УДК 519.62

Метод численного моделирования магнитотеллурического поля в горизонтально-однородной среде: разностные схемы, оценки сходимости*

О.Б. Забинякова[1], С.Н. Скляр[2]

[1]Научная станция Российской академии наук в г. Бишкеке, Бишкек, 720049, Киргизия

[2]Американский Университет в Центральной Азии, ул. А. Токомбаева, 7/6, Бишкек, 720060, Киргизия

E-mails: perah.92@inbox.ru, zabinyakova_o@auca.kg (Забинякова О.Б.), sklyar51@gmail.com, sklyar_s@auca.kg (Скляр С.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 15, 2022.

Забинякова О.Б., Скляр С.Н. Метод численного моделирования магнитотеллурического поля в горизонтально-однородной среде: разностные схемы, оценки сходимости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 1. — С. 33–51.

В работе предлагается метод численного решения прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования. Построение и уточнение разностных схем осуществляется с использованием метода локальных интегральных уравнений. Рассматриваются естественные варианты интерполяции приближенного решения. Доказываются оценки сходимости приближенного решения к точному и оценки погрешности интерполяции.

DOI: 10.15372/SJNM20220103

Ключевые слова: *модель Тихонова–Каньяра, прямая одномерная задача магнитотеллурического зондирования, численное решение, интерполяция приближенного решения, матричная экспонента, локальное интегральное уравнение, оценка сходимости.*

Zabinyakova O.B., Sklyar S.N. A method of the magnetotelluric field numerical modelling in a horizontally homogeneous medium: difference schemes, estimates of convergence // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 1. — P. 33–51.

This paper proposes a method for the numerical solution of the direct one-dimensional problem of magnetotelluric sounding. The construction of difference schemes is realized by the local integral equations method. A natural variant of the interpolation of an approximate solution is considered. The estimate of convergence of the approximate solution to the exact one and the estimate of the interpolation error are proved.

Keywords: *Tikhonov–Cagniard model, direct one-dimensional problem of magnetotelluric sounding, numerical solution, interpolation of an approximate solution, matrix exponent, local integral equation, convergence estimates.*

*Работа выполнена в рамках государственного задания НС РАН (проект № АААА-А19-119020190063-2) и научно-исследовательской деятельности АУЦА.

Введение

Метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ) является одним из важнейших методов глубинной геофизики. Он основан на изучении вариаций переменного электромагнитного поля магнитосферной и ионосферной природы с целью получения сведений о строении верхних слоев Земли и протекающих в них геодинамических процессах. С учетом электромагнитной природы явлений, исследуемых методом МТЗ, интерпретация данных полевых наблюдений проводится в рамках математических моделей, основанных на системе уравнений Максвелла [1–4]. Эта система содержит большое количество параметров, которыми зачастую можно пренебречь, не подвергая сомнению адекватность получаемых при этом моделей. Применение метода МТЗ на практике стало возможным благодаря советскому математику и геофизику А.Н. Тихонову [5] и французскому геофизику Л. Каньяру [6], предложившим одномерную модель МТЗ. Модель Тихонова–Каньяра достоверно описывает реальные магнитотеллурические процессы в рамках стандартных упрощающих предположений, среди них — квазистационарность и зависимость от времени по гармоническому закону, однородность геосреды в горизонтальных направлениях, постоянство магнитной и диэлектрической проницаемостей; электропроводность среды не зависит от частоты. В этих предположениях система уравнений Максвелла распадается на две независимые подсистемы, описывающие TE- и TM-моды электромагнитного поля. Система уравнений для TM-моды имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H^y}{\partial z} = -\sigma E^x, \\ \dfrac{\partial E^x}{\partial z} = i\omega\mu_0 H^y, \end{cases} \qquad z \in (0, z_{\max}). \tag{1}$$

В (1) символами H^y и E^x обозначены комплексные компоненты напряженности магнитного и электрического полей вдоль осей Oy и Ox соответственно (в дальнейшем индексы x и y будем опускать), $\sigma = \sigma(z)$ — электрическая проводимость, μ_0 — магнитная восприимчивость в вакууме, ω — частота электромагнитного поля, i — комплексная единица. В качестве краевых условий можно рассматривать различные комбинации значений неизвестных функций в граничных точках отрезка $(0, z_{\max})$, на данном этапе на выборе краевых условий внимания акцентировать не будем.

Основной функцией, представляющей интерес при анализе и интерпретации магнитотеллурических данных, является импеданс (в одномерном случае это импеданс Тихонова–Каньяра), определяемый как отношение взаимно-ортогональных компонент электромагнитного поля — векторов электрической и магнитной напряженностей [1–8]. Поэтому во многих работах, посвященных прямой одномерной задаче МТЗ, внимание авторов преимущественно направлено на вычисление импеданса, а не на вычисление самих полей. В [1–4, 7] предложено решение задачи Коши для одномерного уравнения Гельмгольца, к которому сводится система (1) при исключении из нее одного из неизвестных, а, например, в [8] рассмотрено решение этого же уравнения для нескольких частных случаев функции $\sigma(z)$ (кусочно-постоянная, экспоненциальная и степенная функции). Имеется ряд работ, например [9–12], рассматривающих аналитическое решение одномерных задач магнитотеллурического зондирования в горизонтально-слоистых изотропных и анизотропных (в том числе и бианизотропных) средах, а в работе [13] рассматривалась задача математического моделирования магнитотеллурического поля в одномерных кусочно-градиентных средах с экспоненциальным распределением удельной электропроводности. Полученные решения могут найти свое применение в процессе тестирования новых численных методов, а также использоваться при решении прямых и обратных задач МТЗ.

Отметим, что для численного решения уравнений Максвелла обычно используются конечно-разностные методы. Начало интенсивного развития этих методов было положено в работе [14], в которой были использованы смещенные сетки, а продолжение это развитие получило в работах [15, 16]. В областях со сложной геометрией предпочтение отдается методам конечных объемов [17, 18] на неструктурированных сетках. Разностные схемы специального вида для решения прямой задачи МТЗ как в одномерном, так и в двумерном случаях были построены в [19–21]. В данной работе проведено построение и исследование качественных свойств специальных разностных схем для одномерной прямой задачи МТЗ: доказаны оценки сходимости, предложены варианты интерполяции приближенного решения. Построенные разностные схемы предполагается положить в основу для создания алгоритма решения обратной задачи МТЗ. Обратим внимание, что разностные схемы, предлагаемые и исследуемые в данной работе, использовались при проведении численных экспериментов по моделированию магнитотеллурического поля и магнитотеллурического импеданса в вертикально градиентных средах. В качестве тестовой задачи рассматривалась система уравнений (1) с разными вариантами постановки краевых условий для случая степенной модели Като–Кикучи [8]. Результаты численных экспериментов в подробном виде представлены в работах [22, 23], где продемонстрированы разные случаи сходимости тестируемых разностных схем в зависимости от параметров решаемой задачи и вычислительной сетки.

Итак, запишем систему (1) в матричной форме:

$$\frac{d\overrightarrow{U}(z)}{dz} = L(z)\overrightarrow{U}(z), \quad z \in (0, z_{\max}), \tag{2}$$

где $\overrightarrow{U}(z) = \begin{pmatrix} H(z) \\ E(z) \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных функций; $L(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma(z) \\ i\omega\mu_0 & 0 \end{pmatrix}$ — переменная матрица системы.

1. Построение разностной схемы методом локальных интегральных уравнений

Построим разностную схему для системы (2), основываясь на методе, который в дальнейшем будем называть *методом локальных интегральных уравнений*. На отрезке $[0, z_{\max}]$ рассмотрим произвольную неравномерную сетку

$$0 = z_1 < z_2 < \cdots < z_J = z_{\max}, \quad \Delta z_j = z_{j+1} - z_j, \quad z_{j+1/2} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1.$$

Функцию электрической проводимости $\sigma(z)$ будем считать кусочно-непрерывной, разрывы ее могут располагаться только в узлах вычислительной сетки и иметь скачкообразный характер. В этом случае решение уравнения (2), по крайней мере, — непрерывная функция.

Рассмотрим произвольную фиксированную сеточную ячейку $[z_j, z_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, J-1$, на которой и проведем основные рассуждения. Уравнение (2) перепишем в следующей форме:

$$\frac{d\overrightarrow{U}(z)}{dz} = L_{j+1/2}\overrightarrow{U}(z) + \left[L(z) - L_{j+1/2}\right]\overrightarrow{U}(z), \quad z \in (z_j, z_{j+1}), \tag{3}$$

где $L_{j+1/2} = L(z_{j+1/2})$. Решение уравнения (3) может быть представлено в виде (см. [24])

$$\overrightarrow{U}(z) = e^{(z-z_j)L_{j+1/2}}\overrightarrow{U}(z_j) + \overrightarrow{\Delta}(z_j, z), \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, J-1, \tag{4}$$

где

$$\overrightarrow{\Delta}(z_j, z) = \int\limits_{z_j}^{z} e^{(z-s)L_{j+1/2}}\bigl[L(s) - L_{j+1/2}\bigr]\overrightarrow{U}(s)\,ds. \tag{5}$$

Соотношение (4) вместе с (5) можно трактовать как *локальное интегральное уравнение* относительно неизвестной вектор-функции $\overrightarrow{U}$, с этим уравнением мы и будем работать в дальнейшем. Прежде всего запишем экспоненту в правой части (4) в матричной форме [24–26]:

$$e^{(z-z_j)L_{j+1/2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr] & -\dfrac{\sigma(z_{j+1/2})}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr] \\ \dfrac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr] & \operatorname{ch}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr] \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где используется обозначение

$$k_{j+1/2} = (1-i)\sqrt{\omega\mu_0\ \sigma(z_{j+1/2})/2}.$$

Подставим в (4) $z = z_{j+1}$, отбросим погрешность $\overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1})$ и, вводя обозначения для значений приближенного решения в узлах сетки

$$\overrightarrow{U}^h_j = \begin{pmatrix} H^h_j \\ E^h_j \end{pmatrix} \approx \overrightarrow{U}(z_j), \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

получим разностную схему в экспоненциальной форме

$$\overrightarrow{U}^h_{j+1} = e^{\Delta z_j L_{j+1/2}}\overrightarrow{U}^h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{7}$$

Расшифруем (7), используя при $z = z_{j+1}$ матричную форму экспоненты (6):

$$\begin{cases} H^h_{j+1} = \operatorname{ch}(\varDelta z_j k_{j+1/2})H^h_j - \dfrac{\sigma(z_{j+1/2})}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}(\varDelta z_j k_{j+1/2})E^h_j, \\ E^h_{j+1} = \dfrac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}(\varDelta z_j k_{j+1/2})H^h_j + \operatorname{ch}(\varDelta z_j k_{j+1/2})E^h_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{8}$$

Отметим, что разностная схема (8) также была построена в работах [19, 20] на основе проекционного варианта интегро-интерполяционного метода [27].

2. Оценка сходимости разностной схемы (7)

Докажем оценку сходимости приближенного решения к точному, для простоты ограничившись начальным условием

$$\overrightarrow{U}(0) = \overrightarrow{U}^h_1 = \overrightarrow{F}. \tag{9}$$

Рассмотрим сеточную вектор-функцию $\overrightarrow{W}$ со значениями:

$$\overrightarrow{W}_j = \overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J.$$

Подставим в (4) $z = z_{j+1}$, из полученных соотношений вычтем соотношения (7), и, учитывая условия (9), получим задачу для определения функции $\overrightarrow{W}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{W}_{j+1} = e^{\Delta z_j L_{j+1/2}} \overrightarrow{W}_j + \overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, J-1, \\ \overrightarrow{W}_1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В пространстве двумерных векторов с комплексными компонентами вида $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix}$ введем норму

$$\big\|\overrightarrow{W}\big\|_\infty = \max\big\{\big|w^{(1)}\big|, \big|w^{(2)}\big|\big\}.$$

Определим также соответствующую ей норму матрицы $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$:

$$\big\|L\big\|_\infty = \max\big\{|l_{11}| + |l_{12}|, |l_{21}| + |l_{22}|\big\}.$$

Перейдем к нормам в соотношениях (10). Используя свойства нормы, получим

$$\big\|\overrightarrow{W}_{j+1}\big\|_\infty \le \big\|e^{\Delta z_j L_{j+1/2}}\big\|_\infty \big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty + \big\|\overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{11}$$

Несложно проверить следующие вспомогательные неравенства:

$$\big\|L_{j+1/2}\big\|_\infty = \max\big\{\sigma(z_{j+1/2}), \omega\mu_0\big\} \le \max_{1\le j\le J-1} \sigma(z_{j+1/2}) + \omega\mu_0 \equiv \eta,$$
$$\big\|e^{\Delta z_j L_{j+1/2}}\big\|_\infty \le e^{\Delta z_j \|L_{j+1/2}\|_\infty} \le e^{\eta \Delta z},$$

где в последнем неравенстве $\Delta z \equiv \max_{1\le j\le J-1} \Delta z_j$. Учитывая эти оценки, из неравенств (11) получаем

$$\big\|\overrightarrow{W}_{j+1}\big\|_\infty \le e^{\eta\Delta z}\big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty + \big\|\overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{12}$$

Разрешим рекурсию (12). С учетом начального условия задачи (10) приходим к выводу

$$\begin{aligned} \big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty &\le e^{(j-1)\,\eta\Delta z}\big\|\overrightarrow{W}_1\big\|_\infty + \sum_{k=1}^{j-1} e^{(j-1-k)\,\eta\Delta z}\big\|\overrightarrow{\Delta}(z_k, z_{k+1})\big\|_\infty \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} e^{(j-1-k)\,\eta\Delta z}\big\|\overrightarrow{\Delta}(z_k, z_{k+1})\big\|_\infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Приведем вспомогательные оценки:

$$\big\|L(s) - L_{j+1/2}\big\|_\infty = \left\|\big[\sigma(z_{j+1/2}) - \sigma(s)\big]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \big|\sigma(z_{j+1/2}) - \sigma(s)\big| \le C_1\Delta z, \tag{14}$$

где $s \in [z_j, z_{j+1}]$, $C_0 = \max_{0\le z\le z_{\max}} \big\|\overrightarrow{U}(z)\big\|_\infty$, $C_1 = \max_{0\le z\le z_{\max}} \big|\sigma'(z)\big|$.

Далее из (5) и только что доказанного получаем

$$\begin{aligned} \big\|\overrightarrow{\Delta}(z_j, z)\big\|_\infty &\le \int_{z_j}^{z} e^{(z-s)\,\|L_{j+1/2}\|_\infty}\big\|L(s) - L_{j+1/2}\big\|_\infty \big\|\overrightarrow{U}(s)\big\|_\infty\, ds \le \Delta z\, C_0\, C_1 \int_{z_j}^{z} e^{(z-s)\,\eta}\, ds \\ &= \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0 C_1\big(e^{(z-z_j)\,\eta} - 1\big) \le \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0 C_1\big(e^{\eta\Delta z} - 1\big), \quad z \in [z_j, z_{j+1}]. \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь (15) позволяет завершить неравенство (13):

$$\begin{aligned}\big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty &\le \sum_{k=1}^{j-1} e^{(j-1-k)\,\eta\Delta z}\big\|\overrightarrow{\Delta}(z_k, z_{k+1})\big\|_\infty \le \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0C_1\big(e^{\eta\Delta\, z}-1\big)\sum_{k=0}^{j-2} e^{k\eta\Delta z}\\ &\le \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0C_1\big(e^{(j-1)\,\eta\Delta z}-1\big).\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку сходимости приближенного решения (решения, определяемого разностной схемой (7), (9)) к точному решению задачи (2), (9):

$$\big\|\overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}{}^h_j\big\|_\infty \le \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0C_1\big(e^{(j-1)\,\eta\Delta z}-1\big), \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{16}$$

Если вычислительная сетка удовлетворяет условию

$$\Delta z \equiv \max_{1\le j\le J-1} \Delta z_j \le \gamma \min_{1\le j\le J-1} \Delta z_j,$$

в котором положительная константа γ не зависит от J (квазиравномерная сетка), то (16) превращается в оценку

$$\big\|\overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}{}^h_j\big\|_\infty \le \frac{\Delta z}{\eta}\, C_0C_1\big(e^{\eta\gamma z_{\max}}-1\big), \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{17}$$

3. Уточнение оценки сходимости (17)

Оценка сходимости (17) основана на неравенстве (15) для погрешности $\overrightarrow{\Delta}(z_j, z)$. Детальный анализ этой погрешности позволяет доказать, что для схемы (7), (9) сходимость приближенного решения к точному реализуется с более высоким, чем в (17), порядком по Δz.

Используя формулу Тейлора, запишем для функции электрической проводимости следующее соотношение:

$$\sigma\big(z_{j+1/2}\big) - \sigma(s) = (z_{j+1/2} - s)\,\sigma'\big(z_{j+1/2}\big) - \frac{1}{2}\big(z_{j+1/2} - s\big)^2\sigma''\big(z_{j,s}\big), \quad s, z_{j,s} \in \big[z_j, z_{j+1}\big]. \tag{18}$$

Определим матричную функцию по формуле

$$M_{j+1/2}(s, z) = e^{(z-s)L_{j+1/2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} e^{(s-z_j)L_{j+1/2}}, \quad z_j \le s \le z \le z_{j+1}. \tag{19}$$

Введем при $z \in \big[z_j, z_{j+1}\big]$ следующие обозначения:

$$\overrightarrow{\Delta}_1\big(z_j, z\big) = \sigma'\big(z_{j+1/2}\big)\left[\int_{z_j}^{z} \big(z_{j+1/2} - s\big) M_{j+1/2}(s, z)\, ds\right]\overrightarrow{U}\big(z_j\big),$$

$$\overrightarrow{\Delta}_2\big(z_j, z\big) = -\frac{1}{2}\left[\int_{z_j}^{z} \big(z_{j+1/2} - s\big)^2\sigma''\big(z_{j,s}\big) M_{j+1/2}(s, z)\, ds\right]\overrightarrow{U}\big(z_j\big),$$

$$\overrightarrow{\Delta}_3\big(z_j, z\big) = \int_{z_j}^{z} e^{(z-s)L_{j+1/2}}\big[L(s) - L_{j+1/2}\big]\overrightarrow{\Delta}\big(z_j, s\big)\, ds.$$

Теперь, в соответствии с представлениями (5) и (4), а также формулами (18) и (19), запишем погрешность $\overrightarrow{\Delta}(z_j, z)$ как сумму трех слагаемых:

$$\overrightarrow{\Delta}(z_j, z) = \overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z) + \overrightarrow{\Delta}_2(z_j, z) + \overrightarrow{\Delta}_3(z_j, z). \tag{20}$$

Оценим каждое из этих слагаемых, начиная с последнего. С этой целью воспользуемся неравенствами (14) и (15). В результате получим

$$\begin{aligned} \big\|\overrightarrow{\Delta}_3(z_j, z)\big\|_\infty &\le \int\limits_{z_j}^{z} e^{(z-s)\,\|L_{j+1/2}\|_\infty} \big\|L(s) - L_{j+1/2}\big\|_\infty \,\big\|\overrightarrow{\Delta}(z_j, s)\big\|_\infty ds \\ &\le \frac{\Delta z^2}{\eta}\, C_0 C_1^2 \big(e^{\eta\Delta z} - 1\big) \int\limits_{z_j}^{z} e^{(z-s)\,\eta}\, ds \\ &\le \frac{\Delta z^2}{\eta^2}\, C_0 C_1^2 \big(e^{\eta\Delta z} - 1\big)^2, \quad z \in \big[z_j, z_{j+1}\big]. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (19), в соответствии со свойствами нормы, следует

$$\big\|M_{j+1/2}(s, z)\big\|_\infty \le e^{(z-z_j)\,\eta}, \quad z_j \le s \le z \le z_{j+1}. \tag{22}$$

Теперь из неравенства (22) получаем

$$\big\|\overrightarrow{\Delta}_2(z_j, z)\big\|_\infty \le \Delta z^3\, C_0 C_2 e^{\eta\Delta\, z}, \quad z \in \big[z_j, z_{j+1}\big], \tag{23}$$

где $C_2 = \max_{0\le z\le z_{\max}} \big|\sigma''(z)\big|$. Погрешность $\overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z)$ просто вычислим. Для этого, используя (19) и матричное представление экспоненты (6), запишем оператор $M_{j+1/2}(s, z)$ в матричной форме:

$$M_{j+1/2}(s, z) = \begin{pmatrix} m^{11}_{j+1/2}(s, z) & m^{12}_{j+1/2}(s, z) \\ m^{21}_{j+1/2}(s, z) & m^{22}_{j+1/2}(s, z) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} m^{11}_{j+1/2}(s, z) &= \frac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\, \mathrm{sh}\,\big[(s - z_j)k_{j+1/2}\big]\, \mathrm{ch}\big[(z - s)k_{j+1/2}\big], \\ m^{12}_{j+1/2}(s, z) &= \mathrm{ch}\big[(s - z_j)k_{j+1/2}\big]\, \mathrm{ch}\big[(z - s)k_{j+1/2}\big], \\ m^{21}_{j+1/2}(s, z) &= \left(\frac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\right)^2 \mathrm{sh}\big[(s - z_j)k_{j+1/2}\big]\, \mathrm{sh}\big[(z - s)k_{j+1/2}\big], \\ m^{22}_{j+1/2}(s, z) &= \frac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\, \mathrm{ch}\big[(s - z_j)k_{j+1/2}\big]\, \mathrm{sh}\big[(z - s)k_{j+1/2}\big]. \end{aligned} \tag{24}$$

Вычислим интеграл в выражении $\overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z)$. С этой целью покомпонентно проинтегрируем матрицу $M_{j+1/2}(s, z)$ [24]. Учитывая формулы (24), получим

$$R_{j+1/2}(z) = \int\limits_{z_j}^{z} \big(z_{j+1/2} - s\big) M_{j+1/2}(s, z)\, ds = \begin{pmatrix} r^{11}_{j+1/2}(z) & r^{12}_{j+1/2}(z) \\ r^{21}_{j+1/2}(z) & r^{22}_{j+1/2}(z) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где

$$r^{11}_{j+1/2}(z) = \frac{i\omega\mu_0}{4k^2_{j+1/2}}\Bigg[\bigg((z_{j+1}-z)(z-z_j)k_{j+1/2}+\frac{1}{k_{j+1/2}}\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]-\\ (z-z_j)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg],$$

$$r^{12}_{j+1/2}(z) = \frac{z_{j+1}-z}{4}\Bigg[(z-z_j)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]+\frac{1}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg],$$

$$r^{21}_{j+1/2}(z) = \bigg(\frac{i\omega\mu_0}{2k_{j+1/2}}\bigg)^2(z_{j+1}-z)\Bigg[(z-z_j)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]-\\ \frac{1}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg],$$

$$r^{22}_{j+1/2}(z) = \frac{i\omega\mu_0}{4k^2_{j+1/2}}\Bigg[\bigg((z_{j+1}-z)(z-z_j)k_{j+1/2}-\frac{1}{k_{j+1/2}}\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]+\\ (z-z_j)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg].$$

Подставляя в (25) $z = z_{j+1}$, получим

$$r^{22}_{j+1/2}(z_{j+1}) = -r^{11}_{j+1/2}(z_{j+1}) = \frac{i\omega\mu_0\Delta z_j}{4k^2_{j+1/2}}\Bigg[\operatorname{ch}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)-\frac{\operatorname{sh}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)}{\Delta z_j k_{j+1/2}}\Bigg],\\ r^{12}_{j+1/2}(z_{j+1}) = r^{21}_{j+1/2}(z_{j+1}) = 0.$$

Теперь, в соответствии с последними соотношениями, запишем представление для погрешности $\overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z_{j+1})$:

$$\overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z_{j+1}) = \sigma'(z_{j+1/2})R_{j+1/2}(z_{j+1})\overrightarrow{U}(z_j)\\ = \frac{i\omega\mu_0\Delta z_j}{4k^2_{j+1/2}}\sigma'(z_{j+1/2})\Bigg[\operatorname{ch}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)-\frac{\operatorname{sh}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)}{\Delta z_j k_{j+1/2}}\Bigg]\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{U}(z_j). \quad (26)$$

Легко получить представление

$$\operatorname{ch}(w)-\frac{\operatorname{sh}(w)}{w} = 2w^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+3)!}w^{2n},$$

в котором w — комплексная переменная, а степенной ряд имеет бесконечный радиус сходимости. Из этого представления следует оценка

$$\left|\operatorname{ch}(w)-\frac{\operatorname{sh}(w)}{w}\right| \le K_0|w|^2$$

с некоторой константой K_0, определяемой максимально допустимым значением $|w|$.

Теперь из (26) и последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$\left\| \overrightarrow{\Delta}_1(z_j, z_{j+1}) \right\|_\infty \le C_0 C_1 K_0 \omega \mu_0 \Delta z^3. \tag{27}$$

Легко проверить справедливость неравенств

$$1 \le \frac{e^{\eta\Delta z} - 1}{\eta\Delta z} \le \frac{e^{\eta z_{\max}} - 1}{\eta z_{\max}}. \tag{28}$$

Представление (20) и неравенства (21), (23), (27) и (28) позволяют утверждать, что для погрешности $\overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1})$ справедлива более точная, чем (15), оценка

$$\left\| \overrightarrow{\Delta}(z_j, z_{j+1}) \right\|_\infty \le C\,\Delta z^3, \tag{29}$$

в которой константа C не зависит от Δz.

Наконец уточним оценку (17) сходимости решения схемы (7), (9) к точному решению задачи (2), (9). Для этого воспользуемся неравенствами (13), (28), (29) и, в случае квазиравномерной сетки, получим

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{W}_j \right\|_\infty &\le \sum_{k=1}^{j-1} e^{(j-1-k)\,\eta\Delta z} \left\| \overrightarrow{\Delta}\big(z_k, z_{k+1}\big) \right\|_\infty \le C\Delta z^3 \sum_{k=0}^{j-2} e^{k\,\eta\Delta z} \le C\Delta z^3 \frac{e^{(j-1)\,\eta\Delta z} - 1}{e^{\eta\Delta z} - 1} \\ &\le \frac{\Delta z^2}{\eta}\, C\big(e^{\eta\,\gamma z_{\max}} - 1\big). \end{aligned}$$

Окончательно оценка сходимости выглядит следующим образом:

$$\left\| \overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}_j^h \right\|_\infty \le \frac{\Delta z^2}{\eta}\, C\big(e^{\eta\,\gamma z_{\max}} - 1\big), \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

или

$$\max\Big\{ \big|H(z_j) - H_j^h\big|, \big|E(z_j) - E_j^h\big| \Big\} \le K\Delta z^2, \quad j = 1, 2, \dots, J, \tag{30}$$

где константа K не зависит от Δz.

4. Интерполяция приближенного решения (7), (9)

Для интерполяции сеточной функции, найденной при помощи разностной схемы, обычно используют самый простой интерполянт — кусочно-линейный сплайн. Однако такой вид интерполяции нельзя считать эффективным: в случае достаточно редкой сетки и больших градиентов решения такой способ интерполяции генерирует большие ошибки. Мы предлагаем естественный вариант интерполяции приближенного решения, основанный на формулах *метода локальных интегральных уравнений*.

Предположим, что сеточная вектор-функция $\overrightarrow{U}^h = \Big\{ \overrightarrow{U}_j^h \Big\}_{j=1}^J$ найдена как решение задачи (7), (9). Тогда в качестве интерполянта рассмотрим непрерывную вектор-функцию

$$\overrightarrow{U}^h(z) = \begin{pmatrix} H^h(z) \\ E^h(z) \end{pmatrix},$$

определенную следующим образом:

$$\overrightarrow{U}^h(z) = e^{(z-z_j)L_{j+1/2}}\overrightarrow{U}^h_j, \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, J-1. \tag{31}$$

Формулы (31) легко преобразуются в формулы, удобные для вычислений. Для этого достаточно использовать матричное представление (6) операторной экспоненты:

$$\begin{cases} H^h(z) = & \operatorname{ch}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr]H^h_j - \\ & \dfrac{\sigma(z_{j+1/2})}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr]E^h_j, \\ E^h(z) = & \dfrac{i\omega\mu_0}{k_{j+1/2}}\operatorname{sh}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr]H^h_j + \\ & \operatorname{ch}\bigl[(z-z_j)k_{j+1/2}\bigr]E^h_j, \end{cases} \qquad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Оценим погрешность интерполяции (31). Для этого, вычитая из формул (4) соответствующие формулы (31), получим:

$$\overrightarrow{U}(z) - \overrightarrow{U}^h(z) = e^{(z-z_j)L_{j+1/2}}\Bigl[\overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j\Bigr] + \overrightarrow{\Delta}(z_j, z), \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \; j = 1, 2, \dots, J-1. \tag{32}$$

Перейдем к нормам в обеих частях соотношений (32), при этом учтем оценки (15), (28) и (30):

$$\begin{aligned} \bigl\|\overrightarrow{U}(z) - \overrightarrow{U}^h(z)\bigr\|_\infty &\le e^{(z-z_j)\|L_{j+1/2}\|_\infty}\bigl\|\overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j\bigr\|_\infty + \bigl\|\overrightarrow{\Delta}(z_j, z)\bigr\|_\infty \\ &\le \frac{\Delta z^2}{\eta}\,C\bigl(e^{\eta\gamma z_{\max}} - 1\bigr)e^{\eta\Delta z} + \frac{\Delta z}{\eta}\,C_1C_2\bigl(e^{\eta\Delta z} - 1\bigr) \\ &\le \frac{\Delta z^2}{\eta}\,C\bigl(e^{\eta\gamma z_{\max}} - 1\bigr)e^{\eta z_{\max}} + \Delta z^2\,C_1C_2\frac{e^{\eta z_{\max}} - 1}{\eta z_{\max}}. \end{aligned}$$

Окончательно для интерполяции (31) получаем оценку погрешности

$$\bigl\|\overrightarrow{U}(z) - \overrightarrow{U}^h(z)\bigr\|_\infty \le K\,\Delta z^2, \quad 0 \le z \le z_{\max},$$

в которой константа K не зависит от Δz. Последнее неравенство гарантирует сходимость интерполянта (31) к точному решению задачи (2), (9) при $\Delta z \to 0$ со вторым порядком.

5. Уточнение разностной схемы (7) (схемы (8))

Теперь рассмотрим уточнение разностной схемы (7) и докажем для уточненной схемы оценку сходимости более высокого порядка, чем (30).

Напомним, что функцию электропроводности мы считаем кусочно-непрерывной, разрывы ее могут располагаться только в узлах вычислительной сетки и иметь скачкообразный характер. Если сеточная ячейка $z \in [z_j, z_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, J-1$, фиксирована, то под величинами $\sigma(z_j)$ и $\sigma(z_{j+1})$ понимаются односторонние пределы по этой ячейке $\sigma(z_j + 0)$ и $\sigma(z_{j+1} - 0)$ соответственно. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \sigma_{j+1/2} = \frac{\sigma(z_j) + \sigma(z_{j+1})}{2}, \qquad D\sigma_{j+1/2} = \frac{\sigma(z_{j+1}) - \sigma(z_j)}{\Delta z_j}, \\ D^2\sigma_{j+1/2} = \frac{\sigma(z_{j+1}) - 2\sigma(z_{j+1/2}) + \sigma(z_j)}{\bigl(\Delta z_j/2\bigr)^2}. \end{gathered} \tag{33}$$

Для функции $\sigma(z)$ на каждой сеточной ячейке $[z_j, z_{j+1}]$ построим интерполяционный многочлен по узлам z_j, $z_{j+1/2}$, z_{j+1} и запишем следующее представление:

$$\sigma(s)=\sigma_{j+1/2}+\bigl(s-z_{j+1/2}\bigr)D\sigma_{j+1/2}+\frac{1}{2}\bigl(s-z_j\bigr)\bigl(s-z_{j+1}\bigr)D^2\sigma_{j+1/2}+$$
$$\bigl(s-z_j\bigr)\bigl(s-z_{j+1/2}\bigr)\bigl(s-z_{j+1}\bigr)\frac{\sigma^{(3)}(z_{j,s})}{3!}. \qquad (34)$$

Введем следующие обозначения при $z\in[z_j,z_{j+1}]$:

$$\overrightarrow{\delta_1}(z_j,z)=D\sigma_{j+1/2}\left[\int\limits_{z_j}^{z}(z_{j+1/2}-s)M_{j+1/2}(s,z)\,ds\right]\overrightarrow{U}(z_j),$$
$$\overrightarrow{\delta_2}(z_j,z)=\frac{D^2\sigma_{j+1/2}}{2}\left[\int\limits_{z_j}^{z}(s-z_j)(z_{j+1}-s)M_{j+1/2}(s,z)\,ds\right]\overrightarrow{U}(z_j),$$
$$\overrightarrow{\delta_3}(z_j,z)=-\frac{1}{6}\left[\int\limits_{z_j}^{z}(s-z_j)(s-z_{j+1/2})(s-z_{j+1})\sigma^{(3)}(z_{j,s})M_{j+1/2}(s,z)\,ds\right]\overrightarrow{U}(z_j),$$
$$\overrightarrow{\delta_4}(z_j,z)=\int\limits_{z_j}^{z}e^{(z-s)L_{j+1/2}}\bigl[L(s)-L_{j+1/2}\bigr]\overrightarrow{\Delta}(z_j,s)\,ds.$$

Здесь и далее будем пользоваться формулами (3)–(8) и (19), в которых, в соответствии с (33), величины $\sigma(z_{j+1/2})$ заменены на $\sigma_{j+1/2}$. Это не приведет к разночтениям, но упростит дальнейшие рассуждения. Из (5), (19) и (34) следует представление для погрешности $\overrightarrow{\Delta}(z_j,z)$ в виде суммы четырех слагаемых:

$$\overrightarrow{\Delta}(z_j,z)=\overrightarrow{\delta_1}(z_j,z)+\overrightarrow{\delta_2}(z_j,z)+\overrightarrow{\delta_3}(z_j,z)+\overrightarrow{\delta_4}(z_j,z). \qquad (35)$$

Вычислим первые два слагаемых в (35), а последние два оценим. Начнем с оценки величины $\overrightarrow{\delta_4}(z_j,z)$. Учитывая ранее доказанную оценку (21), аналогичную необходимой нам, получим

$$\bigl\|\overrightarrow{\delta_4}(z_j,z)\bigr\|_\infty\le\int\limits_{z_j}^{z}e^{(z-s)\|L_{j+1/2}\|_\infty}\bigl\|L(s)-L_{j+1/2}\bigr\|_\infty\bigl\|\overrightarrow{\Delta}(z_j,s)\bigr\|_\infty\,ds$$
$$\le K_0\,\mathit{\Delta} z^4,\quad z\in[z_j,z_{j+1}]. \qquad (36)$$

Учитывая неравенство $\bigl\|L_{j+1/2}\bigr\|_\infty\le\max_{1\le j\le J-1}\sigma_{j+1/2}+\omega\mu_0\equiv\eta$ и оценку (22), получаем

$$\bigl\|\overrightarrow{\delta_3}(z_j,z)\bigr\|_\infty\le\frac{\mathit{\Delta} z^3}{6}\max_{0\le s\le z_{\max}}\bigl|\sigma^{(3)}(s)\bigr|\,\bigl\|\overrightarrow{U}(z_j)\bigr\|_\infty\int\limits_{z_j}^{z}\bigl\|M_{j+1/2}(s,z)\bigr\|_\infty\,ds$$
$$\le K_1\,\mathit{\Delta} z^4,\quad z\in[z_j,z_{j+1}]. \qquad (37)$$

Точно также оценим и $\overrightarrow{\delta_2}(z_j,z)$:

$$\begin{aligned} \big\|\overrightarrow{\delta_2}(z_j,z)\big\|_\infty &\le \frac{\Delta z^2}{2} \max_{0\le s\le z_{\max}}\big|\sigma^{(2)}(s)\big|\,\big\|\overrightarrow{U}(z_j)\big\|_\infty \int\limits_{z_j}^{z}\big\|M_{j+1/2}(s,z)\big\|_\infty\,ds \\ &\le K_2\,\Delta z^3, \quad z\in[z_j,z_{j+1}]. \end{aligned} \tag{38}$$

Используя формулы (25) при $z=z_{j+1}$, вычислим $\overrightarrow{\delta_1}(z_j,z_{j+1})$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_1}(z_j,z_{j+1}) &= D\sigma_{j+1/2}\,R_{j+1/2}(z_{j+1})\,\overrightarrow{U}(z_j) \\ &= \frac{i\omega\mu_0\Delta z_j}{4k_{j+1/2}^2}\,D\sigma_{j+1/2}\left[\operatorname{ch}(\Delta z_j k_{j+1/2}) - \frac{\operatorname{sh}(\Delta z_j k_{j+1/2})}{\Delta z_j k_{j+1/2}}\right]\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{U}(z_j). \end{aligned} \tag{39}$$

Для определения погрешности $\overrightarrow{\delta_2}(z_j,z)$ рассмотрим интеграл

$$Q_{j+1/2}(z) = \int\limits_{z_j}^{z}\big(s-z_j\big)\big(z_{j+1}-s\big)M_{j+1/2}(s,z)\,ds = \begin{pmatrix} q_{j+1/2}^{11}(z) & q_{j+1/2}^{12}(z)\\ q_{j+1/2}^{21}(z) & q_{j+1/2}^{22}(z)\end{pmatrix}$$

и вычислим элементы соответствующей матрицы:

$$\begin{aligned} q_{j+1/2}^{11}(z) &= -\frac{i\omega\mu_0}{4k_{j+1/2}}\Bigg[\bigg(\frac{1}{3}\big(z-z_j\big)^2\big(2z+z_j-3z_{j+1}\big) - \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\big(z-z_{j+1}\big)\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big] + \\ &\qquad \frac{1}{k_{j+1/2}}\big(z-z_j\big)\big(z-z_{j+1}\big)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg], \\ q_{j+1/2}^{12}(z) &= -\frac{1}{4}\Bigg[\bigg(\frac{1}{3}\big(z-z_j\big)^2\big(2z+z_j-3z_{j+1}\big) - \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\big(z-z_j\big)\bigg)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big] + \\ &\qquad \frac{1}{k_{j+1/2}}\bigg(\big(z-z_j\big)\big(z-z_{j+1}\big) + \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg], \\ q_{j+1/2}^{21}(z) &= -\bigg(\frac{i\omega\mu_0}{2k_{j+1/2}}\bigg)^2\Bigg[\bigg(\frac{1}{3}\big(z-z_j\big)^2\big(2z+z_j-3z_{j+1}\big) + \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\big(z-z_j\big)\bigg)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big] - \\ &\qquad \frac{1}{k_{j+1/2}}\bigg(\big(z-z_j\big)\big(z-z_{j+1}\big) + \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg], \\ q_{j+1/2}^{22}(z) &= -\frac{i\omega\mu_0}{4k_{j+1/2}}\Bigg[\bigg(\frac{1}{3}\big(z-z_j\big)^2\big(2z+z_j-3z_{j+1}\big) + \frac{1}{k_{j+1/2}^2}\big(z-z_{j+1}\big)\bigg)\operatorname{sh}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big] - \\ &\qquad - \frac{1}{k_{j+1/2}}\big(z-z_j\big)\big(z-z_{j+1}\big)\operatorname{ch}\big[(z-z_j)k_{j+1/2}\big]\Bigg]. \end{aligned}$$

Используя полученные формулы, вычислим элементы матрицы $Q_{j+1/2}(z_{j+1})$ и оценим их порядок:

$$\begin{aligned} q_{j+1/2}^{11}(z_{j+1}) &= q_{j+1/2}^{22}(z_{j+1}) = \frac{i\omega\mu_0}{12k_{j+1/2}}\Delta z_j^3\operatorname{sh}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big), \\ q_{j+1/2}^{12}(z_{j+1}) &= \frac{\Delta z_j^3}{4}\left\{\frac{\operatorname{ch}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)}{3} + \frac{1}{\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)^2}\left[\operatorname{ch}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big) - \frac{\operatorname{sh}\big(\Delta z_j k_{j+1/2}\big)}{\Delta z_j k_{j+1/2}}\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$q^{21}_{j+1/2}(z_{j+1}) = \left(\frac{i\omega\mu_0}{2k_{j+1/2}}\right)^2 \Delta z_j^3 \left\{ \frac{\mathrm{ch}\,(\Delta z_j k_{j+1/2})}{3} - \right.$$
$$\left. \frac{1}{\left(\Delta z_j k_{j+1/2}\right)^2}\left[\mathrm{ch}\,(\Delta z_j k_{j+1/2}) - \frac{\mathrm{sh}\,(\Delta z_j k_{j+1/2})}{\Delta z_j k_{j+1/2}}\right]\right\}.$$

Легко проверить, что величины $q^{11}_{j+1/2}(z_{j+1})$, $q^{22}_{j+1/2}(z_{j+1})$ и $q^{21}_{j+1/2}(z_{j+1})$ имеют порядок Δz_j^4, а величина $q^{12}_{j+1/2}(z_{j+1})$ — порядок Δz_j^3. Поэтому добавим величину $q^{12}_{j+1/2}(z_{j+1})$ к ранее полученной разностной схеме. С этой целью представим матрицу $Q_{j+1/2}(z)$ как сумму двух слагаемых:

$$Q_{j+1/2}(z) = Q^{(1)}_{j+1/2}(z) + Q^{(2)}_{j+1/2}(z), \tag{40}$$

где

$$Q^{(1)}_{j+1/2}(z) = \begin{pmatrix} 0 & q^{12}_{j+1/2}(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^{(2)}_{j+1/2}(z) = \begin{pmatrix} q^{11}_{j+1/2}(z) & 0 \\ q^{21}_{j+1/2}(z) & q^{22}_{j+1/2}(z) \end{pmatrix}.$$

Несложно оценить второе слагаемое в (40) при $z = z_{j+1}$:

$$\left\| Q^{(2)}_{j+1/2}(z_{j+1}) \right\|_\infty \le K_3\, \Delta z^4. \tag{41}$$

Теперь, в соответствии с (25), (35) и (40), соотношение (4) можно записать в виде

$$\overrightarrow{U}(z) = \left[e^{(z-z_j)L_{j+1/2}} + D\sigma_{j+1/2}\, R_{j+1/2}(z) + \frac{D^2\sigma_{j+1/2}}{2}\, Q^{(1)}_{j+1/2}(z) \right] \overrightarrow{U}(z_j) +$$
$$\overrightarrow{\delta}(z_j, z), \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, J-1, \tag{42}$$

где $\overrightarrow{\delta}(z_j, z) = \frac{D^2\sigma_{j+1/2}}{2}\, Q^{(2)}_{j+1/2}(z)\overrightarrow{U}(z_j) + \overrightarrow{\delta_3}(z_j, z) + \overrightarrow{\delta_4}(z_j, z)$. Из неравенств (36)–(38) следует оценка

$$\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z)\|_\infty \le K_4\, \Delta z^3. \tag{43}$$

В (42) положим $z = z_{j+1}$, тогда

$$\overrightarrow{U}(z_{j+1}) = \left[e^{\Delta z_j L_{j+1/2}} + D\sigma_{j+1/2}\, R_{j+1/2}(z_{j+1}) + \frac{D^2\sigma_{j+1/2}}{2}\, Q^{(1)}_{j+1/2}(z_{j+1}) \right] \overrightarrow{U}(z_j) +$$
$$\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{44}$$

В силу неравенств (36), (37) и (41) для остаточного слагаемого из (44) справедлива оценка

$$\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1})\|_\infty \le K_5\, \Delta z^4. \tag{45}$$

Теперь в (44) отбросим погрешность $\delta(z_j, z_{j+1})$ и, вводя обозначения для значений приближенного решения в узлах сетки

$$\overrightarrow{U}^h_j = \begin{pmatrix} H^h_j \\ E^h_j \end{pmatrix} \approx \overrightarrow{U}(z_j), \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

получим уточненную разностную схему:

$$\overrightarrow{U}^h_{j+1} = T_{j+1/2}\overrightarrow{U}^h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1, \tag{46}$$

где

$$T_{j+1/2} = e^{\Delta z_j L_{j+1/2}} + D\sigma_{j+1/2}\, R_{j+1/2}(z_{j+1}) + \frac{D^2\sigma_{j+1/2}}{2}\, Q^{(1)}_{j+1/2}(z_{j+1}).$$

6. Оценка сходимости уточненной разностной схемы (46)

Докажем оценку сходимости полученного приближенного решения к точному, для простоты ограничившись начальным условием (9). Рассмотрим сеточную вектор-функцию $\overrightarrow{W}$ со значениями:

$$\overrightarrow{W}_j = \overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J.$$

Из соотношений (44) вычтем соотношения (46) и, учитывая условие (9), получим задачу для определения функции $\overrightarrow{W}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{W}_{j+1} = T_{j+1/2}\overrightarrow{W}_j + \overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, J-1, \\ \overrightarrow{W}_1 = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Перейдем к нормам в соотношениях (47). Используя свойства нормы, получим

$$\big\|\overrightarrow{W}_{j+1}\big\|_\infty \le \big\|T_{j+1/2}\big\|_\infty \big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty + \big\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{48}$$

Из (46) следует оценка

$$\big\|T_{j+1/2}\big\|_\infty \le e^{\eta\Delta z} + C\,\Delta z^3 \equiv T,$$

в которой константа C не зависит от Δz. Из этой оценки и из (48) получаем

$$\big\|\overrightarrow{W}_{j+1}\big\|_\infty \le T\big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty + \big\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{49}$$

Разрешим рекуррентное неравенство (49). Учитывая начальное условие из (47), приходим к следующему выводу:

$$\begin{aligned} \big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty &\le T^{(j-1)}\big\|\overrightarrow{W}_1\big\|_\infty + \sum_{k=1}^{j-1} T^{(j-1-k)}\big\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} T^{(j-1-k)}\big\|\overrightarrow{\delta}(z_j, z_{j+1})\big\|_\infty. \end{aligned} \tag{50}$$

В силу оценки (45), из (50) получаем

$$\big\|\overrightarrow{W}_j\big\|_\infty \le K_5\,\Delta z^4 \sum_{k=0}^{j-2} T^k \le K_5\,\Delta z^4\,\frac{T^{j-1}-1}{T-1}. \tag{51}$$

Предположим, что вычислительная сетка является квазиравномерной, т. е. удовлетворяет условию

$$\varDelta z \equiv \max_{1 \le j \le J-1} \varDelta z_j \le \gamma \min_{1 \le j \le J-1} \varDelta z_j \, ,$$

где положительная константа γ не зависит от J. Рассмотрим цепочку неравенств

$$\frac{T^{j-1}-1}{T-1} \le \frac{e^{\eta \varDelta z (j-1)} \left[1 + C \, \varDelta z^3\right]^{j-1} - 1}{e^{\eta \varDelta z} - 1} \le \frac{e^{\left[\eta + C \, \varDelta z^2\right] \varDelta z (j-1)} - 1}{e^{\eta \varDelta z} - 1} \le \frac{e^{\gamma \left(\eta + C \, z_{\max}^2\right) z_{\max}} - 1}{\eta \varDelta z} \, ,$$

учитывая которую, вместе с (51), в итоге получаем оценку сходимости приближенного решения (решения разностной схемы) к точному решению исходной задачи:

$$\big\| \overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j \big\|_\infty \le K_6 \, \varDelta z^3, \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{52}$$

7. Интерполяция приближенного решения (46), (9)

Для интерполяции сеточной функции, найденной при помощи разностной схемы (46) с начальным условием (9), мы предлагаем естественный вариант, основанный на формулах (42) метода локальных интегральных уравнений.

Предположим, что сеточная вектор-функция $\overrightarrow{U}^h = \left\{ \overrightarrow{U}^h_j \right\}_{j=1}^{J}$ найдена как решение задачи (46), (9). Тогда в качестве интерполянта рассмотрим непрерывную вектор-функцию

$$\overrightarrow{U}^h(z) = \begin{pmatrix} H^h(z) \\ E^h(z) \end{pmatrix} ,$$

определенную в соответствии с формулами (42):

$$\overrightarrow{U}^h(z) = \Bigg[e^{(z - z_j) L_{j+1/2}} + D\sigma_{j+1/2} \, R_{j+1/2}(z) + \\ \frac{D^2 \sigma_{j+1/2}}{2} \, Q^{(1)}_{j+1/2}(z) \Bigg] \overrightarrow{U}(z_j), \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, J-1. \tag{53}$$

Оценим погрешность интерполяции (53). Для этого вычтем из формул (42) соответствующие формулы (53), в результате получим

$$\overrightarrow{U}(z) - \overrightarrow{U}^h(z) = \left[e^{(z - z_j) L_{j+1/2}} + D\sigma_{j+1/2} \, R_{j+1/2}(z) + \frac{D^2 \sigma_{j+1/2}}{2} \, Q^{(1)}_{j+1/2}(z) \right] \left[\overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j \right] + \\ \overrightarrow{\delta}(z_j, z), \quad z \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, J-1.$$

Перейдем к нормам в обеих частях последних соотношений, при этом учтем неравенства (43) и (52). В результате получим оценку погрешности интерполяции

$$\big\| \overrightarrow{U}(z) - \overrightarrow{U}^h(z) \big\|_\infty \le \left[e^{\eta \varDelta z} + C \, \varDelta z^2 \right] \big\| \overrightarrow{U}(z_j) - \overrightarrow{U}^h_j \big\|_\infty + \big\| \overrightarrow{\delta}(z_j, z) \big\|_\infty \\ \le K_7 \, \varDelta z^3, \quad 0 \le z \le z_{\max},$$

с константой K_7, не зависящей от $\varDelta z$.

Выводы

Таким образом, в работе предложены методы численного решения прямой одномерной задачи магнитотеллурического зондирования: на основе метода локальных интегральных уравнений построены две разностные схемы, обладающие вторым и третьим порядками сходимости к точному решению исходной задачи; определены соответствующие формулы для естественной интерполяции приближенных решений, погрешности интерполяции имеют те же порядки, что и погрешности соответствующих приближенных решений. Разработанные разностные схемы могут быть применены для решения обратной одномерной задачи МТЗ.

Литература

1. **Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.** Модели и методы магнитотеллурики. — М.: Научный мир, 2009. Перевод: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Models and Methods of Magnetotellurics. — Berlin: Springer, 2009.
2. **Рыбин А.К.** Глубинное строение и современная геодинамика центрального Тянь-Шаня по результатам магнитотеллурических исследований. — М.: Научный мир, 2011.
3. **Жданов М.С.** Электроразведка. Учебник для вузов. — М.: Недра, 1986.
4. **Жамалетдинов А.А.** Магнитотеллурический метод изучения строения массивов горных пород. Уч. пособие. — Апатиты, 2014.
5. **Тихонов А.Н.** Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 73, № 2. — С. 295–297. Перевод: Tikhonov A.N. On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust // Doklady of the Academy of Sciences of the USSR. — 1950. — Vol. 73, № 2. — P. 295–297.
6. **Cagniard L.** Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting // Geophysics. — 1953. — Vol. 18, № 3. — P. 605–635.
7. **Юдин В.М., Юдин М.Н.** Математическое моделирование в геоэлектрике. Часть I. Слоистые модели среды: уч. пособие. — М.: Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе (МГРИ), 2007.
8. **Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.** Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. — М.: Недра, 1992.
9. **Табаровский Л.А., Эпов М.И.** Электромагнитные поля гармонических источников в слоистых анизотропных средах // Геология и геофизика. — 1977. — № 1. — С. 101–109.
10. **Табаровский Л.А.** Электромагнитные поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типа в многослойных средах // Электромагнитные методы исследования скважин. — Новосибирск: Наука, 1979. — С. 225–233.
11. **Александров П.Н.** Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах // Физика Земли. — 2001. — № 4. — С. 51–61.
12. **Карчевский А.Л.** Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика. — 2007. — Т. 48, № 8. — С. 889–898.
13. **Александров П.Н., Забинякова О.Б.** Математическое моделирование магнитотеллурического поля в одномерных кусочно-градиентных средах // Вестник КРАУНЦ. Серия: Науки о Земле. — 2020. — Вып. 47, № 3. — С. 75–85. — DOI:10.31431/1816-5524-2020-47-3-75-85.
14. **Yee K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1966. — Vol. 14, № 3. — P. 302–307.

15. **Taflove A., Hagness S.C.** Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method. 2nd ed. — Norwood, MA: Artech House, 2000.

16. **Sullivan D.M.** Electromagnetic Simulation Using the Finite-Difference Time-Domain Method. — New York: IEEE Press, 2000.

17. **Лебедев А.С., Федорук М.П., Штырина О.В.** Решение нестационарных уравнений Максвелла для сред с неоднородными свойствами методом конечных объемов // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10, № 2. — С. 60–73.

18. **Лебедев А.С., Федорук М.П., Штырина О.В.** Конечно-объемный алгоритм решения нестационарных уравнений Максвелла на неструктурированной сетке // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 47, № 7. — С. 1286–1301.

19. **Забинякова О.Б., Зинченко Д.И., Кулагина М.А., Рыбин А.К., Скляр С.Н.** Численные методы решения прямых задач магнитотеллурического зондирования // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: материалы второй междунар. юбилейной конференции, посвященной 20-летию образования КРСУ им. Б. Ельцина и 100-летию проф. Я. Быкова / А.К. Керимбекова. — Бишкек: Maxprint, 2013. — Т. 2. — С. 194–198.

20. **Забинякова О.Б.** Проекционные разностные схемы для системы уравнений Максвелла // Сб. материалов VI Междунар. конф. молодых ученых и студентов: Современные техника и технологии в научных исследованиях. — Бишкек, 2014. — С. 134–138.

21. **Забинякова О.Б., Скляр С.Н.** Применение проекционных разностных схем для решения прямой двумерной задачи магнитотеллурического зондирования // Вестник Кыргызско-российского славянского университета. — 2016. — Т. 16, № 1. — С. 3–10.

22. **Забинякова О.Б., Скляр С.Н.** Результаты численных экспериментов по моделированию магнитотеллурического поля в вертикально градиентной среде // Проблемы информатики. — 2020. — № 2. — С. 15–36.

23. **Забинякова О.Б., Скляр С.Н.** Численное моделирование магнитотеллурического импеданса в вертикально градиентной среде на основе метода локальных интегральных уравнений // Сб. материалов XII Междунар. конф. молодых ученых и студентов: Современные техника и технологии в научных исследованиях. — Бишкек: НС РАН, 2020. — С. 371–379.

24. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. Изд. второе. Дополненное. — М.: Наука, 1966.

25. **Ланкастер П.** Теория матриц. Пер. с англ. изд. — М.: Наука, 1982.

26. **Тер-Крикоров А.М.** Матричные функции и линейные дифференциальные уравнения: уч.-метод. пособие. — М.: МФТИ, 2014.

27. **Sklyar S.N.** A projective version of the integral-interpolation method and it's application for the discretization of the singular perturbation problems // Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. Int. Conf. "AMCA-95". — Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. — P. 380–385.

Поступила в редакцию 24 июля 2019 г.
После исправления 30 ноября 2020 г.
Принята к печати 5 октября 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Berdichevskii M.N., Dmitriev V.I.** Modeli i metody magnitotelluriki. — M.: Nauchnyi mir, 2009. Perevod: Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Models and Methods of Magnetotellurics. — Berlin: Springer, 2009.

2. **Rybin A.K.** Glubinnoe stroenie i sovremennaya geodinamika central'nogo Tyan'-Shanya po rezul'tatam magnitotelluricheskikh issledovanii. — M.: Nauchnyi mir, 2011.

3. **Zhdanov M.S.** Elektrorazvedka. Uchebnik dlya vuzov. — M.: Nedra, 1986.
4. **Zhamaletdinov A.A.** Magnitotelluricheskii metod izucheniya stroeniya massivov gornykh porod. Uch. posobie. — Apatity, 2014.
5. **Tikhonov A.N.** Ob opredelenii elektricheskikh kharakteristik glubokikh sloev zemnoi kory // Dokl. AN SSSR. — 1950. — T. 73, № 2. — S. 295–297. Perevod: Tikhonov A.N. On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust // Doklady of the Academy of Sciences of the USSR. — 1950. — Vol. 73, № 2. — P. 295–297.
6. **Cagniard L.** Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting // Geophysics. — 1953. — Vol. 18, № 3. — P. 605–635.
7. **Yudin V.M., Yudin M.N.** Matematicheskoe modelirovanie v geoelektrike. CHast' I. Sloistye modeli sredy: uch. posobie. — M.: Rossiiskii gosudarstvennyi geologorazvedochnyi universitet im. Sergo Ordzhonikidze (MGRI), 2007.
8. **Berdichevskii M.N., Dmitriev V.I.** Magnitotelluricheskoe zondirovanie gorizontal'no-odnorodnykh sred. — M.: Nedra, 1992.
9. **Tabarovskii L.A., Epov M.I.** Elektromagnitnye polya garmonicheskikh istochnikov v sloistykh anizotropnykh sredakh // Geologiya i geofizika. — 1977. — № 1. — S. 101–109.
10. **Tabarovskii L.A.** Elektromagnitnye polya poperechno-elektricheskogo i poperechno-magnitnogo tipa v mnogosloinykh sredakh // Elektromagnitnye metody issledovaniya skvazhin. — Novosibirsk: Nauka, 1979. — S. 225–233.
11. **Aleksandrov P.N.** Pryamaya zadacha geoelektriki v odnomernykh bianizotropnykh sredakh // Fizika Zemli. — 2001. — № 4. — S. 51–61.
12. **Karchevskii A.L.** Analiticheskoe reshenie uravnenii Maksvella v chastotnoi oblasti dlya gorizontal'no-sloistykh anizotropnykh sred // Geologiya i geofizika. — 2007. — T. 48, № 8. — S. 889–898.
13. **Aleksandrov P.N., Zabinyakova O.B.** Matematicheskoe modelirovanie magnitotelluricheskogo polya v odnomernykh kusochno-gradientnykh sredakh // Vestnik KRAUNC. Seriya: Nauki o Zemle. — 2020. — Vyp. 47, № 3. — S. 75–85. — DOI:10.31431/1816-5524-2020-47-3-75-85.
14. **Yee K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1966. — Vol. 14, № 3. — P. 302–307.
15. **Taflove A., Hagness S.C.** Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method. 2nd ed. — Norwood, MA: Artech House, 2000.
16. **Sullivan D.M.** Electromagnetic Simulation Using the Finite-Difference Time-Domain Method. — New York: IEEE Press, 2000.
17. **Lebedev A.S., Fedoruk M.P., Shtyrina O.V.** Reshenie nestacionarnykh uravnenii Maksvella dlya sred s neodnorodnymi svoistvami metodom konechnykh ob"emov // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2005. — T. 10, № 2. — S. 60–73.
18. **Lebedev A.S., Fedoruk M.P., Shtyrina O.V.** Konechno-ob"emnyi algoritm resheniya nestacionarnykh uravnenii Maksvella na nestrukturirovannoi setke // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 47, № 7. — S. 1286–1301.
19. **Zabinyakova O.B., Zinchenko D.I., Kulagina M.A., Rybin A.K., Sklyar S.N.** Chislennye metody resheniya pryamykh zadach magnitotelluricheskogo zondirovaniya // Aktual'nye problemy teorii upravleniya, topologii i operatornykh uravnenii: materialy vtoroi mezhdunarodnoi yubileinoi konferencii, posvyaschennoi 20-letiyu obrazovaniya KRSU im. B. El'cina i 100-letiyu prof. Ya. Bykova / A.K. Kerimbekova. — Bishkek: Maxprint, 2013. — T. 2. — S. 194–198.
20. **Zabinyakova O.B.** Proekcionnye raznostnye skhemy dlya sistemy uravnenii Maksvella // Sb. materialov VI Mezhdunar. konf. molodykh uchenykh i studentov: Sovremennye tekhnika i tekhnologii v nauchnykh issledovaniyakh. — Bishkek, 2014. — S. 134–138.

21. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Primenenie proekcionnykh raznostnykh skhem dlya resheniya pryamoi dvumernoi zadachi magnitotelluricheskogo zondirovaniya // Vestnik Kyrgyzsko-rossiiskogo slavyanskogo universiteta. — 2016. — T. 16, № 1. — S. 3–10.

22. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Rezul'taty chislennykh eksperimentov po modelirovaniyu magnitotelluricheskogo polya v vertikal'no gradientnoi srede // Problemy informatiki. — 2020. — № 2. — S. 15–36.

23. **Zabinyakova O.B., Sklyar S.N.** Chislennoe modelirovanie magnitotelluricheskogo impedansa v vertikal'no gradientnoi srede na osnove metoda lokal'nykh integral'nykh uravnenii // Sb. materialov XII Mezhdunar. konf. molodykh uchenykh i studentov: Sovremennye tekhnika i tekhnologii v nauchnykh issledovaniyakh. — Bishkek: NS RAN, 2020. — S. 371–379.

24. **Gantmakher F.R.** Teoriya matric. Izd. vtoroe. Dopolnennoe. — M.: Nauka, 1966.

25. **Lankaster P.** Teoriya matric. Per. s angl. izd. — M.: Nauka, 1982.

26. **Ter-Krikorov A.M.** Matrichnye funkcii i lineinye differencial'nye uravneniya: uch.-metod. posobie. — M.: MFTI, 2014.

27. **Sklyar S.N.** A projective version of the integral-interpolation method and it's application for the discretization of the singular perturbation problems // Advanced Mathematics: Computations and Applications. Proc. Int. Conf. "AMCA-95". — Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. — P. 380–385.