

УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

E-mail: algazinsd@mail.ru

Рассматривается задача о свободных колебаниях стержня со свободными концами переменных сечения и массы, к которому на пружинах подвешены сосредоточенные массы (осцилляторы). Установлено, что в этой колебательной системе возможны параметрические резонансы. Приведены примеры численных расчетов, которые подтверждают эффективность разработанной методики расчета.

Ключевые слова: свободные колебания, стержень переменных сечения и массы, осцилляторы.

Введение. В [1] рассмотрены задачи на собственные значения, когда решения соответствующих уравнений — гладкие функции. Однако некоторые задачи математической физики приводят к задачам на собственные значения с кусочно-гладкими функциями. В данной работе результаты [1] обобщаются на задачи с кусочно-гладкими функциями. Оценка погрешности предложенного метода приведена в [2]. Программы на Фортране приведены в [3].

1. Постановка задачи. Рассматривается стержень ($0 \leq x \leq L$) поперечного сечения $F(x)$ (вообще говоря, переменного), к которому подвешены массы m_k на пружинах (осцилляторы) с жесткостями c_k . Требуется определить свободные колебания этой системы.

Рассмотрим установившиеся колебания одного груза (осциллятора). Уравнение движения груза (осциллятора) имеет вид

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -c(z(t) - u(x^*, t)),$$

где m — масса груза; c — жесткость пружины; $z(t)$ — амплитуда осциллятора; $u(x^*, t)$ — перемещение точки подвеса $x = x^*$ осциллятора. Положим

$$z(t) = e^{i\omega t} z, \quad u(x, t) = e^{i\omega t} u(x).$$

Тогда

$$(u(x^*) - z)c + m\lambda z = 0, \quad \lambda = \omega^2.$$

Запишем уравнение движения стержня

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum F,$$

где σ — напряжение в стержне. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dx} EF(x) \frac{d}{dx} u(x) + \lambda m(x)u(x) - \sum_{k=1}^n c_k(u_k - z_k)\delta(x - x_k) = 0; \quad (1.1)$$

$$c_k(u_k - z_k) + \lambda m_k z_k = 0, \quad \lambda_k = c_k/m_k; \quad (1.2)$$

$$EF(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0,L} = 0. \quad (1.3)$$

Граничные условия (1.3) означают, что концы стержня свободны. Введем в рассмотрение функцию Грина $U = U(x, y)$ как решение следующей задачи:

$$\frac{d}{dx} EF(x) \frac{d}{dx} U(x, y) + \delta(x - y) - \frac{m(x)}{M} = 0, \quad 0 < y < L; \quad (1.4)$$

$$EF(x) \frac{dU(x, y)}{dx} \Big|_{x=0,L} = 0; \quad (1.5)$$

$$\int_0^L m(x)U(x, y) dx = 0. \quad (1.6)$$

Заметим, что уравнение (1.1) можно рассматривать как статическое, т. е. как задачу о растяжении стержня переменного поперечного сечения под действием массовой силы $(-\lambda m(x)u(x))$ и сосредоточенных сил. В силу этого замечания имеем две упругие системы (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6) по теореме взаимности Бетти: работа сил первой системы на перемещениях второй системы равна работе сил второй системы на перемещениях первой системы. В результате получаем

$$u(x) + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k = \lambda \int_0^L U(x, \xi) m(\xi) u(\xi) d\xi + \lambda \sum_{k=1}^n m_k z_k U(x, x_k); \quad (1.7)$$

$$\lambda_k(u_k - z_k) + \lambda z_k = 0, \quad \lambda_k = c_k/m_k \quad (1.8)$$

($u_k = u(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ — значение перемещения в точке крепления k -го осциллятора).

Таким образом, для определения амплитуд свободных колебаний $u(x)$, z_1, z_2, \dots, z_n и соответствующей частоты λ имеем систему однородных интегроалгебраических уравнений (1.7), (1.8). Для случая вынужденных колебаний имеем неоднородное интегральное уравнение.

2. Квадратурная формула. Для дискретизации интегрального уравнения (1.7) применяется квадратурная формула

$$c_k = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} m(x) S_k(x) dx, \quad (2.1)$$

где

$$S_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x \in [x_k, x_{k+1}], \end{cases} \quad k = 2, \dots, N-1;$$

$$S_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_0, x_1], \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, & x \in [x_1, x_2]; \end{cases} \quad S_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 1, & x \in [x_N, L]; \end{cases}$$

$m(x)$ — кусочно-линейная функция, точки разрыва (излома) которой совпадают с узлами сетки. Таким образом, на каждом отрезке функция $m(x)$ линейна. Пусть на i -м интервале $m(x) = a_i x + b_i$, где a_i, b_i — некоторые константы.

Для упрощения программирования используем формулу Симпсона

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2].$$

Обозначим $x_k^* = (x_k + x_{k-1})/2$, $x_{k+1}^* = (x_{k+1} + x_k)/2$. Тогда при $k = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} m(x) S_k(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} m(x) S_k(x) dx = \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{6} [m(x_{k-1}) S_k(x_{k-1}) + 4m(x_k^*) S_k(x_k^*) + m(x_k) S_k(x_k)] + \\ &\quad + \frac{x_{k+1} - x_k}{6} [m(x_k) S_k(x_k) + 4m(x_{k+1}^*) S_k(x_{k+1}^*) + m(x_{k+1}) S_k(x_{k+1})]. \end{aligned}$$

Здесь

$$S_k(x_{k-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq N, \\ 1, & k = N; \end{cases} \quad S_k(x_{k+1}) = \begin{cases} 0, & k \neq N, \\ 1, & k = N; \end{cases} \quad S_k(x_k) = 1.$$

3. Дискретизация. Вычисляя в (1.7) интегральное слагаемое по квадратурной формуле (2.1), получаем конечномерную задачу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & m_1/M & \dots & m_n/M \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & m_1/M & \dots & m_n/M \\ & & & \lambda_1 & \dots & 0 \\ & J & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & U\hat{M} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$E \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = \lambda D \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} U(x, \xi) m(\xi) S_k(\xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ A_{ik} &= A_k(x_i), \quad k, i = 1, 2, \dots, N; \\ \int_0^L U(x, \xi) m(\xi) u(\xi) d\xi &= \sum_{k=1}^N c_k A_k(x) u_k \end{aligned}$$

(если положить $u(\xi) = \sum_{k=1}^N u_k S_k(\xi)$, $u_k = u(x_k)$); J — матрица $n \times N$, у которой в k -й строке ($k = 1, 2, \dots, n$) на месте $j(k)$ стоит $-\lambda_k$, а остальные элементы в этой строке нулевые ($j(k)$ — целая функция, которая номеру осциллятора k ставит в соответствие номер узла сетки); U — матрица размера $N \times n$; $U_{ik} = U(x_i, x_{j(k)})$; $\hat{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ — диагональная матрица размера $n \times n$.

В соотношении (3.1) можно обратить матрицу E аналитически и в результате получить конечномерную задачу вида

$$v = \lambda E^{-1} D v, \quad v = (u, z),$$

где

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} I_N + m(\Lambda - Jm)^{-1}J & -m(\Lambda - Jm)^{-1}J \\ -(\Lambda - Jm)^{-1}J & (\Lambda - Jm)^{-1} \end{pmatrix};$$

$$m = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}; \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(m — матрица размера $N \times n$);

$$E^{-1}D = \begin{pmatrix} (I_N + m\hat{\Lambda}J)A & (I_N + m\hat{\Lambda}J)U\hat{M} - m\hat{\Lambda} \\ -\hat{\Lambda}JA & -\hat{\Lambda}JU\hat{M} + \hat{\Lambda} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Заметим, что $Jm = -\Lambda\hat{m}$, и, следовательно, $\hat{\Lambda} = (I_n + \hat{m})^{-1}\Lambda^{-1}$, где

$$\hat{m} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

есть матрица размера $n \times n$. Матрицу $I_n + \hat{m}$ нетрудно обратить аналитически. Обозначим

$$p_i = \left(1 + \frac{1}{M} \sum_{i \neq j} m_j\right) / \left(1 + \frac{1}{M} \sum_j m_j\right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(I_n + \hat{m})^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 - 1 & \dots & p_n - 1 \\ p_1 - 1 & p_2 & \dots & p_n - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & \dots & p_n \end{pmatrix} = P.$$

Тогда

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 - 1 & \dots & p_n - 1 \\ p_1 - 1 & p_2 & \dots & p_n - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для удобства программирования (3.2) запишем следующим образом:

$$E^{-1}D = \begin{pmatrix} A + m\hat{\Lambda}JA & U\hat{M} + m\hat{\Lambda}(JU\hat{M} - I) \\ -\hat{\Lambda}JA & \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}JU\hat{M} \end{pmatrix}.$$

4. Примеры численных расчетов. В качестве примера численного расчета рассматривалась однородная балка $EF(x) = 1$, $m(x) = 1$ единичной длины. Выбиралась равномерная сетка из 68 внутренних узлов. В 18-м и 36-м узлах к балке прикреплялись осцилляторы массами 0,1 с частотами 5 и 6. Получены первые пять собственных частот: 4,7240; 6,4569; 10,7744; 40,8333; 89,3858. На рис. 1–5 приведены соответствующие этим частотам собственные формы.

Описанная выше задача решалась как для постоянных распределений $EF(x) = \text{const}$, $m(x) = \text{const}$, так и для кусочно-линейных, причем функции $EF(x)$ и $m(x)$ имели несколько разрывов. Для контроля методики при $EF(x) = 1$ и $m(x) = 1$ задача сводилась к обобщенной проблеме собственных значений для мероморфной λ -матрицы $A(\lambda)$. Сравнение расчетов по этим методикам показывает, что спектр задачи состоит из двух частей: возмущенных частот осцилляторов и возмущенных частот стержня без осцилляторов. Первая группа частот определяется практически точно. Например, минимальное собственное значение в системе с 14 осцилляторами определено с абсолютной погрешностью 10^{-8} . С высокой точностью совпадают также амплитуды осцилляторов, вычисленные двумя способами. Вторая группа частот вычисляется с погрешностью $O(h)$.

Расчеты для общего случая проводились при кусочно-линейных функциях $EF(x)$ и $m(x)$, имеющих несколько десятков изломов и несколько разрывов. Проводилось сравнение с расчетами методом стрельбы. В случае, когда методом стрельбы удавалось вычислить собственные значения, результаты качественно совпадали с результатами, полученными для однородного стержня.

В конкретных расчетах выписанные выше уравнения приводились к безразмерному виду. В качестве характерных массы и длины принимались масса балки без осцилляторов и длина балки, в качестве характерного времени — величина $1/W_{\max}$, где W_{\max} — характерная частота (конец расчетного диапазона). Расчеты проводились как с методической целью, так и с целью исследования возникновения параметрического резонанса в сложной колебательной системе.

Проводились расчеты для стержня с 14 осцилляторами. В одном расчете восемь из них имели одинаковую частоту λ_0 , а один осциллятор (второй) — частоту, близкую к λ_0 . Остальные осцилляторы имели различные частоты. Расстояние между одной парой осцилляторов с частотой λ_0 (5-й и 6-й осцилляторы) составляло $3 \cdot 10^{-3}$ % длины стержня, а между другой парой (12-й и 13-й осцилляторы) — 4,5 % длины стержня.

Было проведено четыре расчета: 1) $EF(x) \equiv 1$, $m(x) \equiv 1$; 2) $EF(x) \equiv 1$, $m(x) \neq 1$; 3) $EF(x) \neq 1$, $m(x) \neq 1$; 4) $EF(x) \neq 1$, $m(x) \equiv 1$. Во всех расчетах вид функций $EF(x)$ и $m(x)$ (когда они не были тождественно равны единице) был одинаков, использовалась одинаковая сетка, массы, частоты и расположение осцилляторов не менялись.

Оказалось, что рассматриваемая колебательная система имеет частоту, близкую к λ_0 , но несколько меньшую. Для вариантов 1 и 2 различие составляло $2,8 \cdot 10^{-3}$ %, а для вариантов 3 и 4 — $1,3 \cdot 10^{-3}$ %. Максимальную амплитуду имел 6-й осциллятор, амплитуда 5-го осциллятора составляла примерно 60 % амплитуды 6-го. Другие осцилляторы имели следующие амплитуды: 0,1 % (1, 2 и 7-й); $0,1 \cdot 10^{-3}$ % (3-й и 4-й); $10^{-5} \div 10^{-13}$ % (8–14-й) амплитуды 6-го осциллятора. Точки подвеса осцилляторов имеют амплитуды не более 0,01 % амплитуды 6-го осциллятора.

Таким образом, все осцилляторы, кроме 5-го и 6-го, почти неподвижны, подвижные осцилляторы (5-й и 6-й) колеблются в противофазе (амплитуды имеют разные знаки), причем выполняется приближенное равенство

$$\frac{\text{амплитуда 6-го осциллятора}}{\text{амплитуда 5-го осциллятора}} = - \frac{\text{масса 5-го осциллятора}}{\text{масса 6-го осциллятора}}.$$

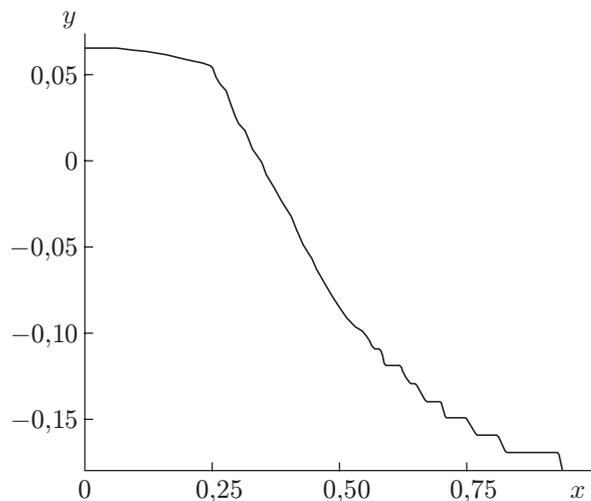


Рис. 1

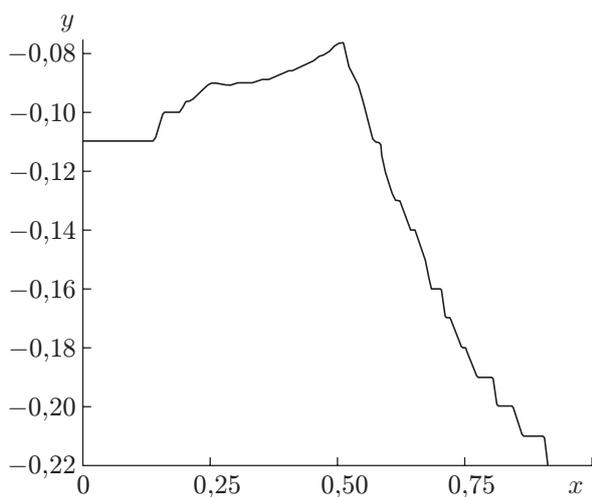


Рис. 2

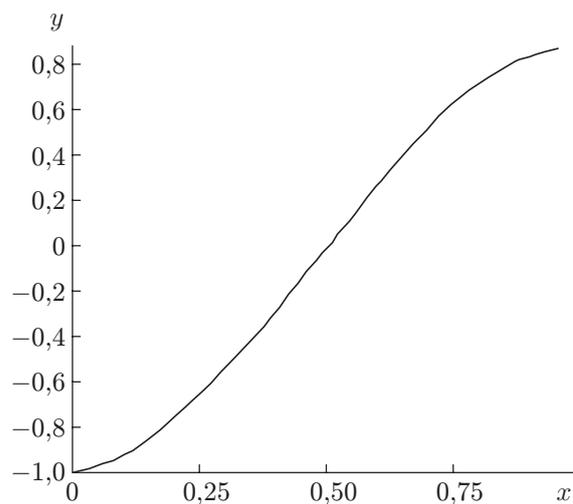


Рис. 3

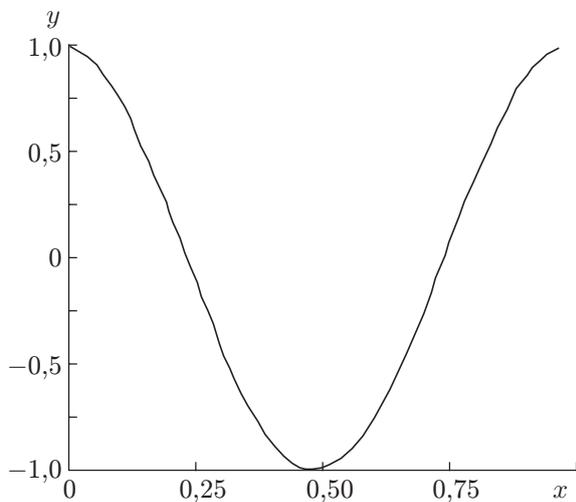


Рис. 4

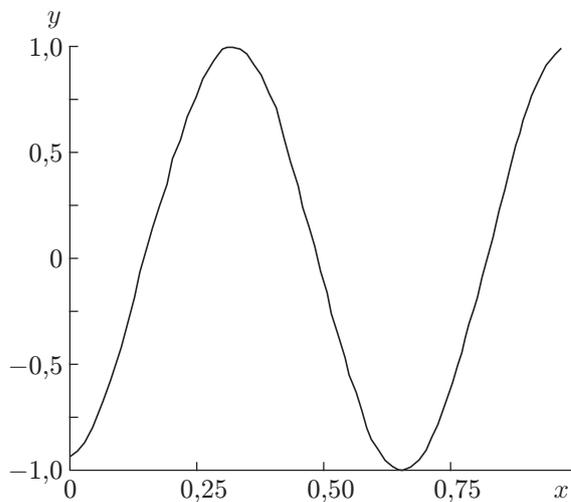


Рис. 5

Из этого равенства следует, что силы, действующие на стержень в точках крепления 5-го и 6-го осцилляторов, противоположно направлены и почти равны по величине (в расчете различие составило 1,5 %). По сравнению с этими силами действующие на стержень силы от других осцилляторов составляют не более 0,01 %.

Для варианта 1 был проведен другой расчет. Тринадцатый и двенадцатый осцилляторы были подвешены на расстоянии $2,6 \cdot 10^{-3}$ % длины стержня друг от друга. В этом случае у системы появились две частоты, близкие к λ_0 (обе меньшие, чем λ_0). При одной из этих частот (отличающейся от λ_0 примерно на $2,8 \cdot 10^{-3}$ %) с большей амплитудой колеблются 5-й и 6-й осцилляторы, при другой (отличающейся от λ_0 примерно на $4,1 \cdot 10^{-4}$ %) — 12-й и 13-й осцилляторы. Качественно картина колебания та же, что и описанная выше, но во втором случае ярче выражена.

Для варианта 3 был проведен расчет с измененной частотой 2-го осциллятора (частота была увеличена в 100 раз). Частота системы, близкая к λ_0 , практически не изменилась. Амплитуды осцилляторов (при колебании системы с частотой, близкой к λ_0) возросли (кроме амплитуд 5-го и 6-го осцилляторов), но качественно картина аналогична описанной выше.

В последнем расчете для варианта 3 шестой и пятый осцилляторы были разнесены на расстояние, равное 1 % длины стержня. Описанное выше явление исчезло, ближайшая к λ_0 частота колебательной системы составляла 6 % величины λ_0 . Результаты расчетов для варианта с 14 осцилляторами приведены в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Науч. мир, 2002.
2. **Алгазин С. Д.** Численное исследование резонансов в некоторых сложных колебательных системах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 155–159.
3. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 9. Численное исследование свободных колебаний стержня с осцилляторами. М., 2004. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 755).

*Поступила в редакцию 11/II 2005 г.,
в окончательном варианте — 30/VIII 2005 г.*
