

УДК 004.93

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ЗАДАНЫМИ ФРАКТАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ\*

Б. Н. Грудин, В. С. Плотников, Н. А. Смольянинов

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Дальневосточный государственный университет»,  
690950, г. Владивосток, ГСП, ул. Суханова, 8  
E-mail: grudin@letoi.phys.dvgu.ru*

Предложены алгоритмы моделирования изображений с фрактальными характеристиками на основе обобщённой пространственно-частотной фильтрации, при которой сохраняется фаза либо знак амплитуды соответствующего ортогонального преобразования исходного изображения, а модуль амплитуды убывает по степенному закону либо для всего обобщённого спектра изображения, либо для интегральной частотной характеристики спектра. Для смоделированных изображений предложены фрактальные меры в пространственной области, которые, как и интегральная частотная характеристика, инвариантны относительно мультипликативных уменьшений масштаба.

*Ключевые слова:* фрактальные изображения, обобщённая пространственно-частотная фильтрация, интегральная частотная характеристика спектра, инвариантность относительно мультипликативных уменьшений масштаба, ортогональные преобразования, энергетические спектры, фрактальные меры.

**Введение.** В данной работе фрактальными будем считать изображения, энергетический спектр которых убывает с ростом пространственной частоты по степенному закону. Вид такого спектра инвариантен при мультипликативных изменениях масштаба [1].

Для идеальных фрактальных изображений нет таких понятий, как характерный размер или характеристическая пространственная частота: то, что происходит в одном пространственно-частотном интервале, происходит при любом масштабировании частотного диапазона [1]. Однако реальные изображения можно считать фрактальными только в некотором ограниченном диапазоне пространственных частот. Как правило, этот диапазон сильно ограничен и его трудно определить из-за нестабильности получаемых по изображениям оценок энергетического спектра и влияния передаточной функции системы визуализации конкретного изображения. Например, в электронной микроскопии при визуализации наноструктур с приемлемым контрастом частотная характеристика определяет диапазоны частот, визуализируемые с максимальным и минимальным контрастом. В таких случаях пространственно-спектральные признаки и характерные масштабы не отражают реальных характеристик изображения. Следует также учитывать, что при одной реализации дискретного изображения переход на следующий масштаб возможен только в случае его уменьшения.

Известные методы моделирования изображений с заданным энергетическим спектром, в том числе и фрактальным, предполагают задание требуемого вида спектра, а распределение фаз в спектральной области полагается случайным. Однако можно поставить задачу моделирования изображений с заданным энергетическим спектром, распределение фаз которых в спектральной области совпадает с распределением фаз некоторого исходного изображения. Кроме того, энергетический спектр можно смоделировать таким образом, чтобы

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-02-90030) и Федерального агентства по образованию.

инвариантными относительно мультипликативных уменьшений масштаба были только некоторые интегральные характеристики спектра либо изображения, определяющие его фрактальные свойства.

Целью данной работы является моделирование изображений с фрактальными характеристиками методами обобщённой пространственно-частотной фильтрации, при которой сохраняется распределение фаз либо знаков амплитуд соответствующих ортогональных преобразований исходного и полученного на его основе изображений, что обеспечивает их сходство при степенном характере убывания спектра смоделированного изображения.

**Фрактальные изображения и их характеристики.** Пусть функция  $f(x, y)$  представляет собой распределение яркости непрерывного изображения, а  $F(u_1, u_2)$  и  $I(u_1, u_2) = |F(u_1, u_2)|^2$  — фурье-образ и энергетический спектр изображения  $f(x, y)$  соответственно;  $(x, y)$  — декартовы координаты в плоскости изображения;  $(u_1, u_2)$  — пространственные частоты. В полярной системе координат ( $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ,  $\varphi = \arctg(u_1/u_2)$ ) интегрирование энергетического спектра  $I(u, \varphi)$  по углу в плоскости пространственных частот даёт интегральную частотную характеристику (ИЧХ)  $V(u)$ , инвариантную относительно сдвига и вращения исходного изображения [2].

Далее для простоты положим, что матрица дискретного представления  $f(j_1, j_2)$  непрерывного изображения квадратная и включает в себя  $N \times N$  элементов, т. е.  $(j_1, j_2) = \overline{0, N-1}$ . В результате дискретного преобразования Фурье (ДПФ) матрица  $f(j_1, j_2)$  преобразуется в матрицу  $F(m, n)$  того же размера,  $(m, n)$  — отсчёты ДПФ. Энергетический спектр дискретного изображения обозначим как  $I(m, n) = |F(m, n)|^2$ , а в полярной системе координат ( $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ ,  $\theta = \arctg(n/m)$ ) дискретные представления энергетического спектра и ИЧХ запишем в виде  $I(k, \theta)$  и  $V(k)$  соответственно.

Для фрактальных изображений ИЧХ  $V(k)$  будет убывать по степенному закону, т. е.  $V(k) = k^{-\beta}$ . По ИЧХ  $V(k)$  можно оценить фрактальную размерность. Известно [1, 3], что если процесс фрактальный и вложен в евклидово пространство с размерностью  $d_0$ , то он будет иметь размерность

$$d = d_0 + (3 - \beta)/2, \quad \beta \in (1, 3), \quad d_0 \in (1, 3), \quad (1)$$

где  $\beta$  — показатель степени спада энергетического спектра процесса.

В большинстве случаев изображение можно считать фрактальным только в некоторой ограниченной области пространственных частот. Если интервал фрактальности включает пространственные частоты из диапазона  $[k_a, k_b]$ , то соответствующее значение  $\beta$  с использованием ИЧХ находим по формуле

$$\beta = [\log V(k_a) - \log V(k_b)] / [\log k_a - \log k_b]. \quad (2)$$

Для однородных и изотропных стохастических полей  $f(j_1, j_2)$  с нулевым средним каждое значение ИЧХ  $V(k)$  можно трактовать как дисперсию случайного поля. Тогда соотношение (2) может быть записано в виде

$$\beta = (\log D_a - \log D_b) / (\log m_b - \log m_a), \quad (3)$$

где  $D_a = V(k_a)$ ,  $D_b = V(k_b)$  — дисперсии стохастических полей масштабов  $m_a$  и  $m_b$  соответственно. Масштаб в данном случае определяется отношением размера изображения к номеру гармоники, соответствующей данному отсчёту ИЧХ. Вычисленная с использованием соотношений (1) и (3) фрактальная размерность называется дисперсионной [3].

**Моделирование изображений с фрактальными свойствами на основе преобразования Фурье.** Запишем ДПФ цифрового изображения  $f(j_1, j_2)$  в виде

$$F(m, n) = A(m, n) \exp[i\varphi(m, n)]. \quad (4)$$

Чисто фазовое ДПФ  $Z(m, n)$  соответствует случаю, когда  $A(m, n) = 1$ , т. е.

$$Z(m, n) = \exp[i\varphi(m, n)]. \quad (5)$$

Заменим в выражении (4) модуль ДПФ  $A(m, n)$  степенной дискретной функцией

$$C(m, n) = 1/(m^2 + n^2)^{\beta/2}$$

и осуществим обратное ДПФ от произведения  $C(m, n)Z(m, n)$ . В результате получим фрактальное изображение

$$f_1(j_1, j_2) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C(m, n)Z(m, n) \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (mj_1 + nj_2) \right], \quad (6)$$

которое является действительным, но может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для приведения этого изображения к нормальному виду (к значениям  $f_1(j_1, j_2)$ ) в случае необходимости добавляется постоянная составляющая. Выражение (6) будем рассматривать как нелинейную пространственно-частотную фильтрацию исходного изображения  $f(j_1, j_2)$ . Отметим, что при такой фильтрации сохраняется информация о фазе комплексных экспонент, на которые разлагается изображение. Однако при этом полностью исчезает информация о локализации отдельных спектральных компонент и их квазипериодическом характере. Полученное изображение  $f_1(j_1, j_2)$  можно рассматривать как фрактальное при заданном  $\beta$ .

На рис. 1, *a* приведены исходное изображение «Портрет» и модуль его преобразования Фурье (фрагмент в левом верхнем углу), а на рис. 1, *b* — смоделированное согласно (6) фрактальное изображение и его изотропный энергетический спектр при  $\beta = 2,5$ . Это изображение имеет сходство с исходным, но как бы покрыто некоторой фрактальной пеленой. В спектре нет откликов на квазипериодические компоненты, содержащиеся в исходном изображении.

Чтобы сохранить информацию об анизотропии исходного энергетического спектра и локализации отдельных спектральных компонент при степенной зависимости для ИЧХ смоделированного изображения, осуществим обратное ДПФ от произведения  $A(m, n)B(m, n)Z(m, n)$ , где

$$B(m, n) = C(m, n)/V^{1/2}(\sqrt{m^2 + n^2}).$$

В результате получим изображение

$$f_2(j_1, j_2) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} A(m, n)B(m, n)Z(m, n) \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (mj_1 + nj_2) \right], \quad (7)$$

ИЧХ энергетического спектра которого убывает по степенному закону. На рис. 1, *c, d* показаны реализации синтезированных таким образом изображений и их спектры при  $\beta = 2,5$  и  $\beta = 2,1$  соответственно. Эти изображения аналогичны исходному, хотя ИЧХ их энергетических спектров не имеет выделенных масштабов.



Рис. 1

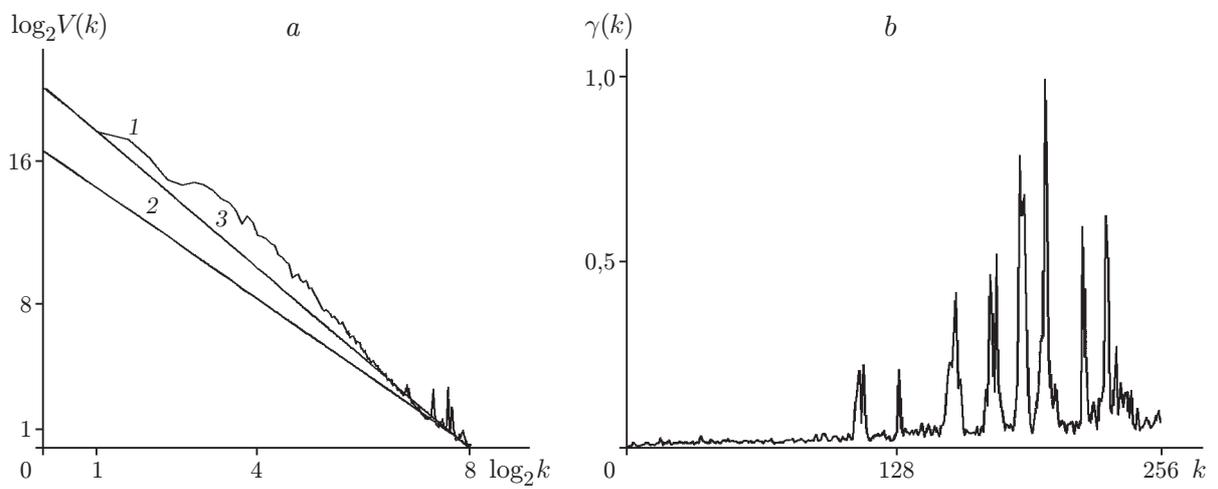


Рис. 2

На рис. 2, *a* представлены в двойном логарифмическом масштабе интегральные частотные характеристики: кривая 1 — исходного изображения; 2 — изображения, показанного на рис. 1, *d*; 3 — изображений, приведённых на рис. 1, *b, c*, которые совпадают. ИЧХ  $V(k)$  синтезированных изображений является инвариантом относительно мультипликативных уменьшений масштаба в области пространственных частот, а также сдвигов и поворотов исходного изображения. Для выбора  $\beta$  можно использовать множество самых различных критериев, начиная от комфортного психофизического восприятия синтезированного изображения (НЧ- либо ВЧ-фильтрация) и заканчивая различными критериями оптимальности.

При синтезе изображений с фрактальными характеристиками по (7) инвариантом является функция анизотропности пространственного спектра  $\gamma(k) = I_{\max}(k)/\langle I(k) \rangle$ , где  $I_{\max}(k)$  — максимальное значение энергетического спектра для данного  $k$ , а  $\langle I(k) \rangle$  — среднее значение. На рис. 2, *b* приведён график функции  $\gamma(k)$ , на котором ярко выражены отклики на квазипериодические компоненты, содержащиеся в изображениях на рис. 1, *a, c, d*.

**Инвариантные меры в пространственной области.** Исходя из соотношения (3), можно предположить, что и в пространственной области для фрактальных изображений логарифм отношения дисперсий изображений на двух соседних масштабах также должен сохраняться. Пусть  $g_1(j_1, j_2)$  и  $g_2(j_1, j_2)$  — дискретные изображения одного размера, полученные при уменьшении масштаба исходного изображения  $g(j_1, j_2)$ , но изображение  $g_2(j_1, j_2)$  дополнительно сглажено низкочастотным фильтром. Изображения  $g_1(j_1, j_2)$  и  $g_2(j_1, j_2)$  разобьём на  $M$  одинаковых достаточно малых областей, содержащих, например,  $2 \times 2$  или  $3 \times 3$  отсчёта, и вычислим в этих областях соответствующие локальные дисперсии  $D_{1i}$  и  $D_{2i}$ , где  $i$  — номер области. Построим фрактальную меру, которая для случая уменьшения масштаба при сглаживании изображения  $g_2(j_1, j_2)$  в 2 раза (относительно масштаба изображения  $g_1(j_1, j_2)$ ) имеет вид

$$L_D = \log_2 \left( \frac{\sum_{i=1}^M D_{1i}}{\sum_{i=1}^M D_{2i}} \right). \quad (8)$$

Инвариантность этой меры относительно кратных уменьшений масштаба устанавливалась следующим образом. Моделировались стохастические фрактальные изображения со степенным энергетическим спектром при различных значениях  $\beta \in (1, 3)$ . Для смоделированных изображений строились уменьшенные аналоги  $g_P$  ( $P = N/l$ ,  $l = 1, 2, 4, 8, \dots$ ) за счёт обрезания соответствующей высокочастотной октавы их фурье-образов. Каждое из полученных изображений  $g_P$  в свою очередь подвергалось сглаживанию низкочастотным фильтром с единичным коэффициентом передачи [2]. Сглаживающее окно имело размер  $3 \times 3$  элемента, что примерно соответствует уменьшению масштаба вдвое.

Для каждого масштаба  $P$  вычислялась фрактальная мера  $L_D(P)$  вида (8) и фрактальная размерность  $d = 2 + (3 - \beta)/2$ . Моделированием на ЭВМ установлено, что для  $P \geq 32$  и  $\beta \in (1, 3)$  при заданном значении  $\beta$  мера  $L_D(P)$  остаётся практически неизменной. Например, при  $\beta = 2$  мера  $L_D(P) = 2,789 \pm 0,015$ . При значениях  $P \leq 16$  инвариантность меры (8) относительно дальнейших уменьшений масштаба для фрактальных изображений нарушается, поскольку статистические характеристики при таких размерах выборки становятся неустойчивыми. Зависимость между  $\beta$  и  $L_D(P)$  хорошо аппроксимируется степенной функцией

$$\beta \approx -0,0564L_D^2(P) - 0,6378L_D(P) + 4,2036. \quad (9)$$

Аналогично можно построить другую меру (триангуляционную), которая для случая

уменьшения масштаба в 2 раза имеет вид

$$L_{\text{tr}} = \log_2 \left( \frac{\sum_{i=1}^M (S_{1i} - 1)}{\sum_{i=1}^M (S_{2i} - 1)} \right), \quad (10)$$

где  $S_{1i}$  и  $S_{2i}$  — локальные площади областей, содержащих по четыре ближайших элемента, соответственно для несглаженного изображения и изображения, сглаженного низкочастотным фильтром с единичным коэффициентом передачи;  $i$  — номер области;  $M$  — число областей. Как и для меры (8), установлена инвариантность меры (10) относительно кратных уменьшений масштаба для  $P \geq 32$  и  $\beta \in (1, 3)$ . Зависимость между  $\beta$  и  $L_{\text{tr}}(P)$  хорошо аппроксимируется степенной функцией

$$\beta \approx -0,0612L_{\text{tr}}^2(P) - 0,5598L_{\text{tr}}(P) + 4,1850. \quad (11)$$

Для синтезированных по алгоритму (7) изображений также можно считать, что рассмотренные выше меры инвариантны относительно кратномасштабных уменьшений. Так, для изображений, представленных на рис. 1,  $c, d$ , среднеквадратичное отклонение от заданных при моделировании и вычисленных с использованием соотношений (10) и (11) значений  $\beta$  не превышает 0,05, в то время как для исходного изображения  $1,88 \leq \beta \leq 3,21$ . При увеличении числа отсчётов и для статистически более однородных изображений меры (8), (10) становятся значительно более устойчивыми.

**Моделирование изображений с фрактальными характеристиками на основе ортогональных преобразований.** Для синтеза больших по информационной ёмкости изображений с фрактальными характеристиками вместо ДПФ во многих случаях предпочтительнее использовать другие ортогональные преобразования с действительным ядром, позволяющие сократить время расчётов и увеличить размеры изображений. В результате прямого ортогонального преобразования с действительным ядром  $T(j_1, j_2; m, n)$  изображение  $f(j_1, j_2)$  трансформируется в матрицу  $F_T(m, n)$  того же размера с элементами, которые запишем в виде, аналогичном выражению (4):

$$F_T(m, n) = A_T(m, n) \operatorname{sgn}[F_T(m, n)], \quad (12)$$

где  $A_T(m, n) = |F_T(m, n)|$ ,  $(m, n) = 0, 1, \dots, N-1$ , — отсчёты ортогонального преобразования. Аналогами выражений (6) и (7) при моделировании изображений с фрактальными характеристиками на основе обобщённой пространственно-частотной фильтрации соответственно будут выражения

$$f_1(j_1, j_2) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C(m, n) \operatorname{sgn}[F_T(m, n)] T^{-1}(j_1, j_2; m, n), \quad (13)$$

$$f_2(j_1, j_2) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_T(m, n) B_T(m, n) \operatorname{sgn}[F_T(m, n)] T^{-1}(j_1, j_2; m, n), \quad (14)$$

где  $T^{-1}(j_1, j_2; m, n)$  — ядро обратного ортогонального преобразования;

$$B_T(m, n) = C(m, n) / V_T^{1/2}(\sqrt{m^2 + n^2})$$

( $V_T(k)$  — аналог ИЧХ для соответствующего ортогонального преобразования в плоскости обобщённых частот).

Выделим следующие ортогональные преобразования, для которых существуют быстрые алгоритмы: дискретное косинусное преобразование  $F_C(m, n_2)$ , дискретное преобразование Хартли  $F_H(m, n)$  и  $Q$ -преобразование  $F_Q(m, n)$  [2, 4]. Для преобразования Хартли и  $Q$ -преобразования [5]

$$V_Q(k) = V_H(k) = V(k)$$

и результаты синтеза фрактальных изображений по формулам (13) и (14) практически совпадают с результатами, получаемыми с использованием выражений (6) и (7) соответственно. При использовании косинусного преобразования  $V_C(k)$  является хорошей оценкой  $V(k)$  [5], а меры (8), (10) остаются практически неизменными при  $P \geq 32$  и  $\beta \in (1, 3)$ . Отметим также, что для косинусного преобразования разработаны алгоритмы, позволяющие осуществлять данное преобразование значительно быстрее, чем находится преобразование Фурье при гораздо меньшем объёме памяти и практическом отсутствии краевых эффектов в процедуре циклической фильтрации.

В качестве примера приведём результаты моделирования изображения с фрактальными характеристиками с использованием в качестве исходного микроскопического изображения образца аморфного сплава, визуализированного в электронном микроскопе методом дефокусировки. В этом случае распределение яркости  $E(x, y)$  на изображении без учёта aberrации линз имеет вид [6]

$$E(x, y) \sim \psi(x, y) \otimes F^{-1} \sin[W(u)]. \quad (15)$$

Здесь  $\psi(x, y)$  — проекция трёхмерного электростатического распределения потенциала в образце на плоскость;  $W(u) = \pi \Delta \lambda (u_1^2 + u_2^2)$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $\Delta$  — величина дефокусировки;  $F^{-1}$  — оператор обратного преобразования Фурье;  $\otimes$  — оператор свёртки. Выражение (15) позволяет рассматривать функцию  $\sin[W(u)]$  как частотную характеристику метода дефокусировки [6]. Для получения достаточно высокого контраста дефокусировка не всегда выбирается оптимальной, что приводит к искажениям визуализированного изображения. На рис. 3, *a* показано микроскопическое изображение наноструктур в аморфном сплаве, полученное методом дефокусировки, и модуль его косинусного преобразования (фрагмент в левом верхнем углу), а на рис. 3, *b, c* приведены изображения, синтезированные по алгоритму (14) с использованием косинусного преобразования, при  $\beta = 1,4$  и  $\beta = 2,1$  соответственно. Интегральные характеристики  $V_C(k)$  косинусных спектров этих изображений в двойном логарифмическом масштабе приведены на рис. 3, *d* (кривая 1 — для исходного изображения, кривые 2 и 3 — для изображения, синтезированного при  $\beta = 1,4$  и  $\beta = 2,1$  соответственно). Кривая 1 имеет два локальных максимума, наличие которых связано с видом частотной характеристики метода дефокусировки. Это может привести к неверной интерпретации особенностей изображения, поскольку данные максимумы можно связать с присутствием соответствующих квазигармонических компонент в распределении наноструктур. На изображениях, синтезированных по алгоритму (14), вид характерных наноструктур такой же, как и на исходном изображении, однако их интегральные характеристики  $V_C(k)$  убывают по степенному закону.

Характеристика  $V_C(k)$  смоделированных таким образом изображений является инвариантом относительно мультипликативных уменьшений масштаба в области пространственных частот данного преобразования. Среднеквадратичное отклонение от заданных при моделировании и вычисленных с использованием соотношений (10) и (11) значений  $\beta$  не превышает 0,03 за счёт большого размера изображений, их высокой однородности и отсутствия краевых эффектов при циклической фильтрации.

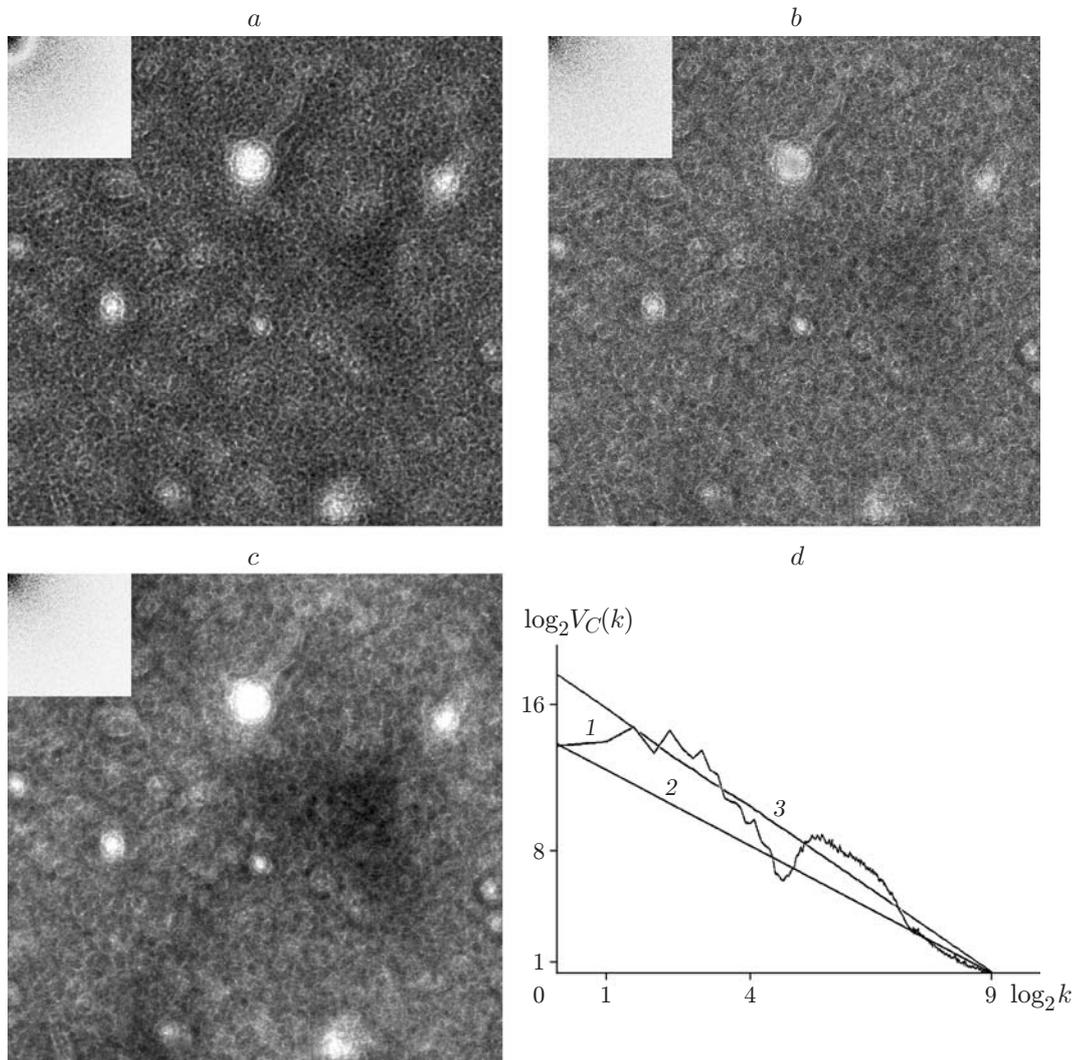


Рис. 3

**Заключение.** В предлагаемой работе на основе обобщённой пространственно-частотной фильтрации разработаны алгоритмы моделирования изображений с фрактальными характеристиками, инвариантными относительно мультипликативных уменьшений масштаба. Синтезированные изображения обладают максимальным сходством с исходными изображениями благодаря сохранению фазы либо знака амплитуды соответствующего ортогонального преобразования.

Разработанные методы и алгоритмы позволяют осуществлять нелинейную НЧ- и ВЧ-фильтрации, а в некоторых случаях и восстановление изображений. При этом ИЧХ спектров отфильтрованных и восстановленных изображений не зависят от особенностей частотной характеристики системы визуализации. Для восстановления, например, полученных методом дефокусировки микроскопических изображений, а также размытых изображений вначале необходимо изменить фазы отсчётов ДПФ исходных изображений в соответствии с распределением знаков частотной характеристики системы визуализации, затем можно применять предложенные в данной работе методы и алгоритмы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: «РХД», 2001. 528 с.
2. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Т. 1, 2. 790 с.
3. **Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А. и др.** Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
4. **Bracewell R. N., Buneman O., Hao H., Villasenor J.** Fast two-dimensional Hartley transform // Proc. IEEE. 1986. **74**, N 9. P. 1282.
5. **Грудин Б. Н., Кисленок Е. Г., Плотников В. С., Фищенко В. К.** Анализ, фильтрация и декомпозиция микроскопических изображений на основе ортогональных преобразований // Автоматрия. 2007. **43**, № 1. С. 24–36.
6. **Плотников В. С., Грудин Б. Н., Кисленок Е. Г.** Моделирование микроскопических изображений аморфных сплавов // Физика металлов и металловедение. 2004. **97**, № 4. С. 3–10.

*Поступила в редакцию 8 февраля 2010 г.*

---