3)\,\mathrm{M}_d^4 + \\ + 4(1-\varepsilon)(9-24\varepsilon+32\varepsilon^2)\,\mathrm{M}_d^2 - 16(1-4\varepsilon)(1-\varepsilon)^2 = 0,$$

$$2(1-2\varepsilon)J_d^3 - (1+\varepsilon+8\varepsilon^2)J_d^2 - (3+5\varepsilon)J_d - (1-\varepsilon)(1+3\varepsilon) = 0.$$

При числе Маха $\mathrm{M}_e = 1{,}974$ точка нулевой кривизны достигает значения $J_e = J_l(\mathrm{M}_e) = 3{,}549$, причем M_e и J_e — наибольшие корни уравнений

$$(1-2\varepsilon)\,\mathrm{M}_e^6 - (1+7\varepsilon-16\varepsilon^2+16\varepsilon^3)\,\mathrm{M}_e^4 - 8(1-\varepsilon)(1-3\varepsilon+4\varepsilon^2)\,\mathrm{M}_e^2 + 8(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)^2 = 0,$$

$$(1-2\varepsilon)J_e^3 - \varepsilon(3+4\varepsilon)J_e^2 - (5+2\varepsilon+4\varepsilon^2)J_e - (2+5\varepsilon-2\varepsilon^2) = 0.$$

В пределе ($\mathrm{M} \to \infty$) кривизны особых скачков отрицательны:

$$\lim_{\substack{J=J_\Gamma\\ \mathrm{M}\to\infty}} K_\sigma^- = \lim_{\substack{J=J_*\\ \mathrm{M}\to\infty}} K_\sigma^- = \lim_{\substack{J=J_l\\ \mathrm{M}\to\infty}} K_\sigma^- = -\frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon}},$$

$$\lim_{\substack{J=J_{\max}\\ \mathrm{M}\to\infty}} K_\sigma^- = -\frac{1}{1-\varepsilon} = -1{,}2,$$

и лишь кривизна скачка, вырождающегося в слабый разрыв ($J \to 1$), стремится к нулю. Интенсивность скачка нулевой кривизны стремится к бесконечности, так что

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J}{\mathrm{M}^2} = \frac{3-\varepsilon-4\varepsilon^2}{3(1-\varepsilon)} = 1{,}089.$$

При больших числах Маха особые интенсивности скачков таковы, что

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J_\Gamma}{\mathrm{M}^2} = \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J_*}{\mathrm{M}^2} = \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J_l}{\mathrm{M}^2} = 1, \qquad \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J_p}{\mathrm{M}^2} = \frac{3(1+\varepsilon)}{3+\varepsilon} = 1{,}105.$$

Точка нулевой кривизны при больших числах Маха соответствует сильному скачку с дозвуковым течением за ним.

Интенсивность $J_{\min}$ скачка минимальной кривизны, напротив, соответствует сверхзвуковому течению в сжатом слое (см. кривую *6* на рис. 2,*a*). При больших числах Маха она описывается соотношением

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J_{\min}}{\mathrm{M}^2} = \frac{(1+\varepsilon)(9+9\varepsilon+2\varepsilon^2-2\varepsilon\sqrt{18-18\varepsilon+\varepsilon^2}\,)}{3(3-2\varepsilon-\varepsilon^2)} = 0{,}913,$$

а безразмерная кривизна этого скачка стремится к величине

$$\lim_{\substack{J=J_{\min}\\ \mathrm{M}\to\infty}} K_\sigma^- = \sqrt{\frac{81-243\varepsilon+333\varepsilon^2-261\varepsilon^3+88\varepsilon^4+2\varepsilon^5-Q}{3(3+\varepsilon)^3(1-\varepsilon)^3}} = -0{,}767,$$

$$Q = 2\varepsilon(1-\varepsilon)(18-18\varepsilon+\varepsilon^2)^{3/2}.$$

Изменение интенсивности падающего скачка в окрестности кромки сопла. Изменение интенсивности скачка вблизи кромки описывается производной $dJ/d\tau$ (соотношение (4)) по направлению от кромки. Анализ этой величины необходим для описания течения в сжатом слое, поскольку интенсивность скачка однозначно определяет коэффициент потерь полного давления и рост энтропии газа на скачке:

$$I = p_{02}/p_0 = (J\Omega^\gamma)^{-(1-\varepsilon)/(2\varepsilon)}, \qquad \Delta S = c_v \ln(J\Omega^\gamma). \tag{5}$$

Здесь c_v — теплоемкость при постоянном объеме; $\Omega = (1+\varepsilon J)/(J+\varepsilon)$ — отношение удельных объемов за скачком и перед ним согласно ударной адиабате Ренкина — Гюгонио. Производная $dJ/d\tau$, следовательно, показывает направление изменения полного давления и роста энтропии газа при переходе от одной линии тока к другой в сжатом слое, как и пропорциональная $dJ/d\tau$ аналогичная производная от энтропии характеризует абсолютную величину вектора вихря скорости в сжатом слое.

Согласно выражению (4) при использовании модели течения от источника производная $dJ/d\tau$ пропорциональна величине $\sin\theta/r$. В частности, при $\theta = 0$ интенсивность прямолинейного скачка уплотнения в равномерном потоке неизменна до точки отражения. В дальнейшем рассматривается безразмерная величина $W_J = (r/\sin\theta)\,dJ/d\tau$, не зависящая ни от радиуса выходного сечения сопла, ни от его полуугла раствора.

Безразмерная производная W_J равна нулю (рис. 4) как в случае образования прямого скачка ($J = J_{\max}$), так и при вырождении скачка уплотнения в слабый разрыв ($J \to 1$). Последнее свидетельствует о переходе от скачка, присоединенного к кромке, к висячему

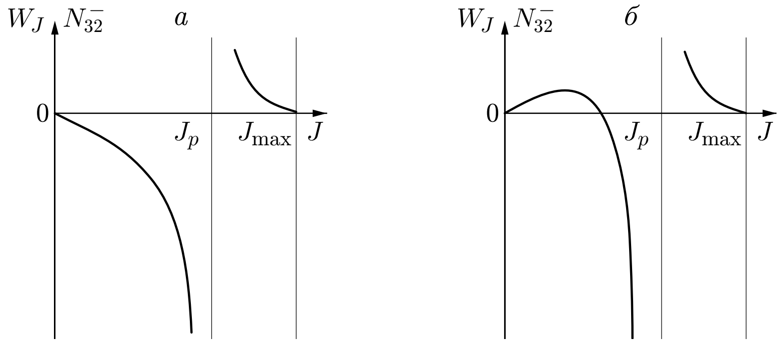

Рис. 4. Зависимости $W_J(J)$ и $N_{32}^-(J)$ при $\mathrm{M} < \sqrt{2}$ (*а*) и $\mathrm{M} > \sqrt{2}$ (*б*)

скачку на некотором расстоянии от нее при смене режима перерасширения на расчетное истечение.

При $\mathrm{M} < \sqrt{2}$ величина W_J отрицательна и монотонно убывает на участке $(1; J_p)$, стремясь при $J \to J_p$ к бесконечному значению (рис. 4,*а*). Следовательно, скачки уплотнения, образующиеся в перерасширенной струе с $\mathrm{M} < \sqrt{2}$, при подходе к плоскости симметрии обнаруживают тенденцию к ослаблению. На участке $(J_p; J_{\max})$ они, напротив, усиливаются, стремясь к превращению в прямой скачок на плоскости симметрии.

При $\mathrm{M} > \sqrt{2}$ и небольшой и умеренной интенсивности скачков производная $dJ/d\tau > 0$ (рис. 4,*б*), и, следовательно, они усиливаются в окрестности кромки сопла. Скачки с нулевым значением производной $dJ/d\tau$ описываются уравнением (1). Интенсивность скачков, удовлетворяющих неравенству $J_\Gamma < J < J_p$, по-прежнему уменьшается при удалении от кромки сопла. Поскольку интенсивность J_*, соответствующая критическому течению за скачком, удовлетворяет этому неравенству ($J_\Gamma < J_* < J_p$), течение за ослабляющимся скачком может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. Поведение сильных ($J > J_p$) скачков при изменении числа Маха не меняется.

Максимальные значения функции W_J на промежутке $(1; J_\Gamma)$ соответствуют скачкам, рост интенсивности которых в окрестности кромки наиболее велик. Нерасчетности $n = 1/J$ струй с наиболее быстро усиливающимися скачками показаны кривой *7* на рис. 2,*а*. При больших числах Маха интенсивности таких скачков и их производные W_J стремятся к бесконечно большим (порядка M^2) значениям и характеризуются соотношениями

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J}{\mathrm{M}^2} = L_1, \qquad \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{W_J}{\mathrm{M}^2} = 0{,}098,$$

где $L_1 = 0{,}638$ — единственный вещественный корень уравнения

$$3(3+\varepsilon)L_1^3 - 2(12 + 12\varepsilon + \varepsilon^2)L_1^2 + 3(1+\varepsilon)(7+4\varepsilon)L_1 - 6(1+\varepsilon)^2 = 0.$$

Течение за скачками с наиболее быстрым ростом интенсивности является сверхзвуковым.

Таким образом, кривые *4* ($n = n_\Gamma(\mathrm{M})$) и *5* ($n = n_p(\mathrm{M})$) на рис. 2,*а* разделяют диапазоны нерасчетностей перерасширенной струи, в которых скачок, приходящий на плоскость симметрии, усиливается или (в области между этими кривыми) ослабляется. Если $\mathrm{M} < \sqrt{2}$, скачки ослабляются при падении от кромки сопла при всех практически реализуемых нерасчетностях из промежутка $n_p < n < 1$. Расчет методом характеристик [10], проведенный для струй с $n = 0{,}8$ ($J = 1{,}25$), $\theta = 15°$ и различными числами Маха истечения, показывает, что участок убывания интенсивности скачка тем протяженнее, чем меньше число Маха. При числе Маха (в данном случае $\mathrm{M} = 1{,}5$), удовлетворяющем уравнению (1), интенсивность скачка монотонно растет до плоскости симметрии.

Изменение показателя адиабаты газа качественно не влияет на решение задачи о производной от интенсивности скачка.

Экстремальные значения завихренности потока. Как следует из соотношения (5), коэффициент потерь полного давления на скачке при фиксированном значении γ — функция только интенсивности скачка. Градиент полного давления

$$N_{32} = \frac{\partial \ln p_0}{\partial n} = \frac{(1-\varepsilon)(J-1)^2\sqrt{(J_{\max}-J)(J+\varepsilon) + (1+\varepsilon J)^2}}{2J(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)^2}\,\frac{dJ}{d\tau},$$

показывающий изменение величины завихренности потока, имеет тот же знак, что и рассмотренная ранее функция $W_J(\mathrm{M}, J)$. При изменении нерасчетности струи завихренность потока изменяется практически так же, как показано на рис. 4. Если сверхзвуковая струя близка к расчетной ($J \to 1$), завихренность потока очень мала. Равны нулю значения завихренности за прямым скачком ($J = J_{\max}$) и в единственной точке — корне функции $W_J(J)$ на участке $J \in (1; J_p)$ при $\mathrm{M} < \sqrt{2}$.

Точки экстремума функции $N_{32}^{-}(J) = rN_{32}/\sin\theta$ имеют место при $\mathrm{M} > \sqrt{2}$. При $\mathrm{M} < 2{,}569$ эти точки, в отличие от точек экстремума функции $W_J(J)$, соответствуют бо́льшим интенсивностям падающего скачка (и меньшим значениям нерасчетности струи). При единственных значениях числа Маха и нерасчетности ($\mathrm{M} = 2{,}569$, $J = 3{,}825$) экстремумы двух функций совпадают, и далее максимальная завихренность потока достигается при меньших интенсивностях скачка (кривая *8* на рис. 2,*б*).

Параметры струй, соответствующие экстремумам завихренности, находятся из алгебраических уравнений восьмой степени относительно нерасчетности струи и четвертой степени относительно квадрата ее числа Маха вблизи кромки сопла. К нулю стремятся значения завихренности N_{32}^{-} в особых точках $J_*(\mathrm{M})$, $J_\Gamma(\mathrm{M})$, $J_l(\mathrm{M})$ при $\mathrm{M} \to \infty$. В точке экстремума, соответствующей при больших числах Маха интенсивности $J \approx \mathrm{M}^2$, безразмерная завихренность в сжатом слое стремится к величине $A = 26{,}670$ — корню уравнения

$$3\varepsilon A^4 - (9 + 22\varepsilon - 22\varepsilon^2)A^3 - (14 + 31\varepsilon + 44\varepsilon^2)A^2 - \\ - (1 + 20\varepsilon + 22\varepsilon^2 + 24\varepsilon^3)A - 2\varepsilon(1 + 4\varepsilon) = 0.$$

Кривизна границы перерасширенной струи. Граница струи в окрестности кромки сопла, как правило, выпукла вверх (см., например, рис. 1). Безразмерная кривизна $K_\tau^{-}(\mathrm{M}, J) = rK_\tau/\sin\theta$ отрицательна, в частности, при падении слабого скачка:

$$\lim_{J\to 1} K_\tau^{-}(\mathrm{M}, J) = -1/\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1},$$

что обосновывается также выводами из условий совместности на слабом разрыве [7]. В пределе ($\mathrm{M} \to \infty$) кривизна границы струи за слабым скачком стремится к нулю, а в особых точках $J_*(\mathrm{M})$, $J_\Gamma(\mathrm{M})$, $J_l(\mathrm{M})$ — к значению -1. Исключение составляют случаи очень сильного перерасширения (области на рис. 5 справа от бесконечного разрыва кривизны при $J = J_p$). В частности, за прямым скачком (при $J = J_{\max}(\mathrm{M})$) кривизна границы равна нулю, а на промежутке $J \in (J_p; J_{\max})$ — положительна при небольших числах Маха и имеет корень при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_g$, где $\mathrm{M}_g = \sqrt{(4 - 3\varepsilon)/(1 - 3\varepsilon)} = 2{,}646$. Нулевые значения кривизны границы струи описываются соотношением

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{3(1-\varepsilon)J^3 + 2(3 + \varepsilon - 2\varepsilon^2)J^2 - (5 - 13\varepsilon)J - 4\varepsilon(1 - 2\varepsilon) + \sqrt{D}}{2[(3-\varepsilon)J^2 + (1 + 9\varepsilon)J + 4\varepsilon^2]}},$$

$$D = 9(1-\varepsilon)^2J^6 - 4(1-\varepsilon)(3 - 7\varepsilon + 6\varepsilon^2)J^5 - 2(5 + 22\varepsilon - 43\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 - 8\varepsilon^4)J^4 - \\ - 4(3 - 8\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 14\varepsilon^3)J^3 + (41 - 2\varepsilon + 41\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3)J^2 + 8\varepsilon(7 + \varepsilon)J + 16\varepsilon^2$$

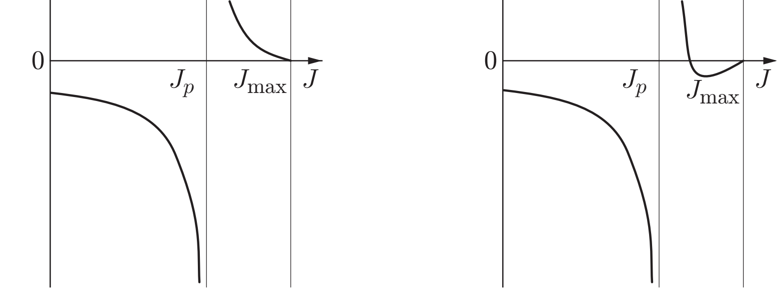

Рис. 5. Кривизна границы струи при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_g$ (*а*) и $\mathrm{M} > \mathrm{M}_g$ (*б*)

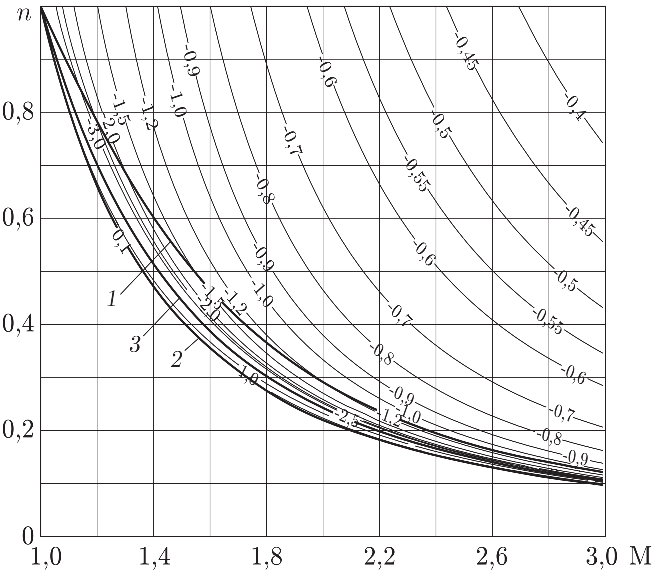

Рис. 6. Изолинии безразмерной кривизны $K_\tau^- = rK_\tau/\sin\theta$

(кривая *9* на рис. 2,*б*) и подчиняются закономерности

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty}\frac{J}{\mathrm{M}^2} = \frac{3-\varepsilon}{3(1-\varepsilon)} = 1{,}133.$$

Кривизна K_τ^- в точке минимума имеет конечный предел при $\mathrm{M}\to\infty$ ($K_\tau^-\to -0{,}207$), а интенсивность скачка в этой точке такова, что $J/\mathrm{M}^2\to C$, где значение $C = 1{,}153$ определяется уравнением

$$\sum_{k=0}^{4} H_k C^k = 0,$$

$$H_4 = 3(3+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2, \qquad H_3 = -2(1-\varepsilon)(18+3\varepsilon-13\varepsilon^2),$$

$$H_2 = 2(1-\varepsilon^2)(27-8\varepsilon^2), \quad H_1 = -2(1+\varepsilon)(18-3\varepsilon-13\varepsilon^2), \quad H_0 = 3(3-\varepsilon)(1+\varepsilon^2).$$

Минимумы и нулевые значения кривизны границы струи при $J\in(J_p; J_{\max}]$ показаны соответственно кривыми *9* и *10* на рис. 2,*б*, практически сливающимися с кривой *1*, соответствующей прямым скачкам.

Кривизна границы является важным параметром, влияющим на развитие неустойчивости Тейлора — Гертлера. На рис. 6 видно, что безразмерная кривизна K_τ^- существенно зависит от числа Маха, уменьшаясь по модулю при его увеличении. Переход к дозвуковому течению за скачком ($n = n_*(\mathrm{M})$, кривая *1*) не оказывает влияния на кривизну границы, а при $n = n_p(\mathrm{M})$ происходит ее бесконечный разрыв. Если истечение с $n\in(n_{\max}(\mathrm{M}); n_p(\mathrm{M}))$ (область между кривыми *2* и *3*) действительно реализуется, то малое колебание нерасчетности струи, по-видимому, способно существенно исказить ее границу.

Изменение статического давления за скачком. Производная статического давления $P_w = (\partial\ln p/\partial\tau)\,(r/\sin\theta)$ за скачком уплотнения определяется, во-первых, уменьшением давления перед скачком по мере его удаления от кромки сопла и, во-вторых, возможным увеличением интенсивности скачка и соответствующим ростом давления за ним. Функция $P_w(\mathrm{M}, J)$ определяется двумя слагаемыми:

$$P_w(\mathrm{M}, J) = -\sqrt{\frac{J_{\max}-J}{J_{\max}+\varepsilon}}\,\frac{\gamma\,\mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1} + \frac{1}{J}\,W_J(\mathrm{M}, J),$$

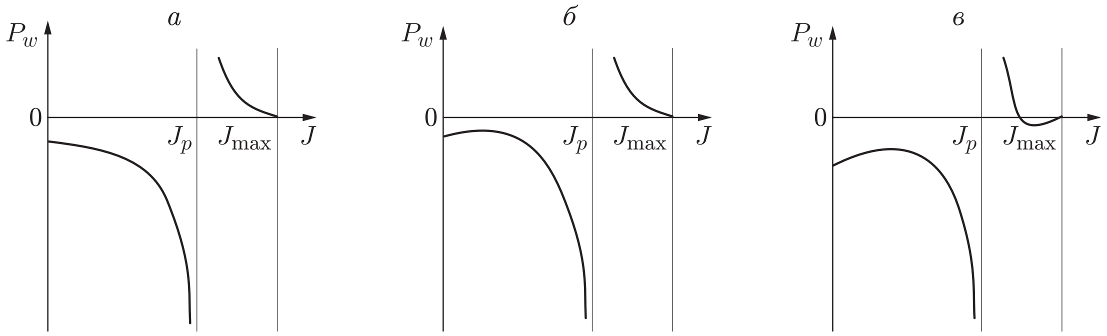

Рис. 7. Производная статического давления при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_h$ (*а*), $\mathrm{M}_h < \mathrm{M} < \mathrm{M}_g$ (*б*) и $\mathrm{M} > \mathrm{M}_g$ (*в*)

каждое из которых выражает влияние одного из факторов. В частности, при $J \to 1$, когда $W_J \equiv 0$, давление за слабым скачком падает:

$$P_w(\mathrm{M}, J = 1) = -\gamma\,\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1},$$

причем при малых числах Маха — особенно быстро. За прямым скачком значение $P_w(\mathrm{M}, J_{\max}) = 0$.

При малых числах Маха (рис. 7,*а,б*) функция P_w строго отрицательна при всех $J \in [1; J_p)$, т. е. во всех практически реализуемых случаях схода скачка непосредственно с кромки, и неотрицательна на участке $(J_p; J_{\max}]$. При числе Маха

$$\mathrm{M}_h = \sqrt{\left(\sqrt{9 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2} - 3 + 6\varepsilon\right)/(4\varepsilon)} = 1{,}166$$

возникает максимум функции $P_w(J)$ (рис. 7,*б*). Кривая *11* на рис. 2,*б* показывает нерасчетность струи в точке этого максимума. Производная давления в точке максимума по-прежнему отрицательна и стремится к значению $-0{,}519$ при $\mathrm{M} \to \infty$. Следовательно, статическое давление в сжатом слое струи за скачком, как правило, падает.

При $\mathrm{M} = \mathrm{M}_g = \sqrt{(4 - 3\varepsilon)/(1 - 3\varepsilon)} = 2{,}646$ образуется вторая точка экстремума функции P_w — теперь уже в области больших интенсивностей (рис. 7,*в*). Функция давления в новой точке минимума стремится к значению $-0{,}050$ при $\mathrm{M} \to \infty$. При больших числах Маха точки экстремума определяются пределами

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J}{\mathrm{M}^2} = C_{1,2}, \qquad C_{1,2} = \frac{9 - 13\varepsilon \mp 4\varepsilon\sqrt{\varepsilon(3 + \varepsilon - 3\varepsilon^2)}}{3(3 - 2\varepsilon + \varepsilon^2)}$$

($C_1 = 1{,}030$, $C_2 = 1{,}151$). Таким образом, значение интенсивности скачка в первой точке экстремума, равное единице при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_h$, при больших числах Маха несколько превышает значения $J_*(\mathrm{M})$, $J_\Gamma(\mathrm{M})$, $J_l(\mathrm{M})$. Функция P_w стремится при $\mathrm{M} \to \infty$ к одному и тому же значению $(-\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}/(1-\varepsilon) = -0{,}529)$ во всех этих особых точках. Кривые *12* и *13* на рис. 2,*б*, показывающие значения найденных минимумов и корней функции $P_w(J)$ в сильно перерасширенных струях, практически сливаются с кривыми *9* и *10*, показывающими особые свойства кривизны границы струи, и с кривой *1*, соответствующей прямому скачку. При $\gamma > 2$ ($\varepsilon > 1/3$) вторая точка экстремума не образуется.

Изменение числа Маха в сжатом слое. На изменение числа Маха в сжатом слое за скачком также влияют два фактора: расширение газа перед скачком и, следовательно, по мере удаления скачка от кромки сопла увеличение числа Маха, с одной стороны, и возможное увеличение интенсивности скачка с соответствующим уменьшением числа Маха

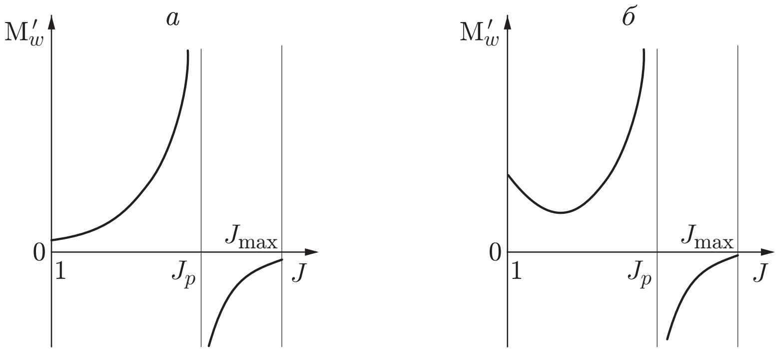

Рис. 8. Производная числа Маха за скачком при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_i$ (*а*) и $\mathrm{M} > \mathrm{M}_i$ (*б*)

за ним — с другой. Поэтому выводы предыдущего пункта качественно справедливы и для описания изменения числа Маха в сжатом слое перерасширенной струи.

Как установлено выше, при малых числах Маха интенсивность скачка в окрестности кромки сопла или убывает, или возрастает слабо. Поэтому функция $\mathrm{M}'_w(J)$ отрицательна при небольших M на всем полуинтервале $[1; J_p)$, а при $J \to J_p$ терпит бесконечный разрыв (рис. 8,*а*). В точке $J = J_{\max}(\mathrm{M})$ производная $\mathrm{M}'_w \equiv 0$.

При значении числа Маха

$$\mathrm{M}_i = \sqrt{\left(6\varepsilon - 1 + \sqrt{1 + 20\varepsilon + 4\varepsilon^2}\,\right)/(8\varepsilon)} = 1{,}257$$

в точке $J = 1$ возникает локальный минимум функции $\mathrm{M}'_w(J)$ (рис. 8,*б*). С ростом числа Маха точка минимума смещается в сторону повышения интенсивности скачка (кривая *14* на рис. 2,*б*) и описывается пределом

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \frac{J}{\mathrm{M}^2} = D,$$

где $D = 0{,}641$ — корень уравнения

$$(3+\varepsilon)D^4 - 2(1-\varepsilon^2)(3-\varepsilon)(2+\varepsilon)D^3 + 2(1+\varepsilon)(9+5\varepsilon-8\varepsilon^2-2\varepsilon^3)D^2 - 6(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)^3 D + 3(1+\varepsilon)^3 = 0.$$

В отличие от случаев $J \to 1$ и $J \to J_p$ функция M'_w в точке своего локального минимума конечна даже при $\mathrm{M} \to \infty$ (ее предел равен 0,258 при $\gamma = 1{,}4$). Конечны и предельные значения функции M'_w при особых интенсивностях скачка:

$$\lim_{\substack{\mathrm{M}\to\infty\\ J=J_\Gamma}} \mathrm{M}'_w = \lim_{\substack{\mathrm{M}\to\infty\\ J=J_*}} \mathrm{M}'_w = \lim_{\substack{\mathrm{M}\to\infty\\ J=J_l}} \mathrm{M}'_w = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon}} = 0{,}454.$$

Таким образом, число Маха за скачком, уходящим от кромки сопла в плоской перерасширенной струе, растет при его удалении от кромки во всех практически важных случаях. Это означает, в частности, что за скачком интенсивности $J_*(\mathrm{M})$, когда число Маха на границе струи становится равным единице, течение в сжатом слое, по крайней мере вблизи кромки, является сверхзвуковым.

Согласно результатам [7] локальное падение статического давления и увеличение числа Маха за уходящим скачком, как правило, имеют место и в осесимметричных перерасширенных струях.

Дополнительное замечание. Отрыв потока от стенок сопла при слишком сильном перерасширении потока исключает реализацию найденных особенностей течения. Согласно [11] критическая интенсивность $J = 1/n$ скачка, вызывающего отрыв турбулентного пограничного слоя, оценивается по И. П. Некрасову:

$$J = 1 + 0{,}2\gamma\,\mathrm{M}^2\,(\mathrm{M}^2 - 1)^{-1/4}$$

или по Г. Гедду:

$$J = [(1 + 0{,}5(\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2)/(1 + 0{,}32(\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2)]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Кривые *15* и *16* на рис. 2,*а,б*, соответствующие этим нерасчетностям, показывают, что некоторые особенности течения при умеренных числах Маха обычно не реализуются. Однако большинство отмеченных особенностей (смена направления выпуклости скачка, падение его интенсивности и т. п.) соответствует области малых чисел Маха, в которой отрыв потока практически не возникает. Кроме того, существующие методы отсоса пограничного слоя сдвигают отрыв в область меньших нерасчетностей.

Заключение. Теоретически установлено, что многие параметры перерасширенной струи в окрестности кромки сопла принимают экстремальные значения. Это обстоятельство можно использовать для оптимизации струйных течений, управления их акустическим полем, вихреобразованием, а также отрывом потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глазнев В. Н., Запрягаев В. И., Усков В. Н. и др.** Струйные и нестационарные течения в газовой динамике. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. **Терехова Н. М.** Продольные вихри в осесимметричных струях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 6. С. 759–762.
3. **Терехова Н. М.** Динамика неустойчивых колебаний в сверхзвуковой струе // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 11–17.
4. **Терехова Н. М.** Продольные вихри в осесимметричных струях // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 45–57.
5. **Запрягаев В. И., Киселев Н. П., Павлов А. А.** Влияние кривизны линий тока на интенсивность продольных вихрей в слое смешения сверхзвуковых струй // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 32–43.
6. **Запрягаев В. И., Солотчин А. В., Киселев Н. П.** Исследование структуры сверхзвуковой струи при изменении геометрии входного участка сопла // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 58–64.
7. **Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1995.
8. **Усков В. Н.** Ударные волны и их взаимодействие. Л.: Изд-во Ленингр. мех. ин-та, 1980.
9. **Авдуевский В. С., Ашратов Э. А., Иванов А. В., Пирумов У. Г.** Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. М.: Машиностроение, 1989.
10. **Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулиншина Н. П.** Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М.: ВЦ АН СССР, 1961.
11. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 26/XI 2004 г.,
в окончательном варианте — 17/VIII 2005 г.