ПМТФ, № 4, 1968

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ МЕСТНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ

Э. И. Григолюк, Я. И. Бурак, Я. С. Подстригач

(Москва, Львов)

Рассматривается один из возможных вариантов постановки и решения задачи о выборе оптимальных температурных полей при осесимметрическом локальном нагреве оболочек вращения. В качестве критерия оптимальности принято условие минимума упругой энергии оболочки. В аналогичной постановке случай бесконечной цилиндрической оболочки рассмотрен ранее в работе [1].

Формулируется соответствующая вариационная задача для функционала упругой энергии при дополнительных ограничениях на функцию углов поворота в фиксированных сечениях оболочки. При помощи сингулярных функционалов типа δ-функции вариационная задача сводится к изопериметрической. Получено соответствующее уравнение Эйлера, которое совместно с разрешающим уравнением задачи составляет полную систему уравнений для определения экстремального температурного поля и соответствующего ему напряженно-деформированного состояния оболочки. Отдельно рассмотрены цилиндрическая, коническая и сферическая оболочки. Численный анализ полученного решения выполнен применительно к простейшего вида условиям локального нагрева для цилиндрической и конической оболочек.

1. Пусть оболочка вращения, отнесенная к каноническим координатам линий главных кривизн, находится под воздействием осесимметрического температурного поля. Тогда задача об определении напряженно-деформированного состояния оболочки при заданном температурном поле и отсутствии внешних силовых воздействий может быть сведена к нахождению функции углов поворота, которая удовлетворяет разрешающему уравнению [2]

$$\left\{\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^{\cdot}}{r}\right)\frac{1}{k_2}+(1+\nu)\,k_1\right]\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^{\cdot}}{r}\right)+(1-\nu)\,k_1k_2\right]+mk_2\right\}\theta = \alpha m\frac{dT}{ds} \qquad (1.1)$$

$$m = D_0 / D_1, \quad D_0 = 2Eh, \quad D_1 = {}^2/_3\, Eh^3 / (1-\nu^2)$$

Здесь $\theta\ (s)$ — функция углов поворота срединной поверхности оболочки; $T\ (s)$ — температура; s — длина дуги меридиана, отсчитываемая от фиксированного сечения; $r = r\ (s)$ — радиус поперечного сечения; k_1, k_2 — кривизны меридианов и параллелей; D_0 — жесткость на растяжение; D_1 — изгибная жесткость; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $2h$ — толщина оболочки; α — коэффициент температурного расширения; точка над величиной употребляется для обозначения производной по дуге s. При определении функции θ к уравнению (1.1) необходимо присоединить соответствующие условия на свободных торцах оболочки. Если функция $\theta(s)$ найдена, то отличные от нуля усилия N_1, N_2, изгибающие моменты M_1, M_2 и компоненты деформации ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$

срединной поверхности оболочки определяются по формулам

$$N_1 = -D_1 \frac{r^\cdot}{k_2 r}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^\cdot}{r}\right)+(1-\nu)k_1k_2\right]\theta$$

$$N_2 = -D_1 \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{k_2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{r^\cdot}{r}+\frac{d}{ds}\right)+(1-\nu)k_1k_2\right]\right\}\theta$$

$$M_1 = -D_1\left(\frac{d}{ds}+\nu\frac{r^\cdot}{r}\right)\theta, \quad M_2 = -D_1\left(\nu\frac{d}{ds}+\frac{r^\cdot}{r}\right)\theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{m}\left(\nu\frac{d}{ds}-\frac{r^\cdot}{r}\right)\left[\frac{1}{k_2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^\cdot}{r}\right)+(1-\nu)k_1\right]\theta+\alpha T \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{m}\left(\nu\frac{r^\cdot}{r}-\frac{d}{ds}\right)\left[\frac{1}{k_2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^\cdot}{r}\right)+(1-\nu)k_1\right]\theta+\alpha T$$

$$\varkappa_1 = -\theta^\cdot, \qquad \varkappa_2 = -\frac{r^\cdot}{r}\theta$$

Здесь индекс 1 приписывается величинам, которые относятся к направлению меридиана, индекс 2 — направлению параллели.

Введем в рассмотрение упругую энергию оболочки [1]

$$K = \iint\limits_{(S)} (N_1\varepsilon_1^0 + N_2\varepsilon_2^0 + M_1\varkappa_1^0 + M_2\varkappa_2^0)\, dS \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 - \alpha T, \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_2 - \alpha T, \quad \varkappa_1^0 = \varkappa_1, \quad \varkappa_2^0 = \varkappa_2 \quad (1.4)$$

Здесь S — срединная поверхность оболочки; ε_1^0, ε_2^0, $\varkappa_1^0$, $\varkappa_2^0$ — компоненты упругой деформации.

Подынтегральное выражение в (1.3) будет положительно определенной квадратичной формой относительно усилий и моментов и обращается в нуль тогда и только тогда, когда температурные напряжения равны нулю. Поэтому при решении задачи о локальном нагреве, обеспечивающем сравнительно низкий уровень температурных напряжений, в качестве интегрального условия оптимальности естественно принять условие минимума функционала упругой энергии оболочки (1.3).

Подставляя (1.2), (1.4) в (1.3), получим

$$K(\theta) = \frac{4\pi D_1}{m}\int\limits_{(L)} F(s, \theta, \theta^\cdot, \theta^{\cdot\cdot}, \theta^{\cdot\cdot\cdot})\, ds \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$F = \frac{r}{2}\left\{V^{\cdot 2} - 2\nu\frac{r^\cdot}{r}V^\cdot V + \left(\frac{r^\cdot}{r}\right)^2 V^2 + m\left[\theta^{\cdot 2} + 2\nu\frac{r^\cdot}{r}\theta^\cdot\theta + \left(\frac{r^\cdot}{r}\right)^2\theta^2\right]\right\} \quad (1.6)$$

$$V = \frac{1}{k_2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}+\frac{r^\cdot}{r}\right)+(1-\nu)k_1k_2\right]\theta$$

Здесь (L) — линия меридиана.

Формулируется следующая вариационная задача. Найти экстремум функционала $K[\theta]$ на множестве функций $\theta = \theta(s)$, которые удовлетворяют следующим условиям.

1. В фиксированных сечениях $s = s_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\frac{d^{(i)}\theta(s_j)}{ds^i} = \vartheta_{ij}, \qquad \int\limits_{s_0}^{s_j} \theta(s)\, ds = \hat\theta_j \qquad (i = 0, 1, 2) \quad (1.7)$$

2. На торцовых сечениях $s = s_0$, $s = s_*$

$$\frac{d^{(i)}\theta(s_0)}{ds^i} = \theta_{i0}, \qquad \frac{d^{(i)}\theta(s_*)}{ds^i} = \theta_{i*} \quad (i = 0,\ 1,\ 2) \tag{1.8}$$

Здесь θ_{ij}, θ_j — произвольные числа, которые можно доопределить, задаваясь в сечениях $s = s_j$ числовыми значениями параметров задачи (температура, усилия, моменты и т. д.). Следует отметить, что величины θ_{i0}, θ_{i*} должны быть связаны дополнительными соотношениями, которые вытекают из условий свободных торцов. Сформулированная задача эквивалентна такой изопериметрической задаче.

Найти экстремум функционала $K[\theta]$ на множестве функций $\theta = \theta(s)$, на котором функционалы

$$K_{ij}[\theta] = (-1)^i \int_{s_0}^{s_*} \delta^{(i)}(s - s_j)\,\theta(s)\,ds, \qquad K_j[\theta] = \int_{s_0}^{s_*} S_+(s_j - s)\,\theta(s)\,ds \tag{1.9}$$

Здесь $\delta^{(i)}(s)$ — i-я производная от дельта-функции, $S_+(s)$ — функция скачка принимают заданные значения

$$K_{ij}[\theta] = \theta_{ij}, \qquad K_j[\theta] = \theta_j \tag{1.10}$$

При этом предполагается, что каждая функция из рассматриваемого множества удовлетворяет условиям (1.8).

Такая задача сводится к нахождению абсолютного экстремума функционала [3]

$$K^*[\theta] = \frac{4\pi D_1}{m} \int_{s_0}^{s_*} \Big\{ F(s, \theta, \theta^\cdot, \theta^{\cdot\cdot}, \theta^{\cdot\cdot\cdot}) - \theta(s) \Big[\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{2} \lambda_{ij}\delta^{(i)}(s - s_j) + \lambda_j S_+(s_j - s) \Big) \Big] \Big\} ds \tag{1.11}$$

Здесь λ_{ij}, λ_j — произвольные постоянные, обеспечивающие удовлетворение условий (1.7). Уравнение Эйлера для функционала $K^*[\theta]$ дает

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^\cdot}\right) + \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^{\cdot\cdot}}\right) - \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^{\cdot\cdot\cdot}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=0}^{2} \lambda_{ij}\delta^{(i)}(s - s_j) + \lambda_j S_+(s_j - s) \Big] \tag{1.12}$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \Big[V^\cdot\Big(\nu r^\cdot - r\frac{d}{ds}\Big) + \frac{r^\cdot}{r} V\Big(\nu r\frac{d}{ds} - r^\cdot\Big)\Big]\Big(\frac{r^{\cdot 2}}{k_2 r^2} + \nu k_1\Big) + \frac{m r^\cdot}{r}(r^\cdot\theta + \nu r\theta^\cdot)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^\cdot} = (\nu r^\cdot V - rV^\cdot)\Big[(1+\nu)k_1 + \frac{r^\cdot}{k_2 r}\Big(\frac{k^\cdot_2}{k_2} + 2\frac{r^\cdot}{r}\Big)\Big] + \frac{r^{\cdot 2}}{k_2 r^2}(r^\cdot V - \nu r V^\cdot) + m(r\theta^\cdot + \nu r^\cdot \theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^{\cdot\cdot}} = \frac{r^\cdot}{k_2}\Big[\Big(2 - \nu - \frac{k_1}{k_2}\Big)V^\cdot - \frac{r^\cdot}{r}\Big(2\nu - 1 - \nu\frac{k_1}{k_2}\Big)V\Big] \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^{\cdot\cdot\cdot}} = \frac{r}{k_2}\Big(V^\cdot - \nu\frac{r^\cdot}{r}V\Big)$$

$$V^\cdot = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{k_2}\Big\{\theta^{\cdot\cdot\cdot} + \Big(2 - \frac{k_1}{k_2}\Big)\frac{r^\cdot}{r}\theta^{\cdot\cdot} - \Big[(1+\nu)k_1 k_2 + \frac{r^\cdot}{r}\Big(\frac{k^\cdot_2}{k_2} + 2\frac{r^\cdot}{r}\Big)\Big]\theta^\cdot - k_2\theta\frac{d}{ds}\Big(\frac{r^{\cdot 2}}{k_2 r^2} + \nu k_1\Big)\Big\}$$

Уравнение (1.12) совместно с разрешающим уравнением (1.1) и условиями (1.7), (1.8) составляет полную систему соотношений для определения экстремального температурного поля и соответствующего ему напряженно-деформированного состояния оболочки.

2. Приведем основные уравнения задачи для цилиндрической, конической и сферической оболочек.

а) *Цилиндрическая оболочка* ($k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, $r = R$, $r^{\cdot} = 0$). Уравнения (1.1), (1.12) и соотношения (1.2), записанные относительно осевой координаты x, имеют вид

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} + \frac{m}{R^2}\theta = \frac{\alpha m}{R}\frac{dT}{dx} \tag{2.1}$$

$$\frac{d^6\theta}{dx^6} + \frac{m}{R^2}\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{R^3}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\lambda_{ij}\delta^{(i)}(x-x_i) + \lambda_j S_+(x_j - x)\right] \tag{2.2}$$

$$N_1 = 0, \quad N_2 = -D_1 R\frac{d^3\theta}{dx^3}, \quad M_1 = -D_1\frac{d\theta}{dx}, \quad M_2 = -\nu D_1\frac{d\theta}{dx} \tag{2.3}$$

В силу (2.1) из (2.2) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^3T}{dx^3} = -\frac{1}{\alpha m R^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\lambda_{ij}\delta^{(i)}(x-x_i) + \lambda_j S_+(x_j - x)\right] \tag{2.4}$$

которое дает возможность непосредственно определить экстремальные температурные поля.

б) *Коническая оболочка.* Угол между осью оболочки и образующей срединной поверхности обозначим через β. Координату s вдоль образующей будем отсчитывать от вершины конуса. Тогда

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{s}, \quad r = s\sin\beta, \quad \frac{r^{\cdot}}{r} = \frac{1}{s} \tag{2.5}$$

Подставляя эти значения в уравнения (1.1), (1.11) и соотношения (1.2) для усилий и моментов, получим

$$s\frac{d^4\theta}{ds^4} + 4\frac{d^3\theta}{ds^3} + \frac{m\operatorname{ctg}^2\beta}{s}\theta = \alpha m\operatorname{ctg}\beta\frac{dT}{ds} \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left[s^2\left(s\frac{d^4\theta}{ds^4} + 4\frac{d^3\theta}{ds^3} + \frac{m\operatorname{ctg}^2\beta}{s}\theta\right)\right]\right\} = \tag{2.7}$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^2\beta}{s\sin\beta}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\lambda_{ij}\delta^{(i)}(s-s_j) + \lambda_j S_+(s_j - s)\right]$$

$$N_1 = -D_1\operatorname{tg}\beta\left(\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{s^2}\theta\right) \tag{2.8}$$

$$N_2 = D_1\operatorname{tg}\beta\left(s\frac{d^3\theta}{ds^3} + 2\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{1}{s}\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{s^2}\theta\right)$$

Сравнивая левые части уравнений (2.6) и (2.7), видим, что и для конической оболочки можно написать аналогичное (2.4) уравнение для определения экстремальных температурных полей

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{dT}{ds}\right)\right] = -\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\alpha m\sin\beta}\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\lambda_{ij}\delta^{(i)}(s-s_j) + \lambda_j S_+(s_j - s)\right] \tag{2.9}$$

в) *Сферическая оболочка*. Для рассматриваемой оболочки

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}, \quad s = R\varphi, \quad r = R\sin\varphi, \quad \frac{r^{\cdot}}{r} = \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\varphi \tag{2.10}$$

Здесь R — радиус кривизны оболочки, φ — дуга меридиана, отсчитываемая от оси вращения. Тогда разрешающее уравнение (1.1) и уравнение Эйлера (1.12) можно привести к виду

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi + \nu\right)\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi - \nu\right) + mR^2\right]\theta = \alpha m R^2\frac{dT}{d\varphi} \tag{2.11}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi - \nu\right)\left[\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi + \nu\right)\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi - \nu\right) + mR^2\right]\theta = -\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\lambda_{ij}R^{2-i}\delta^{(i)}(\varphi-\varphi_j) + \lambda_j S_+(\varphi_j-\varphi)\right] \tag{2.12}$$

Выпишем также выражения для определения усилий N_1, N_2 и моментов M_1, M_2

$$N_1 = -\frac{D_1\operatorname{ctg}\varphi}{R^2}\left[\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d\theta}{d\varphi} - (\nu + \operatorname{ctg}^2\varphi)\theta\right]$$

$$N_2 = -\frac{D_1}{R^2}\left[\frac{d^3\theta}{d\varphi^3} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - (1 + \nu + 2\operatorname{ctg}^2\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi} + \frac{2\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\varphi}\theta\right] \tag{2.13}$$

$$M_1 = -\frac{D_1}{R}\left(\frac{d\theta}{d\varphi} + \nu\operatorname{ctg}\varphi\theta\right), \quad M_2 = -\frac{D_1}{R}\left(\operatorname{ctg}\varphi\theta + \nu\frac{d\theta}{d\varphi}\right)$$

Для определения коэффициентов λ_{ij}, λ_j и постоянных интегрирования в каждом из рассмотренных случаев к приведенным соотношениям необходимо присоединить условия (1.7), (1.8) или соответствующие условия на другие параметры задачи.

Ниже приведены решения задачи для бесконечной цилиндрической оболочки и замкнутой в вершине конической оболочки.

3. Для определения экстремального решения в случае бесконечной цилиндрической оболочки примем в качестве исходных уравнения (2.1) и (2.4), которые запишем в виде

$$\frac{d^4\theta}{d\xi^4} + 4\theta = 4\alpha a\frac{dT}{d\xi} \qquad \left(\xi = a\frac{x}{R},\ a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{d^3T}{d\xi^3} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}\gamma_{ij}\delta^{(i)}(\xi-\xi_j) - \gamma_j S_+(\xi_j-\xi)\right] \tag{3.2}$$

Здесь γ_{ij}, γ_j — произвольные постоянные.

Найдем исчезающее на бесконечности решение уравнений (3.1) и (3.2). Применяя к этим уравнениям преобразование Фурье [4], получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\gamma_j}{6}(\xi-\xi_j)^3 + \frac{\gamma_{0j}}{2}(\xi-\xi_j)^2 + \gamma_{1j}(\xi-\xi_j) + \gamma_{2j}\right]\operatorname{sgn}(\xi-\xi_j) \tag{3.3}$$

$$\theta = \frac{\alpha a}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\gamma_j}{3} (\xi - \xi_j)^2 + \gamma_{0j} (\xi - \xi_j) + \gamma_{1j} \right] \operatorname{sgn} (\xi - \xi_j) + \right.$$

$$+ e^{-|\xi-\xi_j|} \left[\frac{\gamma_j}{2} \sin (\xi - \xi_j) + \frac{\gamma_{0j}}{2} (\cos (\xi - \xi_j) - \sin |\xi - \xi_j|) - \right.$$

$$\left.\left. - \gamma_{1j} \operatorname{sgn} (\xi - \xi_j) \cos (\xi - \xi_j) + \gamma_{2j} (\cos (\xi - \xi_j) + \sin |\xi - \xi_j|) \right] \right\} \qquad (3.4)$$

При этом коэффициенты γ_{ij} и γ_j должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j \xi_j - \gamma_{0j}) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j \xi_j^2 - 2\gamma_{0j} \xi_j + \gamma_{1j}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j \xi_j^3 - 3\gamma_{0j} \xi_j^2 + 6\gamma_{1j} \xi_j - 6\gamma_{2j}) = 0 \qquad (3.5)$$

Кольцевое усилие N_2 и осевой момент M_1, вычисленные по формулам (2.3) с учетом (3.4) будут

$$N_2 = \frac{Eh\alpha}{4} \sum_{j=1}^{n} [- \gamma_j (\cos (\xi - \xi_j) + \sin |\xi - \xi_j|) + 2\gamma_{0j} \sin (\xi - \xi_j) +$$

$$+ 2\gamma_{1j} (\cos (\xi - \xi_j) - \sin |\xi - \xi_j|) - 4\gamma_{2j} \operatorname{sgn} (\xi - \xi_j) \cos (\xi - \xi_j)] e^{-|\xi-\xi_j|} \qquad (3.6)$$

$$M_1 = - \frac{Eh\alpha R}{8a^2} \sum_{j=1}^{n} \{2\gamma_j |\xi - \xi_j| + \gamma_j (\cos (\xi - \xi_j) - \sin |\xi - \xi_j|) e^{-|\xi-\xi_j|} +$$

$$+ 2\gamma_{0j} (1 - e^{-|\xi-\xi_j|} \cos (\xi - \xi_j)) \operatorname{sgn} (\xi - \xi_j) + [2\gamma_{1j} (\cos (\xi - \xi_j) +$$

$$+ \sin |\xi - \xi_j|) - 4\gamma_{2j} \sin (\xi - \xi_j)] e^{-|\xi-\xi_j|} \} \qquad (3.7)$$

Из формул (3.3), (3.6) видно, что найденное экстремальное распределение температуры T и усилий N_2 описывается кусочно-непрерывными функциями. Непрерывное по ξ распределение T и N_2 получим, полагая $\gamma_{2j} = 0$.

Рассмотрим частный случай решения применительно к простейшего вида условиям локального нагрева. Пусть зона локального нагрева цилиндрической оболочки ограничена сечениями $\xi = \pm \eta$. Температура в концевых сечениях ($\xi = \pm \eta$) равна нулю. В сечении $\xi = 0$ температура T достигает максимального значения равного T_0.

Экстремальным для такой задачи температурным полем (3.3), которое удовлетворяет условию симметрии относительно сечения $\xi = 0$ и непрерывно вместе с первой производной, будет поле

$$T = T_0 [2|\xi/\eta|^3 - 3 (\xi/\eta)^2 + 1] \quad (|\xi| \leqslant \eta), \quad T = 0 \quad (|\xi| \geqslant \eta) \qquad (3.8)$$

Соответствующие (3.8) кольцевое усилие и осевой момент определяются по формулам

$$N_2 = \frac{3Eh\alpha T_0}{\eta^3} [(\cos (\xi + \eta) + \sin |\xi + \eta|) e^{-|\xi+\eta|} + (\cos (\xi - \eta) + \sin |\xi - \eta|) e^{-|\xi-\eta|} -$$

$$- 2 (\cos \xi + \sin |\xi|)^{-|\xi|} + \eta (e^{-|\xi+\eta|} \sin (\xi + \eta) - e^{-|\xi-\eta|} \sin (\xi - \eta))] \qquad (3.9)$$

$$M_1 = \frac{3Eh\alpha T_0}{2a^2\eta^3} [2|\xi + \eta| + 2|\xi - \eta| - 4|\xi| + (\cos (\xi + \eta) - \sin |\xi + \eta|) e^{-|\xi+\eta|} +$$

$$+ (\cos (\xi - \eta) - \sin |\xi - \eta|) e^{-|\xi-\eta|} - 2 (\cos \xi - \sin |\xi|) e^{-|\xi|} -$$

$$- \eta (1 - \cos (\xi + \eta) e^{-|\xi+\eta|}) \operatorname{sgn} (\xi + \eta) + \eta (1 - \operatorname{Cos} (\xi - \eta) e^{-|\xi-\eta|}) \operatorname{sgn} (\xi - \eta)] \qquad (3.10)$$

На фиг. 1 представлены графики

$$N^* = \frac{N_2}{Eh\alpha T_0}, \qquad M^* = \frac{a^2 M_1}{Eh\alpha R T_0}$$

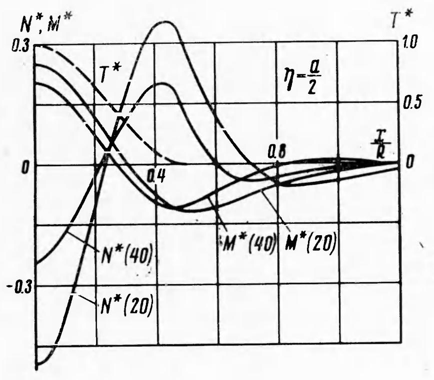
для $\nu = 0.3$; $R/h = 20, 40$ при ширине зоны нагрева равной радиусу цилиндра ($\eta = a/2$). На фиг. 2 приведены графики тех же величин при ширине зоны нагрева равной диаметру цилиндра ($\eta = a$). Штриховыми линиями показан профиль температурного поля $T^* = T/T_0$.

4. В случае конической оболочки экстремальные температурные поля удовлетворяют уравнению (2.9). Общее решение этого уравнения имеет вид

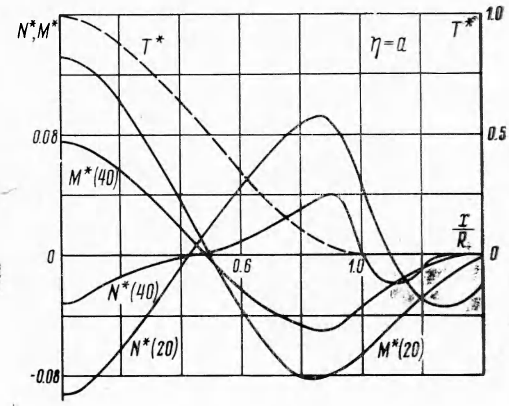
$$T = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2\alpha m \sin\beta} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j \left(s \ln \frac{s_j}{s} + \frac{3}{2} s + \frac{s_j^2}{2s} - 2s_j\right) + \lambda_{0j}\left(\frac{s}{s_j} + \frac{s_j}{s} - 2\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_{1j}\left(\frac{s}{s_j^2} - \frac{1}{s}\right) + 2\lambda_{2j} \frac{s}{s_j^3}\right] S_+(s_j - s) + C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{s} \tag{4.1}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полученное экстремальное решение будет кусочно-непрерывной функцией. Непрерывное распределение температуры получим, полагая $\lambda_{2j} = 0$. Если потребовать также непрерывность первой производной, то необходимо дополнительно положить $\lambda_{1j} = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим замкнутую в вершине бесконечную коническую оболочку ($s_0 = 0$, $s_* = \infty$). Будем предполагать, что температура в вершине конуса и на бесконечности равна нулю. Тогда в решении (4.1) необходимо положить $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. При этом коэффициенты λ_{ij} и λ_j должны быть подчинены следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j \ln \frac{s_j}{s_k} + \lambda_{0j} \frac{1}{s_j} + \frac{\lambda_{1j}}{s_j^2} + \frac{2\lambda_{2j}}{s_j^3}\right) = 0 \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j s_j + \lambda_{0j}) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{2} s_j^2 + \lambda_{0j} s_i - \lambda_{1j}\right) = 0 \qquad (0 < s_k < \infty)$$

Выделим из (4.1) дважды непрерывно дифференцируемое экстремальное температурное поле, осуществляющее локальный нагрев зоны $s_1 \leqslant s \leqslant s_3$, при следующих условиях:

$$T(s_1) = 0, \qquad T(s_2) = T_0, \qquad T'(s_2) = 0, \qquad T(s_3) = 0 \tag{4.3}$$

где $0 < s_2 \leqslant s_3$. Такое решение имеет вид

$$T = T_0 \left\{\left[a_2 \left(\frac{s}{s_2} \ln \frac{s_2}{s} + \frac{3}{2} \frac{s}{s_2} - 2 + \frac{s_2}{2s}\right) + a_{02} \frac{(s_2 - s)^2}{s_2 s}\right] S_+(s_2 - s) + \right.$$

$$\left. + \left[a_3 \left(\frac{s}{s_3} \ln \frac{s_3}{s} + \frac{3}{2} \frac{s}{s_3} - 2 + \frac{s_3}{2s}\right) + a_{03} \frac{(s_3 - s)^2}{s_3 s}\right] S_+(s_3 - s)\right\} \tag{4.4}$$

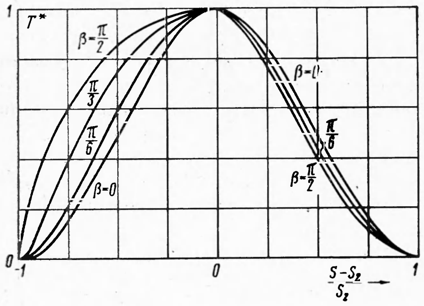
Здесь

$$a_2 = -\frac{(s_1 + s_2)\, s_2}{s_1^2 - s_2^2 + 2s_1 s_2 \ln (s_2 / s_1)} - \frac{(s_2 + s_3)\, s_2}{s_2^2 - s_3^2 + 2s_3 s_2 \ln (s_3/s_2)} \Bigg)$$

$$a_{02} = -\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} + \frac{s_3}{s_3 - s_2} - \frac{s_2^2 - s_2^1}{s_1^2 - s_2^2 + 2s_1 s_2 \ln (s_2/s_1)} + \frac{s_3^2 - s_2^2}{s_2^2 - s_3^2 + 2s_2 s_3 \ln (s_3/s_2)}\right. \tag{4.5}$$

$$a_3 = \frac{(s_2 + s_3)\, s_3}{s_2^2 - s_3^2 + 2s_2 s_3 \ln (s_3 / s_2)}, \qquad a_{03} = \frac{s_3}{2\,(s_3 - s_2)} \, \frac{2s_2^2 \ln s_3 / s_2 - s_3^2 + s_2^2}{s_2^2 - s_3^2 + 2s_2 s_3 \ln (s_3 / s_2)}$$

Численное исследование решения (4.4) выполнено для случая, когда ширина зоны нагрева равна диаметру поперечного сечения $s = s_2$ ($s_3 - s_1 = 2R$, R — радиус поперечного сечения) и $s_3 - s_2 = s_2 - s_1$. Температурные кривые $T^* = T/T_0$ в зависимости от координаты $s^* = (s - s_2)/s_2$ для некоторых значений β представлены на фиг. 3. Случай $\beta = 0$ соответствует цилиндрической оболочке радиуса R, которая нагревается температурным полем (3.8) Второй предельный случай ($\beta = {}^1/_2\pi$) — развертке конической оболочки в плоскость.



Фиг. 3

Исследованные выше на примерах цилиндрической и конической оболочек экстремальные температурные поля соответствуют простейшему виду условий локального нагрева, когда в фиксированных сечениях оболочки заданы ограничения на изменение температуры. Аналогичным путем можно выделить экстремальные решения для более общего вида условий, включающих дополнительные ограничения на уровень максимальных температурных напряжений. Такие условия можно удовлетворить за счет соответствующего выбора параметров λ_{ij}, λ_j и s_j, которые входят в уравнение Эйлера (1.12). Отметим, что в этом случае для определения экстремальных температурных полей необходимо рассматривать полную систему уравнений задачи.

Поступила 7 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 3.
2. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Изд-во АН УССР, 1961.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.