УДК 532.529

Быстрые растущие волны в струе вязкой жидкости, инициированные колебаниями концевой капли^{*}

А.А. Сафронов¹, А.А. Коротеев², Н.И. Филатов¹, Н.В. Бондарева²

¹ГНЦ-ФГУП «Центр Келдыша», Москва

²Московский авиационный институт

E-mail: a.a.safr@yandex.ru

В работе описаны закономерности формирования волн в струе вязкой жидкости, инициированных ее внезапным разрывом. Установлена возможность существования быстрых растущих возмущений в струе. Выявлена циклическая закономерность зависимости расстояния между образовавшимися каплями. Обоснована определяющая роль эффектов, связанных с действием силы вязкого трения, на формирование быстрых растущих волн.

Ключевые слова: диспергирование жидкостей, капиллярный распад, капиллярные волны, волновой процесс.

Введение

Необходимость диспергирования жидкостей встречается в различных технических приложениях. Для некоторых из них важно получение монодисперсных капель, распространенным методом генерации которых является вынужденный капиллярный распад истекающих из генератора струй (ВКРС). Суть метода состоит в создании периодических возмущений с малой амплитудой в истекающих струйках жидкости с помощью колебаний давления во внутреннем объеме генератора, вибрации или внешних полей (электрических, акустических) и т.д. (рис. 1). Созданные возмущения возрастают из-за развития неустойчивости Релея–Плато. Управление характеристиками потока производится изменением частоты, формы и амплитуды возмущения.



3 — капельный поток).

^{*} Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-19-00045.

[©] Сафронов А.А., Коротеев А.А., Филатов Н.И., Бондарева Н.В., 2021

Возмущения поверхности струи эффективно описываются моделью слабонелинейных волн. Обзор методик расчета ВКРС представлен в работе [1]. Выбор конкретной методики зависит от отношения характерной скорости развития капиллярных возмущений в струе C к ее скорости истечения из генератора V. Величина C может быть оценена соотношением

$$C = \sqrt{\sigma/(\rho r_0)},\tag{1}$$

где σ и ρ — поверхностное натяжение и плотность жидкости, r_0 — радиус невозмущенной поверхности струи. Наиболее прост для описания случай для V >> C, когда используется модель развития абсолютной неустойчивости возмущений поверхности [1–4]. Если скорость струи незначительно превышает скорость развития капиллярных возмущений, используется модель конвективной неустойчивости [1, 5]. При сопоставимых значениях V и C или при V < C реализуются более сложные режимы распада. Достаточно подробно исследован нелинейный механизм образования капель при V << C в поле силы тяжести, получивший название дриппинг-моды [6, 7]. Закономерности распада в промежуточных между ВКРС и дриппинг-модой режимах в настоящее время изучены не полностью. Вместе с тем для ряда технических задач решение задачи осуществления управляемого распада медленно истекающей струи является актуальным. Одна из них — создание бескаркасных систем отвода низкопотенциального тепла в космосе [8].

Представленная работа посвящена исследованию капиллярного распада медленно истекающей струи при M = V/C > 1 и состоит из трех частей. В первой части приводятся результаты экспериментов по капиллярному распаду. Во второй обсуждаются закономерности распространения быстрых капиллярных волн. В третьей части анализируются результаты численного моделирования развития волнового процесса в струе.

Экспериментальные исследования развития капиллярных возмущений в струе

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 2*a*. Рабочее тело (вакуумное масло BM1-C) подавалось под давлением сжатого воздуха в генератор, откуда истекало через семь одинаковых капиллярных трубок длиной 7 см в вакуумную камеру с остаточным давлением 10^{-4} торр. Диаметр каналов составлял 0,45 мм. Скорость истечения струй радиусом $r_0 = (0,22 \pm 0,04)$ мм составляла $V = (2,11 \pm 0,05)$ м/с, температура — 50 °C. Величины поверхностного натяжения, вязкости и плотности жидкости имели



Рис. 2. Схема экспериментальной установки (a) и фотография пузырька газа в истекающей струе (указан стрелкой) (b).
 и — емкость с жидкостью, 2 — капиллярные трубки, 3 — распадающиеся струи, 4 — сборная емкость, 5 — вакуумная камера, 6 — видеокамера.

следующие значения: $\sigma = 35 \cdot 10^{-3}$ H/м, $\mu = 0.02$ Па·с, $\rho = 850$ кг/м³. Для определенных таким образом параметров $C = (0.43 \pm 0.05)$ м/с, а число Онезорге (аналог числа Рейнольдса для капиллярных волн в струе) составляло

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma r_0 \rho}} = 0,25.$$
 (2)

Для анализа экспериментальных результатов использовались безразмерные переменные. Расстояния, скорость и время нормировались соответственно на величины r_0 , C и $t_0 = r_0/C = (5 \pm 1) \cdot 10^{-4}$ с. Безразмерная скорость истечения жидкости составляла $M = V/C \approx 5$.

Процесс распада струй регистрировался скоростной видеокамерой PhantomVEO. Кадры видеосъемки приведены на рис. 3. Генерация периодических возмущений в струе в эксперименте не осуществлялась. Случайные шумы ослаблялись при прохождении жидкости через протяженный капиллярный канал. Влияние силы тяжести не учитывалось, т.к. скорость струй была достаточно велика, а длина области, в пределах которой осуществлялось наблюдение, не превышала 10 см (рис. 3*a*).

При истечении жидкости в капиллярные каналы проникали мелкие пузырьки газа (рис. 3b). Их линейная концентрация была незначительной (порядка одного пузырька на 20 см струи). В результате развития капиллярной неустойчивости вблизи пузырьков происходил разрыв струи (рис. 3a) [9–11]. После разрыва пузырек либо исчезал, либо оставался в струе, а на краю струи формировалась растущая колеблющаяся капля (см. фрагмент 1 на рис. 3b). Спустя приблизительно 10^{-2} с (соответствует безразмерному времени $t \sim 20$) вблизи капли формировалось распространяющееся вверх по струе возмущение (фотографии разных стадий процесса приведены на рис. 3b). Амплитуда волн возмущения была тем больше, чем ближе они находились к краю струи.

Среди имеющихся исследований роста капли на краю струи можно отметить три работы. В работе [12] были получены аналитические закономерности скорости роста, а также формирования коротковолновых ($k = 2\pi r_0/\lambda > 1$) капиллярных возмущений с длиной волны λ вблизи капли. В работе [13] изучалось формирование диссипативной структуры капиллярных возмущений вблизи растущей капли, источником энергии для формирования которой служило капиллярное течение жидкости навстречу растущей капле. В работе [14] был исследован один из механизмов возникновения колебаний капли, связанный с «поглощением» ею капиллярных возмущений. Таким образом, было обосновано, что стационарные волны в струе вблизи растущей капли движутся со скоростью капли и оказывают заметное влияние на течение в струе на расстояниях, меньших



Рис. 3. Распадающиеся струи с интервалом 21,5·10⁻³ с (a) и край струи, отмеченной стрелкой на фрагменте a, в последовательные моменты времени (b).
 а: стрелками отмечены совпадающие точки пространства, b: линиями соединены тождественные зародыши капель.

~ 10*r*₀ от капли.

Вместе с тем результаты выполненных авторами экспериментов свидетельствуют о том, что вверх по потоку распространяются быстрые волны со скоростью не менее $M \approx 5$. Они индуцируют длинноволновые возмущения (k < 1) поверхности на расстояниях от капли больших ~ $25r_0$. Развиваясь, эти возмущения приводят к распаду струи на капли. На рис. 3b приведены последовательные кадры видеосъемки края распадающейся струи. Видно, что возмущения, приводящие к распаду, первоначально формируются на расстоянии $\sim 25r_0$ от края струи. С течением времени они распространяются по струе с переменной скоростью, то «обгоняя» течение, то «отставая» от него. Оценить скорость возмущений можно, используя рис. За, на котором приведены две фотографии потока с промежутком времени 21,5·10⁻³ с. Точка распада струи почти не меняет положения относительно генератора, т.е. скорость распространения возмущений приблизительно соответствует скорости истечения. Сравнение фрагментов 3-5 на рис. 3b позволяет заключить, что отрыв капель происходит «порциями». Первоначально на расстоянии ~ $25r_0$ от края струи формируется растущее возмущение, приводящее к разрыву струи. Далее «отрезок струи» длиной ~ 25r₀ распадается на капли, а на краю основной части струи происходит рост новой капли, сопровождаемый повторением описанного процесса. В экспериментах наблюдались интенсивные колебания капли на крае струи. В некоторых случаях их амплитуда превышала 50 % радиуса капли.

Существование повторяющихся структур в распадающейся струе подтверждается анализом временного ряда расстояний между последовательно образующимися каплями в момент их образования l_i . На рис. 4 приведены зависимости величины $k_i = 2\pi r_0/l_i$ и безразмерного радиуса капли от её порядкового номера (отмеченная стрелкой на фрагменте 1 рис. 3a капля считалась первой). Погрешность определения величины k_i не превышает 5%. Видно, что распад струи имеет циклический характер с периодом, соответствующим прохождению трех капель. Эта закономерность нарушается на некоторый промежуток времени, однако затем восстанавливается. Вместе с тем образовавшиеся капли оказываются близки по размерам друг к другу, кроме первой, сформировавшейся в месте локализации пузырька.

Задачей проводимого далее теоретического анализа является качественное описание распространения возмущений, растущих со скоростью, соизмеримой со скоростью истечения струи.



Рис. 4. Зависимости величины $k_i = 2\pi r_0/l_i$ (*a*) и безразмерного радиуса капли (*b*) от номера капли.

Закономерности формирования быстрых капиллярных волн в струе вязкой жидкости

Для моделирования распространения осесимметричных возмущений в цилиндрической струе использовалось асимптотическое разложение системы уравнений Навье– Стокса, предложенное в работе [15]. Безразмерная система уравнений, описывающая зависимость радиуса струи *H* и скорости вещества в струе *U*, записывается в виде

$$\partial_{t}U + U\partial_{x}U = \frac{1}{H^{2}}\partial_{x}H + \partial_{xxx}H + 3Oh\frac{1}{H^{2}}\partial_{x}\left(H^{2}\partial_{x}U\right),$$

$$\partial_{t}H + U\partial_{x}H = -\frac{1}{2}H\partial_{x}U,$$
(3)

где *х* — аксиальная координата, *t* — время.

Для описания малых возмущений достаточно использования линейного приближения системы (3). Принимая H = 1 + h, а U = u (т.е. случай U = const+u заменой $X = x - \text{const} \cdot t$ сводится к U = u), получим:

$$\partial_t u = \partial_x h + \partial_{xxx} h + 3 \text{Oh} \partial_{xx} u,$$

$$\partial_t h = -\frac{1}{2} \partial_x u. \tag{4}$$

Для анализа вклада слагаемых правой части первого уравнения линейной системы (4) в ее решение можно рассмотреть три укороченные системы уравнений, решение которых ищется в предположении, что h и u равны произведению некоторой константы на ехр ($ikx+i\omega t$). Первая укороченная система уравнений записывается в виде

$$\partial_t u = \partial_x h,$$

$$\partial_t h = -\frac{1}{2} \partial_x u \tag{5}$$

и сводится к уравнению Лапласа. Член $\partial_x h$ системы (4) описывает монотонно изменяющиеся со временем возмущения. Третья укороченная система, описывающая влияние члена $3Oh\partial_{xx} u$, сводится к уравнению диффузии. Вторая укороченная система уравнений для слагаемого $\partial_{xxx} h$ имеет вид

$$\partial_t u = \partial_{xxx} h,$$

$$\partial_t h = -\frac{1}{2} \partial_x u$$
(6)

и позволяет получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}k^2.$$
(7)

Член $\partial_{xxx} h$ уравнения (4) описывает распространение бегущих волн в струе. Групповая скорость волн c_{rp} , описываемых системой (6), равная производной ω по k, оказывается пропорциональна волновому числу: $c_{rp} = 2^{1/2}k$. Из этого соотношения следует, что возмущения распространяются по струе тем быстрее, чем меньше их длина волны. Вместе с тем анализ дисперсионных соотношений полной системы (4) показывает, что при k > 1 возмущения эффективно затухают при распространении на расстояние $\lambda = 2\pi/k$. Растущими оказываются только возмущения с волновым числом k < 1, групповая скорость которых $c_{rp} (k < 1) = 0$ [1, 3, 15].

Проведенный анализ позволяет объяснить наблюдаемый в эксперименте распад струи. Возникшие локализованные колебания растущей на краю струи капли порождают распространяющуюся быструю волну. За счет диссипации происходит расширение ее гребня, сопровождаемое уменьшением скорости распространения возмущения. Замедлившийся гребень «догоняют» новые волны. В итоге формируется возмущение с большой длиной волны и k < 1, развитие которого приводит к распаду струи.

Для анализа возможности реализации описанного сценария решена задача о бесконечной цилиндрической струе вязкой жидкости. В точке x = 0 ее поверхность приводилась в движение по закону

$$h(x=0,t) = \sin(\omega t). \tag{8}$$

Зависимости *h* и *u* представлялись в виде

$$h(x,t) = f(\omega, x)\sin(\omega t),$$

$$u(x,t) = g(\omega, x)\sin(\omega t).$$
(9)

Подстановка этих соотношений в (4) приводит к системе уравнений

$$\omega g = \partial_x f + \partial_{xxx} f + 3 \text{Oh} \partial_{xx} g,$$

$$\omega f = -\frac{1}{2} \partial_x g,$$
(10)

которая сводится к выражению

$$\partial_{xxxx}g + \partial_{xx}g(1 - 6\omega \operatorname{Oh}) - 2\omega^2 = 0.$$
(11)

Считая, что $g \sim \exp(kx)$, получим

$$k = \pm \sqrt{\frac{1 - 6\omega \text{Oh}}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\omega^2}{(1 - 6\omega \text{Oh})^2}} \right).$$
(12)

Ветви дисперсионного соотношения (12), соответствующие колебательным решениям, могут находиться в области значений |k| < 1, соответствующим очень большим значениям периода колебаний, лишь при $\omega \to 0$. Таким образом, при периодическом «раскачивании» края покоящейся струи, на ее поверхности будут формироваться короткие волны с пространственной частотой k > 1. Отметим также, что из соотношения (12) следует, что в невязкой струе Oh = 0 и бегущие линейные волны не возникают.

Моделирование распространения возмущений, инициированных колебаниями капли на краю струи

Период малых колебаний сферической невязкой капли т равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\rho R^2}{m(m-1)(m+2)\sigma}},\tag{13}$$

где R — радиус капли, m — номер моды колебаний. Возможное наличие пузырька газа в капле не учитывалось, т.к. его радиус значительно меньше размеров капли. При слиянии капель в спектре колебаний высокую интенсивность имеет мода с m = 3 (характерный вид изображен на рис. 5) [15, 16]. Из рис. 4b следует, что среднее безразмерное значение радиуса капли на краю струи близко к двум. При таких значениях параметров период колебаний капли на конце струи составит $\tau / t_0 \approx 3$.

Целью численного моделирования являлось выявление качественных закономерностей распространения фронта быстрых капиллярных волн в невозмущенной струе. Для этого решалась система (4) с Oh = 0,25. При t = 0: h = u = 0. При x = 0: $h(0, t) = \varepsilon \cdot \sin(\Omega t)$, h'(0, t) = 0, h''(0, t) = 1/h(0, t), $u'(0, t) = -2\Omega\varepsilon \cdot \cos(\Omega t)$, где $\Omega = 2\pi t_0/\tau$, $\varepsilon = 0,1$, a $\tau/t_0 = 3$.



Расчет проводился на промежутке $x \in [0;100]$. При x = 100 значения h и u считались равными нулю.

На рис. 6 представлены результаты рас-



чета формы струи в различные моменты времени. При t < 5 от источника распространяются возмущения с малой длиной волны. При $t \sim 5$ за счет расширения возмущения, определяемого диффузионным членом первого уравнения (4), происходит формирование длинноволнового возмущения на промежутке $x \in [5;15]$. После формирования капиллярной волны достаточно большой амплитуды $\sim 0,05$ решение системы уравнений в ее правой области слабо зависит от колебаний в точке x = 0. Это объясняется тем, что скорость рость сформировавшегося возмущения значительно превышает скорость колебаний в точке x = 0. Сформировавшаяся капиллярная волна начинает генерировать новые возмущения, распространяющиеся вправо и, в свою очередь, создающие новые волны.

Для анализа волнового процесса проводилось измерение координат и величины экстремумов h(x) в различные моменты времени. На рис. 7 представлены зависимости отношения логарифмов модуля величины экстремума и амплитуды ε колебаний в точке x = 0 для t = 10, 15, 20 от положения экстремума. При достаточно большом времени амплитуда возмущений значительно превосходит ε . Рост амплитуды A происходит по достаточно сложному закону и не описывается функцией $A \sim \exp(\text{const} x)$.

По координатам экстремумов функции h(x) определялись длины волн возмущений λ_i , равные расстояниям между ее двумя ближайшими минимумами или двумя максимумами. Считалось, что возмущение с длиной волны λ_i имеет координату правого экстремума $h(x_i)$. Этому возмущению соответствует величина $\theta_i = x_i/t$, имеющая смысл скорости распространения возмущений.

На рис. 8 изображены зависимости θ_i от $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($r_0 = 1$) для t = 10, 15 и 20. При t = 10 существуют только короткие (k > 1) быстрые волны. Длинноволновые возмущения (k < 1) «распространяются» по поверхности с большой скоростью только по истечении некоторого промежутка времени $t \sim 10$, в течении которого формируется «высокоскоростное» возмущение, схожее по виду с зависимостью h(x) для t = 20 (рис. 6b). Длины волн, составляющих эту структуру, различны и уменьшаются по мере удаления от источника колебаний.

Сравнение расчетных результатов с экспериментальными показано следующее. Из рис. 4*a* видно, что минимальная наблюдаемая в эксперименте величина $k_i = 2\pi r_0/l_i$ составляла $k_{\min} \approx 0.45$. Циклические последовательности изменения величины k_i имеют



Рис. 6. Зависимости h(x) в различные моменты времени. $a: t \in [1; 5]; b: t \in [10; 20].$



период, равный трем, и близки к ряду $\{k_1 \approx 0,45, k_2 \approx 0,75, k_3 \approx 0,9\}$. Аналогичное распределение k_i следует и из расчета. Из анализа рис. 6b следует, что длина первого растущего возмущения $l \approx 14$ и соответствует $k \approx 0,45$. Для второго и третьего возмущений (рис. 8) $k_2 \approx 0,75, k_3 \approx 0,9$; следующие значения $k_i > 1$. Таким образом, результаты расчета, выполненного в линейном приближении, качественно согласуются с экспериментально обнаруженной циклической последовательностью волновых чисел k_i .

Обсуждение результатов

Результаты численного решения уравнений динамики струи вязкой жидкости иллюстрируют возможность существования возмущений, распространяющихся со значительной скоростью. Их возникновение связано с наличием третьей производной радиуса струи по координате в динамических уравнениях (определяет существование быстрых волн), а также диссипативного члена.

Использование линейного приближения динамических уравнений не может в полной мере объяснить эффекты, наблюдаемые в эксперименте, однако объясняет основные закономерности развития быстрых волн, генерируемых колебаниями на краю струи. Вместе с тем для корректного решения нелинейных уравнений необходимо точное определение граничных условий на краю струи, что возможно сделать лишь с помощью решения распада струи в трехмерной постановке.

Описанные в работе эффекты позволяют также глубже понять закономерности описанного в работе [17] процесса утончения и разрыва тонких перетяжек, соединяющих зародыши капель в распадающейся струе жидкости.

Список литературы

- 1. Аметистов Е.В., Дмитриев А.С. Монодисперсные системы и технологии. М.: Изд-во МЭИ, 2002. 390 с.
- **2. Чесноков Ю.Г.** Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70, вып. 8. С. 31–38.
- 3. Сафронов А.А. Особенности капиллярного распада струй жидкости при числах Онезорге больше единицы // Инж.-физ. журн. 2017. Т. 90, № 1. С. 176–185.
- 4. Бондарева Н.В., Григорьев А.Л., Коровин Т.Г., Коротеев А.А., Сафронов А.А., Скоробогатько Т.Д., Филатов Н.И., Хлынов А.В. Экспериментальное исследование влияния числа Онезорге на размеры капель, образовавшихся в результате капиллярного распада струи // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 773–777.
- 5. O'Donnell B., Chen J.N., Lin S.P. Transition from convective to absolute instability in a liquid jet // Physics of Fluids. 2001. Vol. 13, No. 9. P. 2732–2734.

- 6. Hariprasad J., Hak K., Suryo R., Xu Q., Ambravaneswaran B., Osman A. Simplicity and complexity in a dripping faucet // Phys. Fluids. Vol. 18, No. 3. No. 032106-1–032106-13.
- Coullet P., Mahadevan L., Riera C.S. Hydrodynamical models for the chaotic dripping faucet // J. Fluid Mechanics. 2005. Vol. 256. P. 1–17.
- Коротеев А.А., Сафронов А.А., Филатов Н.И. Влияние структуры капельной пелены на мощность бескаркасных космических излучателей и эффективность энергетических установок // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, № 5. С. 817–820.
- 9. Чиннов Е.А., Роньшин Ф.В., Кабов О.А. Режимы двухфазного течения в микро- и миниканалах (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 3. С. 275–297.
- 10. Марчук И.В., Чеверда В.В., Стрижак П.А., Кабов О.А. Определение поверхностного натяжения и контактного угла смачивания по форме поверхности осесимметричных пузырей и капель // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 3. С. 311–317.
- Wu Z.-W., Zhao H., Li W.-F., Xu J.-L., Wang S., Liu H.-F. Effects of inner bubble on liquid jet Breakup // Phys. Fluids. 2019. Vol. 31, No. 3. Art. 034107.
- Contò F.P., Marín J.F., Antkowiak A., Castrejón-Pita J., Gordillo L. Shape of a recoiling liquid filament // Sci. Reports. 2019. Vol. 9, No. 1. Art. 15488.
- Safronov A.A., Koroteev A.A., Filatov N.I., Safronova N.A., Capillary hydraulic jump in a viscous jet // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. Vol. 15, No. 3. P. 221–231.
- 14. Hoepffner J., Paré G. Recoil of a liquid filament: escape from pinch-off through creation of a vortex ring // J. of Fluid Mechanics. 2013. Vol. 734. P. 183–197.
- 15. Eggers J., Todd F.D. Drop formation in a one dimensional approximation of the Navier–Stokes equation // J. of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 262. P. 205–221.
- 16. Сметанин С.В., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Численное исследование слияния капель вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 6. С. 27–33.
- 17. Григорьев А.Л., Коротеев А.А., Сафронов А.А., Филатов Н.И. Автомодельные закономерности образования микросателлитов в процессе капиллярного распада вязких струй // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 4. С. 599–609.

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2020 г., после доработки — 2 сентября 2020 г., принята к публикации 16 декабря 2020 г.