УДК 532.54
DOI: 10.15372/PMTF202215220

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ РЕЖИМ КОНВЕКЦИИ НАНОЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАВИТАЦИИ

П. Киран, С. Х. Манджула*

Технологический институт Чайтаньи Бхарати, Хайдарабад, Индия
*Университет науки, технологий и исследований Вигнана, Вадламуди, Индия
E-mails: pallekiran_maths@cbit.ac.in, manjubknd.bk@gmail.com

С использованием теории комплексного матричного дифференциального оператора и методов исследования колебаний конечной амплитуды изучена нелинейная конвекция наножидкости в пористой среде при наличии модулированной гравитации. Конечная амплитуда конвекции при наличии g-джиттера получена из условия разрешимости задачи третьего порядка. Для расчета тепломассопереноса через пористую среду используется анализ малоамплитудных колебаний. Для оценки тепломассопереноса вычисляются числа Нуссельта со вторым порядком приближения как функции конечной амплитуды. Установлено, что изменение гравитационного поля может оказывать существенное влияние на тепломассоперенос. Показано, что для улучшения тепломассопереноса колебательный режим является более предпочтительным, чем стационарный.

Ключевые слова: конвекция наножидкости, анализ процессов переноса, комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау, численный анализ, g-джиттер, нелинейная теория

Введение. В отличие от обычных жидкостей наножидкости эффективно переносят тепло и массу. Изучению конвективной неустойчивости наножидкостей посвящено большое количество работ. Результаты исследований наножидкостей приведены в работах [1–6]. В [7] с использованием модели Буонджорно изучено трехмерное течение наножидкости вдоль растягивающегося листа. Обнаружено, что при броуновском движении скорость теплообмена чрезвычайно мала. С увеличением числа Вайсенберга скорость жидкости уменьшается. В работах [1–7] исследовался тепломассоперенос при естественной конвекции наножидкости. Естественная конвекция в наножидкостях используется во многих приложениях, например в ядерных реакторах, для доставки нанолекарств. Как известно, теплопроводность некоторых металлов больше теплопроводности обычных жидкостей. Частицы таких металлов вводятся в базовые жидкости, что позволяет увеличить их теплопроводность на 15–40 %. В работе [8] для решения одномерных линейных и нелинейных задач конвекции и диффузии использован бессеточный метод, основанный на использовании радиальной базисной функции Гаусса.

В работе [9] обнаружено, что температура оказывает существенное влияние на увеличение критического теплового потока в наножидкостях по сравнению с базовыми жидкостями. В [10] исследована зависимость от температуры теплофизических характеристик наножидкостей, включая перепад давления и коэффициент теплопереноса. С использованием теории броуновской диффузии и теории термофореза наножидкостей в работе [11] изучен конвективный перенос в наножидкостях. В работе [12] установлено, что в турбулентном потоке энергоемкость наножидкостей увеличивается. Аналитическое исследование конвекции в нанопорах выполнено в работе [13]. В [14] изучена наноконвекция Дарси и установлено, что локальная тепловая неустойчивость (LTN) существенна при малых числах Льюиса. В [15] с использованием модели Бринкмана исследована тепловая неустойчивость в пористом слое, заполненном наножидкостью, при различных краевых условиях.

В работе [16] проведен нелинейный анализ конвекции наножидкостей во вращающейся пористой среде и получены численные решения нелинейной системы связанных уравнений тепломассопереноса. Установлено, что вращение влияет на процесс переноса. В [17] исследовано влияние вращения и анизотропии пористой среды на конвекцию наножидкости. Обнаружено, что анизотропия и вращение оказывают различное влияние на устойчивость. Различные граничные условия, при которых объемная доля наночастиц саморегулируется при наличии термофореза, рассмотрены в работе [18]. В [19] исследована наноконвекция во вращающейся пористой среде, в [20] — влияние LTN на бинарную наноконвекцию с учетом вращения.

В большинстве работ наноконвекция в жидком или пористом слое изучается без учета модуляции. В [21] для исследования влияния вязкой диссипации, плавления и химической реакции на поток наножидкостей Вильямсона и Максвелла вдоль растягивающегося листа использован метод ящика Келлера. В [22] с использованием метода спектральной квазилинеаризации гомо- и гетерогенных реакций при нелинейной конвекции установлено, что при увеличении параметров гомогенной и гетерогенной реакции уменьшается как концентрация частиц, так и скорость массопереноса.

Тепловая и гравитационная модуляции в линейном приближении впервые исследованы в работах [23, 24]. Сдвиг критического числа Рэлея получен как функция волнового числа. Результаты работ [23, 24] показывают, что при соответствующей настройке Ω-частоты и δ-амплитуды модуляции можно контролировать устойчивость процесса.

Влияние модуляции температуры на конвекцию наножидкости было изучено в работе [25] с использованием модели Гинзбурга — Ландау без учета термофоретической диффузии и нелинейной зависимости объемной доли наночастиц от скорости.

В работе [26] исследовано влияние модуляции расхода и гравитации на тепловую неустойчивость в ячейке Хеле-Шоу, насыщенной наножидкостью, и установлено, что увеличение расхода приводит к увеличению тепломассопереноса. Влияние модуляции расхода и гравитации на устойчивость нагретого пористого слоя исследовано в [27], влияние различных типов модуляции магнитного поля на насыщенный наножидкостью слой внутри ячейки Хеле-Шоу — в [28]. В работе [29] с использованием линейного анализа устойчивости изучено влияние модуляции тепла на возникновение конвекции наножидкостей в пористой среде.

В работе [30] с учетом модуляции силы тяжести исследована нелинейная тепловая конвекция в пористом слое, насыщенном наножидкостью. В [31, 32] обобщена модель, предложенная в [30], и на ее основе изучен внутренний нагрев вследствие гравитационной модуляции. В [33] исследовано влияние g-джиттера на нелинейную тепловую конвекцию в пористом слое, насыщенном вязкой наножидкостью. В работах [34, 35] изучено влияние центробежной силы и внутреннего нагрева на наноконвекцию при наличии термомодуляции. Установлено, что фазовая модуляция (OPM) и модуляция по нижней границе (LBM) способствуют увеличению тепломассопереноса. В [36] исследовано влияние модулированных источника и стока тепла на наноконвекцию в пористой среде и показано, что при соответствующей настройке внутренняя тепловая модуляция повышает устойчивость слоя.

Авторам данной работы не известны работы, в которых исследуется нелинейный режим колебательной наноконвекции. Проведены многочисленные исследования устойчивости с использованием линейного и нелинейного анализа и метода укороченных рядов Фурье. Также изучена слабая нелинейная колебательная конвекция жидкости в пористой среде при наличии модуляции и в ее отсутствие. Установлено, что модуляцию можно использовать для управления устойчивостью и процессами переноса. В работах [37, 38] исследована устойчивость как стационарной, так и колебательной конвекции тепла в наножидкости при наличии модуляции и обнаружено, что в колеблющемся потоке процесс переноса является более интенсивным по сравнению со стационарным потоком. Также установлено, что влияние гравитационной модуляции аналогично влиянию модуляции нижней границы температуры. В работах [37, 38] конвекция в наножидкостях впервые изучена с использованием моделей Гинзбурга — Ландау и комплексного уравнения Гинзбурга — Ландау.

Авторам не известны работы, в которых модель Гинзбурга — Ландау используется для исследования колебательной конвекции в наножидкости при наличии g-джиттера. В данной работе с использованием комплексного уравнения Гинзбурга — Ландау выполнен нелинейный анализ тепловой неустойчивости в пористом слое, насыщенном наножидкостью, при наличии модуляции гравитации. Конечная амплитуда вибраций наноконвекции при наличии зависящего от времени гравитационного поля получена на основе решения задачи в третьем приближении.

1. Основные уравнения. Рассматривается насыщенный наножидкостью пористый слой, расположенный между двумя горизонтальными стенками $z = 0$ и $z = d$ соответственно. Слои являются полностью проводящими и непроницаемыми. Толщина слоя в направлении оси z равна d. В направлениях осей x, y слой бесконечен. Температура нижней и верхней стенок равна T_h и T_c соответственно ($T_h > T_c$). Основные уравнения, описывающие тепловую неустойчивость в пористой среде, насыщенной наножидкостью, основаны на приближении Обербека — Буссинеска [11, 14, 36]. Уравнения задачи записываются в виде [37–39]

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot v_{\mathrm{D}} = 0,\\
\frac{\rho_f}{\delta}\,\frac{\partial v_{\mathrm{D}}}{\partial \tau} + \nabla p = -\frac{\mu}{K}\,v_{\mathrm{D}} + [\varphi\rho_p + \{\rho(1-\beta(T-T_c))\}(1-\varphi)]\boldsymbol{g},\\
\gamma\,\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_m}\,v_{\mathrm{D}}\cdot\nabla T = \frac{1}{(\rho c)_m}\,k_m\nabla^2 T + \frac{\delta(\rho c)_p}{(\rho c)_m}\,D_{\mathrm{B}}\nabla\varphi\cdot\nabla T,\\
\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\delta}\,v_{\mathrm{D}}\cdot\nabla\varphi = D_{\mathrm{B}}\nabla^2\varphi,\\
\boldsymbol{g} = g_0(1+\delta_1\cos(\Omega\tau))\boldsymbol{k},
\end{gathered}
$$

где v_{D} — скорость Дарси; D_{B} — коэффициент броуновской диффузии; k_m — коэффициент термодиффузии пористой среды; φ — объемная доля наночастиц; p — давление; $\boldsymbol{g}$ — модулированное поле силы тяжести. В предположении, что на свободной от напряжений границе температура и объемная доля наночастиц постоянны, краевые условия для функций T, φ на этой границе задаются в виде

$$
\begin{aligned}
z = 0&: \qquad (v, T, \varphi) = (0, T_h, \varphi_0),\\
z = d&: \qquad (v, T, \varphi) = (0, T_c, \varphi_1),
\end{aligned}
$$

где $\varphi_1 > \varphi_0$. Введем следующие безразмерные величины:

$$
X^* = \frac{X}{d}, \quad \tau^* = \frac{k_T}{\gamma d^2}\,\tau, \quad v_d^* = \frac{d}{k_T}\,v_d, \quad p^* = \frac{K}{\mu k_T}\,p, \quad \varphi^* = \frac{\varphi-\varphi_0}{\varphi_1-\varphi_0},
$$

$$
T^* = \frac{T-T_c}{T_h-T_c}, \quad k_T = \frac{k_m}{(\rho c)_f}, \quad \gamma = \frac{(\rho c_p)_m}{(\rho c_p)_f}
$$

(k_T — коэффициент эффективной теплопроводности (коэффициент теплопроводности) пористой среды). Уравнения и краевые условия в безразмерных переменных записываются в виде

$$\nabla \cdot v = 0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Va}} \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\nabla p - v - g_m(\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_T T + \mathrm{R}_n \varphi)\hat{e}_z; \tag{2}$$

$$v \cdot \nabla T = -\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla^2 T + \frac{N_{\mathrm{B}}}{\mathrm{Le}} \nabla\varphi \cdot \nabla T; \tag{3}$$

$$v \cdot \nabla\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\mathrm{Le}} \nabla^2 \varphi; \tag{4}$$

$$z = 0: \quad (v, T, \varphi) = (0, 1, 0), \qquad z = 1: \quad (v, T, \varphi) = (0, 0, 1), \tag{5}$$

где $g_m = 1 + \varepsilon^2 \delta_1 \cos(\Omega t)$. Другие безразмерные параметры определены следующим образом: число Вадаша $\mathrm{Va} = \delta \mathrm{Pr}/\mathrm{Da}$, число Льюиса $\mathrm{Le} = k_T/D_{\mathrm{B}}$, безразмерный модифицированный параметр приращения плотности частиц $N_{\mathrm{B}} = \delta(\rho c)_p(\varphi_1 - \varphi_0)/(\rho c)_f$, число Рэлея — Дарси $\mathrm{R}_a = \rho g_0 \beta K d(T_h - T_c)/(\mu k_T)$, число Рэлея, характеризующее плотность, $\mathrm{R}_m = [\rho_p \varphi_0 + \rho(1 - \varphi_0)] g_0 K d/(\mu k_T)$, число Рэлея, характеризующее концентрацию, $\mathrm{R}_n = (\rho_p - \rho)(\varphi_1 - \varphi_0) g_0 K d/(\mu k_T)$.

Предполагается, что в исходном состоянии наножидкость находится в состоянии покоя. Поэтому физические величины в исходном состоянии зависят только от переменной z:

$$v = 0, \quad p = p_b(z), \quad \varphi = \varphi_b(z), \quad T = T_b(z). \tag{6}$$

С учетом (6) из уравнений (1)–(3) следует

$$\frac{d^2 T_b}{dz^2} + N_{\mathrm{B}} \,\mathrm{Le}^{-1} \frac{d\varphi_b}{dz} \frac{dT_b}{dz} = 0. \tag{7}$$

Согласно [11–13] из уравнений (4), (7) следует

$$\Big(\frac{d^2 T_b}{dz^2}, \frac{d^2 \varphi_b}{dz^2}\Big) = (0, 0). \tag{8}$$

Уравнения (8) справедливы только при $\mathrm{Le} \gg 1$. Из (5) следуют краевые условия для уравнений (8)

$$z = 0: \quad (T_b, \varphi_b) = (1, 0), \qquad z = 1: \quad (T_b, \varphi_b) = (0, 1).$$

Решения уравнений (8) имеют вид

$$(T_b(z), \varphi_b(z)) = (1 - z/d, z/d).$$

2. Анализ нелинейной тепловой неустойчивости. Пусть на начальное состояние X_b наложено возмущение X':

$$X = X_b + X'. \tag{9}$$

Здесь $X = (v, p, T, \varphi)$. Подставляя (9) в уравнения (1), (4), получаем [37]

$$\begin{gathered}
\Big(\mathrm{Va}^{-1} \frac{\partial}{\partial s} + 1\Big) \nabla^2 \psi = \mathrm{R}_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} g_m - \mathrm{R}_T \frac{\partial T}{\partial x} g_m, \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} + \Big(\gamma \frac{\partial}{\partial s} - \nabla^2\Big) T = \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)}, \\
-\frac{1}{\delta_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Big(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{\mathrm{Le}} \nabla^2\Big) \varphi = \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(x, z)}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Система нелинейных уравнений (10) решается методом возмущений с использованием медленных вариаций времени [30, 31, 36–38]. Для уравнений (10) на границах, свободных от напряжений, ставятся следующие краевые условия, соответствующие постоянным температуре и концентрации наночастиц на этих границах:

$$z = 0,\ 1: \qquad (\psi, T, \varphi) = (0, 0, 0).$$

3. Перенос тепла и массы. В уравнениях (10) используются следующие асимптотические разложения:

$$\mathrm{R}_T = \mathrm{R}_{0c} + \varepsilon^2 \mathrm{R}_2 + \varepsilon^4 \mathrm{R}_4 + \ldots, \qquad X = \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \varepsilon^3 X_3 + \ldots.$$

Здесь $X = (\psi, T, \varphi)$; R_{0c} — критическое значение числа Рэлея, при котором возникает конвекция в отсутствие модуляции силы тяжести. Система уравнений (10) решается для параметра ε различного порядка. Согласно [38, 39] при изучении медленной конвекции вводятся быстрое время τ и медленное время s:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial s}.$$

Система наименьшего порядка имеет вид

$$M \begin{bmatrix} \psi_1 \\ T_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где

$$M = \begin{bmatrix} (\mathrm{Va}^{-1}\, \partial/\partial\tau + 1)\nabla^2 & \mathrm{R}_{0c}\, \partial/\partial x & -\mathrm{R}_n\, \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & \gamma\, \partial/\partial\tau - \nabla^2 & 0 \\ -\delta^{-1}\, \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial\tau - \mathrm{Le}^{-1}\, \nabla^2 \end{bmatrix}.$$

Решение системы (11) записывается следующим образом:

$$(\psi_1, T_1, \varphi_1) = [(P(s)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau} + \bar{P}(s)\, \mathrm{e}^{-i\omega\tau}) \sin(ax),\ (Q(s)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau} + \bar{Q}(s)\, \mathrm{e}^{-i\omega\tau}) \cos(ax),$$
$$(R(s)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau} + \bar{R}(s)\, \mathrm{e}^{-i\omega\tau}) \cos(ax)] \sin(\pi z),$$

где

$$(Q(s), R(s)) = \Big(-\frac{aP(s)}{c + i\omega\gamma}, -\frac{aP(s)}{\delta(c/\mathrm{Le} + i\omega)}\Big), \qquad c = a^2 + \pi^2.$$

Критическое число Рэлея и частота колебаний определяются выражениями

$$\mathrm{R}_{0c} = \frac{\mathrm{R}_n\, \mathrm{Le}\, (\omega^2 \gamma\, \mathrm{Le} + c^2)}{\delta(\omega^2\, \mathrm{Le}^2 + c^2)} + \frac{c}{a^2}\, (c - \omega^2 \gamma \mathrm{Va}\,), \qquad \omega^2 = \frac{\mathrm{R}_n a^2 (\mathrm{Le} - \gamma)}{\delta(\gamma + c\, \mathrm{Va})} - \frac{c}{\mathrm{Le}}.$$

Сверхустойчивость может иметь место для конкретного волнового числа a, при этом $\mathrm{Le} > \gamma$. Нелинейность системы проявляется во втором порядке:

$$M \begin{bmatrix} \psi_2 \\ T_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{R}_{21} \\ \mathrm{R}_{22} \\ \mathrm{R}_{23} \end{bmatrix}, \qquad (\mathrm{R}_{21}, \mathrm{R}_{22}, \mathrm{R}_{23}) = (0, J(\psi_1, T_1), J(\psi_1, \varphi_1)),$$

где J — якобиан. Согласно [32–36] для T_2 и φ_2 используются представления

$$(T_2, \varphi_2) = \{(T, \varphi)_{20} + (T, \varphi)_{22}\, \mathrm{e}^{2i\omega\tau} + \overline{(T, \varphi)_{22}}\, \mathrm{e}^{-2i\omega\tau}\} \sin(2\pi z).$$

Здесь $(T,\varphi)_{22}$, $(T,\varphi)_{20}$ — амплитуды колебаний температурных полей с частотой 2ω, не зависящие от быстрого времени. С использованием решений первого порядка

$$(T_{20},\varphi_{20}) = \Big(\frac{a}{8\pi}\,\{P(s)\bar{Q}(s) + \bar{P}(s)Q(s)\}, \frac{a\,\mathrm{Le}}{8\pi}\,\{P(s)\bar{R}(s) + \bar{P}(s)R(s)\}\Big)$$

получаем

$$(T_{22},\varphi_{22}) = \Big(\frac{\pi a}{8\pi^2 + 4i\omega}\,P(s)Q(s),\ \frac{\pi a\,\mathrm{Le}}{8\pi^2 + 4i\omega\mathrm{Le}}\,P(s)R(s)\Big).$$

Число Нуссельта $\mathrm{Nu}\,(\tau)$ для моды колебаний определяется выражением

$$\mathrm{Nu} = 1 + \Big(\frac{a^2c}{2(c^2+\omega^2\gamma^2)} + \frac{2\pi^2a^2}{4\sqrt{c^2+\omega^2\gamma^2}\sqrt{4\pi^2+\omega^2\gamma^2}}\Big)\,|P(s)|^2,$$

число Нуссельта для нанопотока массы — выражением

$$\mathrm{Nu}_\varphi = 1 + \Big(\frac{a^2\,\mathrm{Le}\,\Delta_1}{2\delta} + \frac{a^2\,\mathrm{Le}\,\pi^2}{2\delta}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Le}^2c^2+\omega^2\gamma^2\,\mathrm{Le}^2}}{\sqrt{4\pi^2+\omega^2\,\mathrm{Le}^2}\,\sqrt{c^2+\omega^2\gamma^2}\,\sqrt{c^2+\omega^2\gamma^2}}\Big)|P(s)|^2,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\mathrm{Le}\,c(c^2-\omega^2\,\mathrm{Le}\,\gamma) + \omega^2c(\mathrm{Le}+\gamma)\,\mathrm{Le}\,\gamma}{(c^2-\omega^2\,\mathrm{Le}\,\gamma)^2 + \omega^2c^2(\mathrm{Le}+\gamma)^2}.$$

Система третьего порядка имеет вид

$$M\begin{bmatrix}\psi_3\\ T_3\\ \varphi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{R}_{31}\\ \mathrm{R}_{32}\\ \mathrm{R}_{33}\end{bmatrix},$$

где

$$\begin{gathered}\mathrm{R}_{31} = -\frac{1}{\mathrm{Va}}\,\frac{\partial}{\partial s}\,(\nabla^2\psi_1) - \mathrm{R}_2\,\frac{\partial T_1}{\partial x} - \mathrm{R}_{0c}\,\delta_1\cos(\Omega s)\,\frac{\partial T_1}{\partial x} + \mathrm{R}_n\delta_1\cos(\Omega s)\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},\\ (\mathrm{R}_{32},\mathrm{R}_{33}) = \Big(-\gamma\,\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\frac{\partial T_2}{\partial z},\ -\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big).\end{gathered}\qquad(12)$$

Выражения для R_{31}, R_{32}, R_{33} упрощаются, если подставить ψ_1, T_1, φ_1 и T_2, φ_2 в уравнения (12). Из условия разрешимости системы третьего порядка следует уравнение Гинзбурга — Ландау для колебательного режима конвекции с периодическими по времени коэффициентами:

$$\frac{\partial P(s)}{\partial s} - Q_1P(s) + Q_2\,|P(s)|^2P(s) = 0. \qquad (13)$$

Здесь $Q_1 = F_1F_2$, $Q_2 = F_1F_3$,

$$F_1 = \frac{c}{\mathrm{Va}} + \frac{a^2\mathrm{R}_{0c}}{(c+i\omega\gamma)^2} - \frac{a^2\mathrm{R}_n\,\mathrm{Le}\,(c\,\mathrm{Le} + i\omega\,\mathrm{Le}\,\gamma)}{\delta(c+i\omega\gamma)(c+i\omega\,\mathrm{Le})^2},$$

$$F_2 = \frac{a^2\mathrm{R}_{0c}}{c+i\omega\gamma}\,(1+\delta_1\cos(\Omega s)) - \delta_1\cos(\Omega s)\,\frac{a^2\mathrm{R}_n(c\,\mathrm{Le}+i\omega\,\mathrm{Le}\,\gamma)}{\delta(c^2-\omega^2\,\mathrm{Le}\,\gamma + i\omega c(\mathrm{Le}+\gamma))},$$

$$F_3 = \frac{\mathrm{R}_{0c}}{c+i\omega\gamma}\Big(\frac{a^4c}{4(c^2+\omega^2\gamma^2)} + \frac{a^4\pi^2}{2(2\pi^2+i\omega\gamma)(c+i\omega\gamma)}\Big) - \frac{a^4\,\mathrm{Le}\,\mathrm{R}_n\,\Delta_1}{4\delta} + {}$$
$$+ \frac{a^4\pi^2\,\mathrm{Le}^2\mathrm{R}_n}{\delta(c+i\omega\,\mathrm{Le})(8\pi^2+4i\omega\,\mathrm{Le}\,)(c^2-\omega^2\,\mathrm{Le}\,\gamma + i\omega c(\mathrm{Le}+\gamma))}.$$

Выражение для амплитуды $P(s)$ представляется в виде

$$P(s) = |P(s)|\, \mathrm{e}^{i\varphi}\,. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует уравнение для $|P(s)|$

$$\frac{\partial\,|P(s)|^2}{\partial s} - 2p_r\,|P(s)|^2 + 2l_r\,|P(s)|^4 = 0,$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{ph}\,(P(s))}{\partial s} = p_i - l_i\,|P(s)|^2,$$

где $Q_1 = p_r + ip_i$; $Q_2 = l_r + il_i$; $\mathrm{ph}\,(\cdot)$ — сдвиг фаз.

4. Результаты исследования и их обсуждение. Проводится слабый нелинейный анализ наноконвекции Дарси при наличии g-джиттера. При определении амплитуды конвективного колебания третьего порядка для g-джиттера используется комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау. Амплитуда гравитационной модуляции имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Получить амплитудное уравнение с использованием такого допущения значительно проще, чем с использованием модели Лоренца. Известно, что с помощью нелинейной теории можно определить как тепло-, так и массоперенос. Также известно, что с использованием линейной теории можно определить момент, в который происходит потеря устойчивости. Тепловая неустойчивость в слое жидкости обусловлена тепловыми, гравитационными и вращательными модуляциями. В данной работе исследуется влияние модуляции g-джиттера на перенос тепла и массы. Ранее изучались только линейные модели с использованием конечного числа членов ряда Фурье. Для нелинейного описания конвекции наножидкости комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау не использовалось.

В настоящей работе с использованием комплексного уравнения Гинзбурга — Ландау исследуется слабая нелинейная наноконвекция при наличии модуляции.

На рис. 1–10 показано влияние g-джиттера на тепломассоперенос и на кривые устойчивости. Исследуется влияние параметров Va, R_n, Le, γ, δ, δ_1 на конвекцию и тепломассоперенос. Первые четыре переменные обусловливают влияние жидкости, параметры δ_1 и Ω характеризуют внешнее воздействие на систему. В расчетах используются малые значения Va, поскольку слой не является высоковязким. Значения δ_1 считаются малыми, так как значения амплитуды модуляции малы. Поскольку тепломассоперенос наиболее эффективен в низкочастотных диапазонах, модуляция гравитации полагается низкочастотной. При анализе слабой нелинейной устойчивости и переноса используется комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау. При оценке тепломассопереноса в слое числа Нуссельта вычисляются с использованием пакета Mathematica.

При малых значениях времени с увеличением числа Вадаша Va увеличиваются интенсивность теплопереноса и концентрация (рис. 1). Зависимость чисел Нуссельта Nu и Nu_φ от числа Вадаша Va такая же, как их зависимость от числа Прандтля.

Аналогичные исследования влияния числа Вадаша Va для наножидкостей проведены в работах [16–18, 20, 29, 40]. Обнаружено, что при небольших значениях Va изменяются процесс переноса тепла и концентрация. Уменьшение интенсивности тепломассообмена является существенным при отрицательных значениях числа Рэлея R_n. Следует отметить, что параметр R_n можно использовать для управления тепломассопереносом. Приведенные выше результаты аналогичны результатам, полученным в работах [17, 18, 20, 33–36].

Число Льюиса Le не оказывает существенного влияния на тепловое число Нуссельта Nu (см. [16, 32–36]). Поскольку число Льюиса Le обусловлено диффузией, оно оказывает существенное влияние на Nu_φ (рис. 2). С увеличением числа Льюиса увеличивается интенсивность массопереноса. Аналогичное влияние на Nu_φ оказывает число Рэлея R_n.

На рис. 3, 4 представлены зависимости числа Нуссельта Nu_φ от времени при различных значениях пористости δ и коэффициента теплоемкости γ соответственно. Значения δ

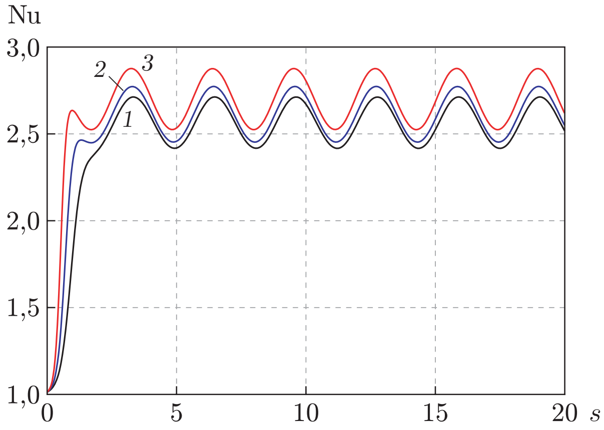

Рис. 1

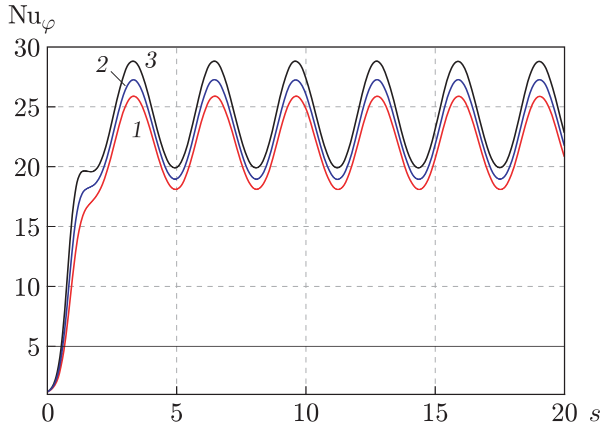

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость числа Нуссельта от времени s при различных значениях параметров Va и R_n:
1 — $\mathrm{Va} = 5$, $\mathrm{R}_n = 2{,}5$; *2* — $\mathrm{Va} = 6$, $\mathrm{R}_n = 3{,}0$; *3* — $\mathrm{Va} = 7$, $\mathrm{R}_n = 3{,}5$

Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта Nu_φ от времени при различных значениях числа Льюиса:
1 — $\mathrm{Le} = 105$, *2* — $\mathrm{Le} = 110$, *3* — $\mathrm{Le} = 115$

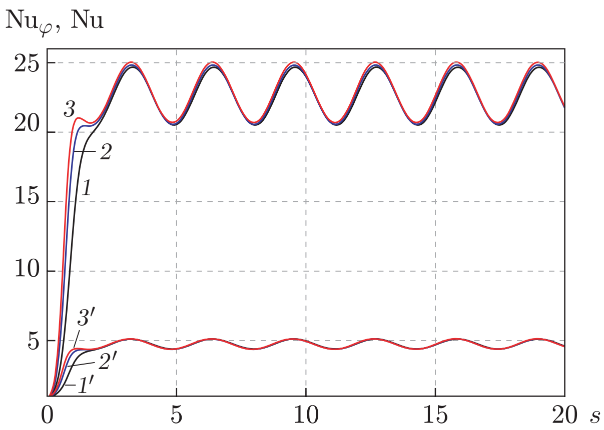

Рис. 3

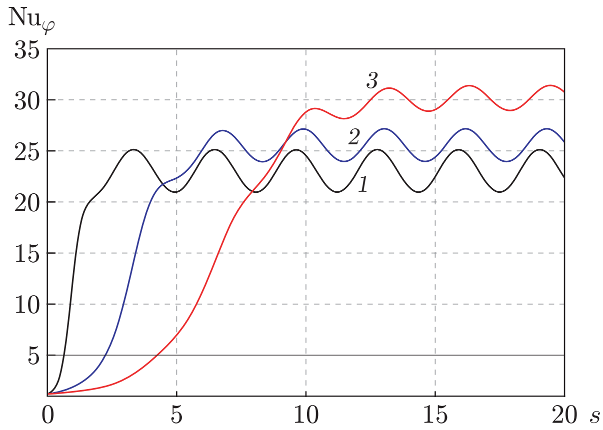

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость чисел Нуссельта Nu_φ (*1*–*3*) и Nu (*1′*–*3′*) от времени при различных значениях параметра δ:
1, *1′* — $\delta = 0{,}20$, *2*, *2′* — $\delta = 0{,}25$, *3*, *3′* — $\delta = 0{,}30$

Рис. 4. Зависимость числа Нуссельта Nu_φ от времени при различных значениях параметра γ:
1 — $\gamma = 0{,}020$, *2* — $\gamma = 0{,}025$, *3* — $\gamma = 0{,}030$

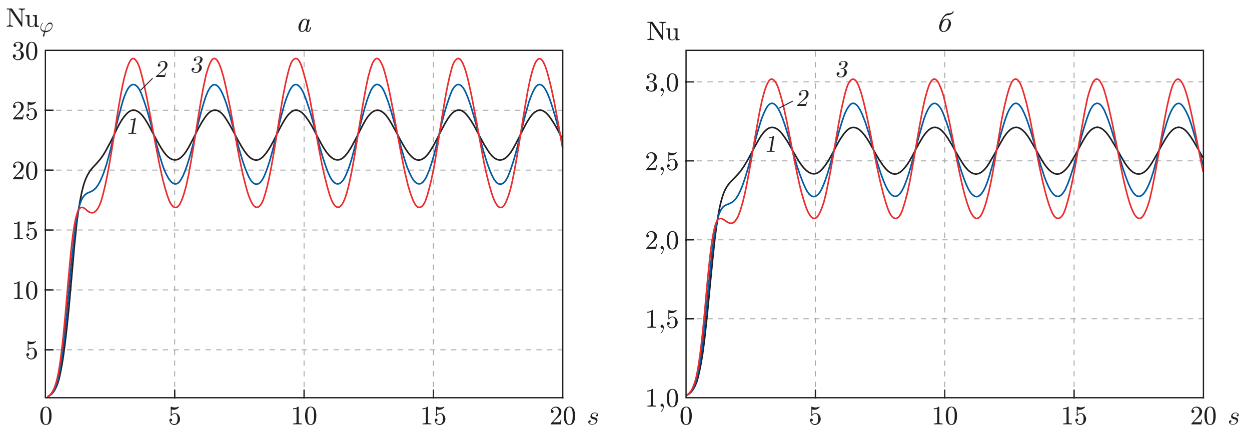

Рис. 5. Зависимости чисел Нуссельта Nu_φ (*а*) и Nu (*б*) от времени при различных значениях параметра модуляции δ_1:
1 — $\delta_1 = 0{,}1$, *2* — $\delta_1 = 0{,}2$, *3* — $\delta_1 = 0{,}3$

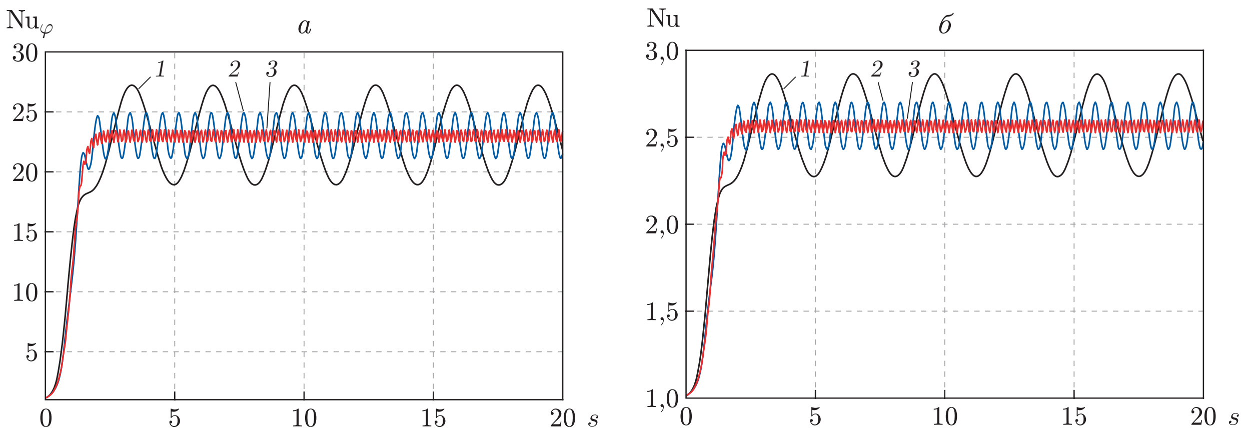

Рис. 6. Зависимости чисел Нуссельта Nu_φ (*а*) и Nu (*б*) от времени при различных значениях частоты модуляции Ω:
1 — $\Omega = 2$, *2* — $\Omega = 20$, *3* — $\Omega = 40$

находятся в диапазоне от 0 до 1, а значения γ близки к единице. Пористость оказывает влияние на перенос тепла при наличии конвекции Дарси. Это обусловлено тем, что скорость потока через поры в среде увеличивается по мере увеличения пористости. Данные результаты аналогичны результатам, полученным в работах [17, 18, 20, 36–38, 40].

На рис. 5 приведены зависимости чисел Нуссельта Nu_φ и Nu от времени при различных значениях параметра модуляции δ_1. При увеличении значения δ_1 в диапазоне $0{,}1 \div 0{,}5$ интенсивность тепломассопереноса увеличивается. Зависимости чисел Нуссельта Nu_φ и Nu от времени при различных значениях частоты модуляции Ω приведены на рис. 6. С увеличением Ω уменьшается интенсивность тепломассопереноса. Эти результаты согласуются с результатами работ [24, 32, 37].

На рис. 7, 8 приведены кривые устойчивости (зависимости критического числа Рэлея R_{0c} от волнового числа a), полученные с использованием линейной модели, учитывающей слабую нелинейность. Данные результаты показывают, что критическое значение R_{0c} увеличивается при значениях a, больших критического значения, при этом конвекция возникает быстрее.

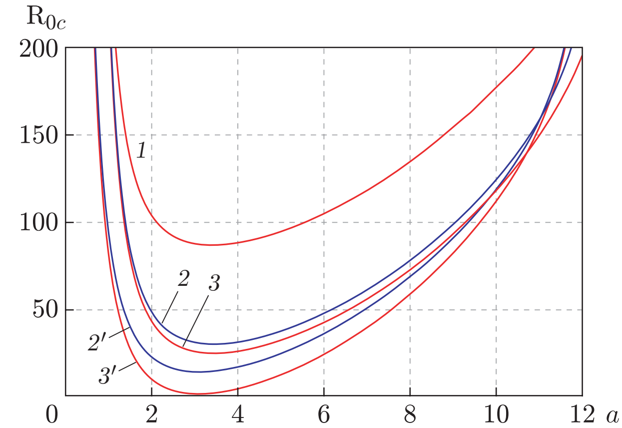

Рис. 7

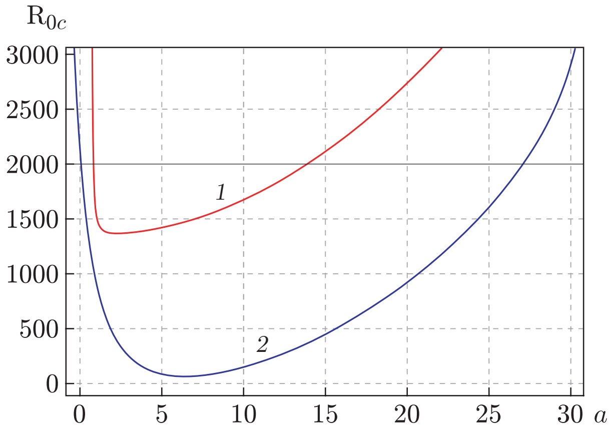

Рис. 8

Рис. 7. Зависимость критического числа Рэлея R_{0c} от волнового числа a при различных значениях параметров R_n и γ:
1 — $R_n = -3{,}0$, *2*, *3* — $\gamma = 0{,}02$ (*2* — $R_n = 2{,}5$, *3* — $R_n = 3{,}0$), *2′*, *3′* — $\gamma = 0{,}03$ (*2′* — $R_n = 2{,}5$, *3′* — $R_n = 3{,}0$)

Рис. 8. Кривые устойчивости в стационарном (*1*) и колебательном (*2*) режимах конвекции

При $R_n > 0$ зависимость $\mathrm{Le}\,(a)$ имеет аналогичный характер. Следует отметить, что с увеличением параметра пористости δ увеличивается критическое значение числа Рэлея R_{0c} и конвекция возникает позднее [17–19]. Зависимость $R_{0c}(\gamma)$ (см. рис. 7) является обратной зависимости $R_{0c}(\delta)$. В случае стационарного режима конвекции значения R_{0c} больше, чем в случае колебательного режима. Это означает, что колебательный режим конвекции возникает раньше, чем стационарный (см. [36, 37]). Следовательно, осцилляции приводят к увеличению интенсивности тепломассопереноса и их появление соответствует началу конвекции. В случае двумерной осциллирующей конвекции полученные результаты согласуются с результатами работ [16, 26, 31].

Результаты исследования стационарного и колебательного режимов конвекции как при наличии модуляции, так и в ее отсутствие приведены на рис. 9, 10 соответственно. В осциллирующем потоке интенсивность процессов переноса больше, чем в стационарном потоке. Из результатов, приведенных на рис. 9, следует, что при наличии модуляции интенсивность процесса тепломассопереноса увеличивается. Результаты, приведенные на рис. 9, 10, аналогичны результатам работ [36–38].

Линии тока и соответствующие изотермы при наличии g-джиттера могут быть построены для значений $s = 0$; $0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}0$ и для $\mathrm{Va} = 1{,}0$, $R_n = 2{,}0$, $\delta_1 = 0{,}2$, $\mathrm{Le} = 2{,}0$, $\delta = 1$, $\Omega = 2{,}0$. Сначала система является проводящей, если амплитуда линий тока мала. Однако с течением времени амплитуда линий тока увеличивается, а гладкость изотерм нарушается. Установлено, что со временем в системе возникает конвекция. При $s > 1{,}0$ линии тока и изотермы остаются неизменными, а система приближается к режиму с максимальным тепломассопереносом. Соответствующие графики приведены в работах [30–32, 37, 39].

Заключение. Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы. В системе с модуляцией можно эффективно управлять тепломассообменом. С увеличением чисел Рэлея R_n и Льюиса Le, характеризующих концентрацию, увеличивается интенсивность тепломассопереноса. При малых значениях времени s с увеличением параметра пористости Va увеличиваются числа Нуссельта Nu и Nu_φ. Установлено, что с уве-

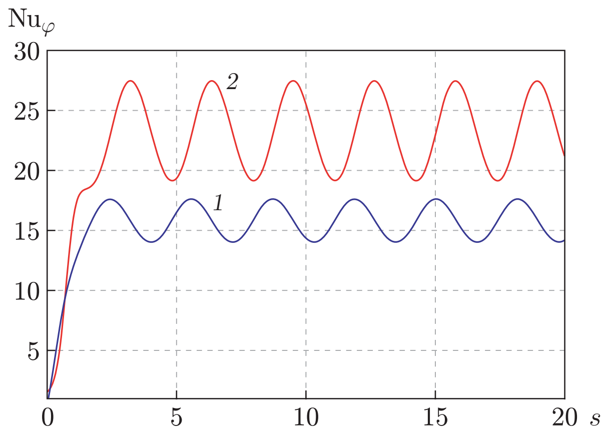

Рис. 9

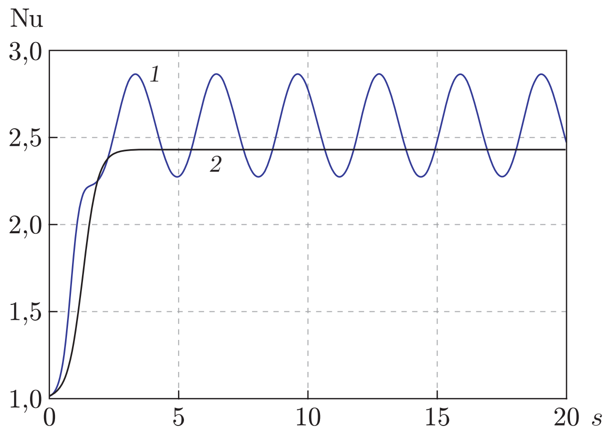

Рис. 10

Рис. 9. Зависимость числа Нуссельта Nu_φ от времени для стационарного (*1*) и колебательного (*2*) режимов конвекции

Рис. 10. Зависимость числа Нуссельта Nu от времени при наличии (*1*) и в отсутствие (*2*) модуляции

личением частоты Ω числа Нуссельта Nu и Nu_φ уменьшаются, а с увеличением R_n и δ_1 — увеличиваются. В модулированной системе значения чисел Нуссельта Nu и Nu_φ больше, чем в немодулированной. Определен момент начала конвекции при различных значениях физических параметров.

П. Киран выражает благодарность руководству Технологического института Чайтаньи Бхарати (CBIT) за создание условий для проведения исследований, а также руководству Научно-исследовательского центра CBIT за назначение его координатором исследований в отделе математики. С. Х. Манджула выражает благодарность руководству Фонда науки, технологий и исследований за предоставленную возможность проведения исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Choi S. U. S., Eastman J. A.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // Developments and applications of non-Newtonian flows. N. Y.: ASME, 1995. V. 66. P. 90–105.
2. **Masuda H., Ebata A., Teramac K.** Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra fine particles // Netsu Bussei. 1993. V. 7. P. 227–233. DOI: 10.2963/jjtp.7.227.
3. **Chen H. S., Ding Y., Lapkin A.** Rheological behaviour of nanofluids containing tube/rod-like nanoparticles // Power Technol. 2009. V. 194. P. 132–141. DOI: 10.1016/j.powtec.2009.03.038.
4. **Eastman J. A., Choi S. U. S., Li S., et al.** Anomalously increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles // Appl. Phys. Lett. 2001. V. 78. P. 718–720. DOI: 10.1063/1.1341218.
5. **Das S. K., Putra N., Thiesen P., Roetzel W.** Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2003. V. 125. P. 567–574. DOI: 10.1115/1.1571080.
6. **Buongiorno J., Hu W.** Nanofluid coolant for advanced nuclear power plants // Proc. of the Intern. congress on advances in nuclear power plants (ICAPP'05), Seoul (Korea), 15–19 May 2005. S. l.: Amer. Nuclear Soc., 2005. P. 15–19.
7. **Oyelakin I. S., Lalramneihmawii P. C., Mondal S., et al.** Thermophysicalanalysis of three-dimensional magnetohydrodynamic flow of a tangent hyperbolic nanofluid // Engng Rep. 2020. V. 2, iss. 4. e12144. DOI: 10.1002/eng2.12144.

8. **Wang F., Zheng K., Ahmad I., Ahmad H.** Gaussian radial basis functions method for linear and nonlinear convection — diffusion models in physical phenomena // Open Phys. 2021. V. 19, N 1. P. 69–76. DOI: 10.1515/phys-2021-0011.
9. **Eastman J. A., Choi S. U. S., Yu W., Thompson L. J.** Thermal transport in nanofluids // Annual Rev. Materials Res. 2004. V. 34. P. 219–246. DOI: 10.1146/annurev.matsci.34.052803.090621.
10. **Rea U., McKrell T., Hu L., Buongiorno J.** Laminar convective heat transfer and viscous pressure loss of alumina — water and zirconia — water nanofluids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 2042–2048. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.10.025.
11. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2006. V. 128. P. 240–250. DOI: 10.1115/1.2150834.
12. **Tzou D. Y.** Thermal instability of nanofluids in natural convection // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 2967–2979. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.09.014.
13. **Nield D. A., Kuznetsov A. V.** Thermal instability in a porous medium layer saturated by nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 5796–5801. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.07.023.
14. **Kuznetsov A. V., Nield D. A.** Effect of local thermal non-equilibrium on the onset of convection in porous medium layer saturated by a nanofluid // Transport Porous Media. 2010. V. 83. P. 425–436. DOI: 10.1007/s11242-009-9452-8.
15. **Kuznetsov A. V., Nield D. A.** Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: Brinkman model // Transport Porous Media. 2010. V. 81. P. 409–422. DOI: 10.1007/s11242-009-9413-2.
16. **Bhadauria B. S., Agarwal S.** Natural convection in a nanofluid saturated rotating porous layer a nonlinear study // Transport Porous Media. 2011. V. 87. P. 585–602. DOI: 10.1007/s11242-010-9702-9.
17. **Agarwal S., Bhadauria B. S., Siddheshwar P. G.** Thermal instability of a nanofluid saturating a rotating anisotropic porous medium // Spec. Topics Rev. Porous Media: Intern. J. 2011. V. 2, N 1. P. 53–64. DOI: 10.1615/SpecialTopicsRevPorousMedia.v2.i1.60.
18. **Agarwal S.** Natural convection in a nanofluid-saturated rotating porous layer: A more realistic approach // Transport Porous Media. 2014. V. 104, N 3. P. 581–592. DOI: 10.1007/s11242-014-0351-2.
19. **Rana S., Agarwal S.** Convection in a binary nanofluid saturated rotating porous layer // J. Nanofluids. 2015. V. 4, N 1. P. 59–65. DOI: 10.1166/jon.2015.1123.
20. **Agarwal S., Rana S.** Nonlinear convective analysis of a rotating Oldroyd-B nanofluid layer under thermal non-equilibrium utilizing Al_2O_3-EG colloidal suspension // Europ. Phys. J. 2016. V. 131, N 4. 101. DOI: 10.1140/epjp/i2016-16101-0.
21. **Ibrahim W., Negera M.** Melting and viscous dissipation effect on upper-convected Maxwell and Williamson nanofluid // Engng Rep. 2020. V. 2, iss. 5. e12159. DOI: 10.1002/eng2.12159.
22. **Reddy R., Pradeepa T.** Spectral quasi-linearization method for homogeneous-heterogeneous reactions on nonlinear convection flow of micropolar fluid saturated porous with convective boundary condition // Open Engng. 2016. V. 6. P. 106–119. DOI: 10.1515/eng-2016-0015.
23. **Venezian G.** Effect of modulation on the onset of thermal convection // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 243–254.
24. **Gresho P. M., Sani R. L.** The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer // J. Fluid Mech. 1970. V. 40, N 4. P. 783–806. DOI: 10.1017/S0022112070000447.
25. **Manjula S. H., Kavitha G., Kiran P.** Ginzburg Landau model for nanofluid convection in the presence of time periodic plate modulation // CFD Lett. 2023. V. 15, N 4. P. 64–79. DOI: 10.37934/cfdl.15.4.6479.

26. **Bhadauria B. S., Kumar A.** Throughflow and gravity modulation effect on thermal instability in a Hele-Shaw cell saturated by nanofluid // J. Porous Media. 2021. V. 24, N 6. P. 31–51. DOI: 10.1615/JPorMedia.2021035435.
27. **Kiran P., Bhadauria B. S., Roslan R.** The effect of throughflow on weakly nonlinear convection in a viscoelastic saturated porous medium // J. Nanofluids. 2020. V. 9, N 1. P. 36–46. DOI: 10.1166/jon.2020.1724.
28. **Rai S. N., Bhadauria B. S., Kumar A., Singh B. K.** Thermal instability in nanoliquid under four types of magnetic-field modulation within Hele-Shaw cell // Trans. ASME. J. Heat Mass Transfer. 2023. V. 145, N 7. 072501. DOI: 10.1115/1.4056664.
29. **Umavathi J. C.** Effect of thermal modulation on the onset of convection in a porous medium layer saturated by a nanofluid // Transport Porous Media. 2013. V. 98. P. 59–79. DOI: 10.1007/s11242-013-0133-2.
30. **Bhadauria B. S., Kiran P.** Nonlinear thermal Darcy convection in a nanofluid saturated porous medium under gravity modulation // Adv. Sci. Lett. 2014. V. 20. P. 903–910. DOI: 10.1166/asl.2014.5466.
31. **Bhadauria B. S., Kiran P., Belhaq M.** Nonlinear thermal convection in a layer of nanofluid under g-jitter and internal heating effects // MATEC Web Conf. 2014. V. 16. 09003. DOI: 10.1051/matecconf/20141609003.
32. **Kiran P., Bhadauria B. S., Kumar V.** Thermal convection in a nanofluid saturated porous medium with internal heating and gravity modulation // J. Nanofluids. 2016. V. 5, N 3. P. 321–327. DOI: 10.1166/jon.2016.1220.
33. **Kiran P.** Nonlinear thermal convection in a viscoelastic nanofluid saturated porous medium under gravity modulation // Ain Shams Engng J. 2016. V. 7, N 2. P. 639–651. DOI: 10.1016/j.asej.2015.06.005.
34. **Kiran P., Narasimhulu Y.** Centrifugally driven convection in a nanofluid saturated rotating porous medium with modulation // J. Nanofluids. 2017. V. 6, N 3. P. 513–523. DOI: 10.1166/jon.2017.1333.
35. **Kiran P., Narasimhulu Y.** Internal heating and thermal modulation effects on chaotic convection in a porous medium // J. Nanofluids. 2018. V. 7, N 3. P. 544–555. DOI: 10.1166/jon.2018.1462.
36. **Kiran P., Manjula S. H.** Internal heat modulation on Darcy convection in a porous media saturated by nanofluid // J. Nanofluids. 2023. V. 12, N 3. P. 666–675. DOI: 10.1166/jon.2023.1959.
37. **Kiran P., Manjula S. H., Roslan R.** Weak nonlinear analysis of nanofluid convection with g-jitter using the Ginzburg — Landau model // Open Phys. 2022. V. 20, N 1. P. 1283–1294. DOI: 10.1515/phys-2022-0217.
38. **Kiran P., Manjula S. H.** Time-periodic thermal boundary effects on porous media saturated with nanofluids: CGLE model for oscillatory mode // Adv. Materials Sci. 2022. V. 22, N 4. P. 98–116. DOI: 10.2478/adms-2022-0022.
39. **Kiran P.** Nonlinear throughflow and internal heating effects on vibrating porous medium // Alexandria Engng J. 2016. V. 55, N 2. P. 757–767. DOI: 10.1016/j.aej.2016.01.012.
40. **Agarwal S., Bhadauria B. S.** Convective heat transport by longitudinal rolls in dilute nanoliquids // J. Nanofluids. 2014. V. 3, N 4. P. 380–390. DOI: 10.1166/jon.2014.1110.

Поступила в редакцию 27/X 2022 г.,
после доработки — 23/XII 2022 г.
Принята к публикации 27/II 2023 г.