

УДК 531.371, 519.632.4

Алгоритм линейных комбинаций: теплопроводность

В.И. Машуков

Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Дуси Ковальчук, 191, Новосибирск, 630049
E-mail: mvimash@gmail.com

Машуков В.И. Алгоритм линейных комбинаций: теплопроводность // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 407–418.

В статье рассмотрены вычислительные алгоритмы, позволяющие преодолеть некоторые сложности при численном решении краевых задач теплопроводности в тех случаях, когда область решения имеет сложную форму или граничные условия отличаются от стандартных.

Граничные контуры предполагаются заданными ломаными линиями (в плоском случае) или треугольниками (трёхмерный случай). Граничные условия и результаты расчётов представляются в виде дискретных функций, значения которых или их средние значения заданы в геометрических центрах граничных элементов. Граничные условия могут быть установлены на потоки тепла через граничные элементы, на температуру и на линейную комбинацию температуры и интенсивности потока тепла как на границе области решения, так и внутри неё.

Решение граничной задачи представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа и их частных производных, а также любых решений этих уравнений, регулярных в области решения, и значения функций, для которых могут быть вычислены на элементах границы области решения и на граничных элементах, расположенных во внутренних точках этой области. Если решение, участвующее в линейной комбинации, имеет сингулярность на граничном элементе, то рассматривается его среднее значение по этому граничному элементу.

DOI: 10.15372/SJNM20180405

Ключевые слова: алгоритм линейных комбинаций, теплопроводность, смешанные краевые условия, произвольная форма граничных поверхностей, стационарные задачи, сложные граничные условия, составные граничные условия, линейная комбинация решений, метод сопряжённых градиентов, метод Трэффца.

Mashukov V.I. An algorithm of linear combinations: thermal conductivity // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 4. — P. 407–418.

This paper presents the computational algorithms, which make it possible to overcome some complexities with the numerical solution of the boundary-value problems of thermal conductivity when the domain of the solution has a complex form or boundary conditions differ from standard ones.

Boundary contours are assumed to be broken lines (the flat case) or triangles (a 3D case). Boundary conditions and calculation results are presented as discrete functions whose values or their averaged values are given at geometric centers of boundary elements. Boundary conditions can be defined on the heat flows through boundary elements as well as on temperature, a linear temperature combination and heat flow intensity both at the boundary of the solution domain and inside it.

The solution to the boundary value problem is presented in the form of a linear combination of the fundamental solutions of the Laplace equation and their partial derivatives and, also, any solutions of these equations that are regular in the solution domain, the values of functions for which can be calculated at the points of the boundary of the solution domain and at its internal points. If the solution, which participates in the linear combination, is singular, then its average value according to this boundary element is considered.

Keywords: algorithm of linear combinations, thermal conductivity, the mixed boundary conditions, the arbitrary form of bounding surfaces, complex constraints, static constraints problem, the linear combination of the solutions, the composite boundary conditions, the method of the combined gradients, Trefftz's method.

Представление решения линейной системы дифференциальных уравнений в виде линейной комбинации решений этой системы с последующим подбором коэффициентов линейной комбинации так, чтобы удовлетворить краевые условия и другие ограничения, нашло применение в различных подходах к численному решению задач математической физики: метод канонических областей [1–5], разложение в ряд Фурье [6–10], граничные интегральные уравнения [11–13]. Впервые идея такого подхода к численному решению задач математической физики была высказана Грэфтцем [14].

Благодаря тому, что каждое из решений в линейной комбинации является решением системы дифференциальных уравнений, численные значения линейной комбинации легко интерпретируются. Все сложности численного решения переносятся на формирование матрицы линейной комбинации и на разработку алгоритма решения полученной системы линейных алгебраических уравнений. Сложности связаны с различного рода отклонениями численного (приближённого) решения от решения, которое могло бы быть получено в функциональном виде (точного решения) [13].

Если вычислительный алгоритм разработан так, что с изменением его параметров численное решение приближается к точному, по крайней мере, в тестовых расчётах, это значит, что решение сходится. Под изменяемыми параметрами здесь подразумеваются размеры и количество элементов, на которые разбивается граница области решения, норма невязки в решаемых уравнениях, величина которой принимается допустимой, количество и тип решений, включаемых в линейную комбинацию, и т.п. Однако если в линейной комбинации участвуют решения с особыми точками, то сходимость ограничивается возможностями вычислительной машины.

1. Коэффициенты влияния

Уравнение для стационарного распределения температуры в однородной среде [11, 12]:

$$\Delta\theta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k}Q(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\theta(\mathbf{x})$ — температура в некотором объёме теплопроводящей среды, $Q(\mathbf{x})$ — функция распределения источников тепла в этом же объёме.

Решение уравнения (1) для источника тепла единичной мощности, расположенного в точке \mathbf{x}_0 , в плоском и трёхмерном случаях:

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}\right), \quad s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (2)$$

Если в точке \mathbf{x}_0 находится источник тепла, мощность которого можно регулировать, а в точке \mathbf{x}_1 необходимо установить температуру $\theta_1(\mathbf{x}_1)$, то из уравнения

$$\theta_1(\mathbf{x}_1) = as(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$$

определяется коэффициент, на который нужно умножить мощность единичного источника тепла, чтобы в точке \mathbf{x}_1 была температура $\theta_1(\mathbf{x}_1)$. Здесь $s(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$ — коэффициент влияния решения (2) на температуру в точке \mathbf{x}_1 ; $\theta_1(\mathbf{x}_1)$ — ограничение на температуру.

Ограничение может быть установлено на поток тепла:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) &= \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}(s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)), \\ p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}) &= a(\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}(s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)), \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{t})$ — проекция потока тепла на вектор \mathbf{t} ; $(\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}(s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)), \mathbf{t})$ — коэффициент влияния сосредоточенного источника тепла на поток тепла в точке \mathbf{x}_1 в направлении \mathbf{t} .

С точки зрения рассматриваемого далее алгоритма решения граничных задач, ограничения могут быть установлены на различные линейные комбинации решений уравнения (1) и их частных производных. Кроме того, ограничения, установленные в различных точках области решения, могут объединяться в составные ограничения, например, для задания суммарного потока тепла в нескольких точках или для задания ограничения на среднюю температуру в нескольких точках области решения. Составные ограничения также должны быть линейными комбинациями.

2. Набор решений и матрица влияния

С помощью частных решений в двумерном и трёхмерном случаях [11]:

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi k} \int_{D^-} Q_0(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) dv, \quad (4)$$

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi k} \int_{D^-} Q_0(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} dv,$$

в правой части уравнения (1) исключаются нерегулируемые источники тепла; D^- — область решения. Тогда

$$\Delta\theta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k} Q_1(\mathbf{x}). \quad (5)$$

То есть решение уравнения (1) представляется в виде суммы частного решения и решения уравнения (5), где в правой части $Q_1(\mathbf{x})$ — функция распределения регулируемых источников тепла. При численном решении уравнения (5) область решения разбивается на сетку квадратных ячеек в плоском случае и кубических ячеек в трёхмерном случае, и температура представляется в виде суммы сосредоточенных источников тепла (фундаментальных решений), сингулярные точки которых расположены в центрах ячеек решётки, в плоском и трёхмерном случаях [11]:

$$\sum_j q_{dj}(\mathbf{x}) = \sum_j \lambda_j \int_{V_j} \ln |x - x_j| dv, \quad (6)$$

$$\sum_j q_{dj}(\mathbf{x}) = \sum_j \lambda_j \int_{V_j} \frac{1}{|x - x_{0j}|} dv, \quad (7)$$

V_j — ячейка сетки с номером j , \mathbf{x}_{0j} — центр ячейки V_j , \mathbf{x} — точка на граничном элементе.

Решение уравнения (5) далее представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений (2) и любых регулярных в области решения решений, удовлетворяющих уравнению (5), в том числе гармонических функций (решений однородного уравнения (5)) [11, 12].

Сингулярные решения приходится включать в линейную комбинацию, так как линейная комбинация регулярных решений, например гармонических полиномов, плохо сходится к решению, удовлетворяющему граничным условиям, когда на граничной поверхности области решения есть точки с большой кривизной или граничные условия на граничной поверхности имеют точки разрыва. Матрица влияния решений уравнения (5) на граничные условия имеет вид:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s_{r11} \cdots s_{r1L} & s_{d1L+1} \cdots s_{d1L+I} & s_{g1L+I+1} \cdots s_{g1L+I+J} \\ \vdots \cdots \vdots & \vdots \cdots \vdots & \vdots \cdots \vdots \\ s_{rM1} \cdots s_{rML} & s_{dML+1} \cdots s_{dML+I} & s_{gML+I+1} \cdots s_{gML+I+J} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{L+I+J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матричное уравнение граничной задачи:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (10)$$

где \mathbf{p} — вектор коэффициентов линейной комбинации решений, \mathbf{f} — значение граничного условия.

Если в граничной задаче применяются составные граничные условия, то уравнение (8) умножается на матрицу \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{f}. \quad (11)$$

Матрица \mathbf{C} может добавить ограничение к уже имеющимся:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{Null} & \mathbf{E} \\ c_1 & \cdots & c_K & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а также уменьшить количество ограничений, заменив несколько коэффициентов в векторе \mathbf{f} их линейной комбинацией. В (12) для наглядности строки и столбцы переставлены так, чтобы коэффициенты составного ограничения расположились подряд в нижней строке матрицы \mathbf{C} . \mathbf{Null} — нулевая квадратная матрица размерности $K \times K$, \mathbf{E} — единичная матрица размерности $L \times L$.

Если в уравнении (11) произвести замену $\mathbf{p} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*\mathbf{y}$, оно примет вид:

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{C}\mathbf{A})^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*\mathbf{y}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{C}^*, \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{f}.$$

Матрицы \mathbf{C} и \mathbf{A} — прямоугольные. Матрица \mathbf{B} — квадратная, поэтому к уравнению (13) можно применять математический аппарат квадратных матриц как для исследования спектральных свойств матрицы \mathbf{B} , так и для ускорения сходимости итераций при решении уравнения.

3. Сеточные функции

При численном решении граничной задачи необходимо представить граничную поверхность области решения в виде набора прямолинейных отрезков (треугольников в трёхмерном случае), в таком же виде необходимо представить линии или поверхности, используемые для задания граничных условий в области решения. Если регулируемые источники тепла занимают подобласти в области решения, то и область решения необходимо разбить на регулярную квадратную сетку в плоском случае и на кубическую в трёхмерном. При этом значения сеточных функций вычисляются в геометрических центрах граничных элементов. Это один из возможных подходов к операциям с сеточными функциями.

Значения температуры в области D^- вычисляются в центре ячейки квадратной сетки. Сторона ячейки сетки должна иметь длину меньше, чем длина наименьшего граничного элемента, иначе влияние на погрешность расчётов вычисления потенциала (4) будет больше, чем влияние на погрешность вычисления граничных условий. Влияние на решение задачи ячеек, лежащих за пределами области решения или ближе к одному из граничных элементов, чем длина ребра ячейки, не учитывается. Для ячеек, лежащих к граничному элементу ближе, чем две длины этого элемента, влияние на граничный элемент следует вычислять с помощью подэлементов (рисунок 1).

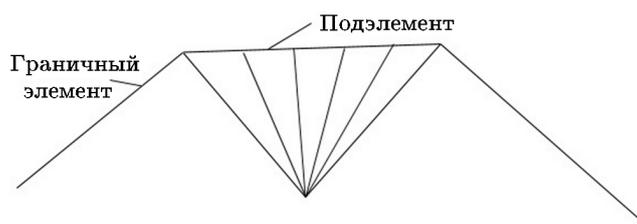


Рис. 1. Подэлементы

В процессе решения граничной задачи возникает необходимость вычисления влияния на граничные значения и значения во внутренних точках источников тепла, расположенных близко к указанным объектам. В этих случаях вычисляется влияние внутреннего источника тепла на подэлементы граничного элемента. Степень близости источников тепла определяется необходимой точностью вычислений. При проведении большинства прикладных расчётов расстояния, равного двойной длине граничного элемента (подэлемента), достаточно. Подэлемент — граничный элемент, полученный после деления исходного граничного элемента.

После вычисления влияния сингулярного решения на подэлементы среднее значение температуры на подэлементах и сумма потоков тепла через подэлементы принимаются за влияние этого решения на температуру и поток тепла на граничном элементе.

Влияние источника тепла на граничный элемент, удалённый на расстояние, большее установленного минимального, вычисляется как значение температуры или градиента температуры в средней точке элемента.

Пренебрежение влиянием на решение ячеек, не полностью принадлежащих области решения, вносит высокочастотную погрешность в решение. Однако такую же погрешность вносят численное дифференцирование по времени, разбивка граничных поверхностей на дискретные элементы и представление функций в области решения сеточными функциями. Высокочастотную составляющую решения всё равно необходимо отфильтровывать как по координатам, так и по времени до половины максимальной частоты.

4. Спектральные свойства матриц A и B

В публикациях по теме данной статьи авторы указывают на слабую обусловленность матрицы A в уравнении (8) [13–15]. Причинами этого могут быть как слабое влияние некоторых решений в линейной комбинации на граничные условия по сравнению с другими решениями, так и недостаточная плотность граничных элементов для аппроксимации функций, быстро изменяющихся вдоль дуги на границе области решения или внутри [13].

Слабое влияние решений на граничные условия часто объясняют тем, что решение принадлежит ядру матрицы. Однако о ядре матрицы имеет смысл говорить, если коэффициенты матрицы целые числа или дроби с целыми знаменателем и числителем. В задачах математической физики используются матрицы с вещественными коэффициентами (за редким исключением), поэтому применение термина “слабая обусловленность” представляется более точным.

Влияние решений на граничные условия оценивается на этапе подготовки данных для решения задачи и принимается решение о том, оставить или не оставить решение в линейной комбинации.

Быстро изменяющаяся часть функций, участвующих в решении задачи, следует отфильтровывать как на этапе подготовки данных для расчётов, так и в процессе решения задачи [13]. Функция, производная которой меняет знак каждый раз при переходе от одной точки сетки к соседней точке и далее к следующей соседней, является погрешностью. Однако следует иметь в виду, что на граничной поверхности возможно наличие точек, в которых меняется тип граничного условия или просто есть разрыв функции. Фильтрацию следует производить на участках границы между такими точками.

5. Решение граничной задачи

Граничная задача решается путём минимизации функционала [16]:

$$(\mathbf{F} - \mathbf{F}_1, \mathbf{F} - \mathbf{F}_1) \rightarrow \min, \quad (14)$$

где \mathbf{F}_1 — граничные значения приближённого решения. Если через \mathbf{F}_{11} обозначить невязку $\mathbf{F} - \mathbf{F}_1$ и прибавить к вектору \mathbf{y} поправку \mathbf{q} с коэффициентом α , то для определения коэффициента α получится квадратное уравнение:

$$\alpha^2(\mathbf{CAq}, \mathbf{CAq}) + 2\alpha(\mathbf{CAq}, \mathbf{F}_{11}) + (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11}) \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \mathbf{F}_{11}, \quad (16)$$

$$\alpha^2 \cdot (\mathbf{CAA}^* \mathbf{C}^* \mathbf{F}_{11}, \mathbf{CAA}^* \mathbf{C}^* \mathbf{F}_{11}) + 2 \cdot \alpha \cdot (\mathbf{A}^* \mathbf{F}_{11}, \mathbf{A}^* \mathbf{F}_{11}) + (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11}) \rightarrow \min, \quad (17)$$

$\mathbf{A}^* \mathbf{C}^*$ — оператор, сопряжённый оператору \mathbf{CA} относительно скалярного произведения:

$$((\mathbf{u}(\mathbf{g}), \mathbf{v}(\mathbf{g})) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}(\mathbf{g}_i), \mathbf{v}(\mathbf{g}_i)). \quad (18)$$

Оператор действует из пространства коэффициентов в пространство ограничений, заданных в контрольных точках. Оператор действует из пространства ограничений, заданных в контрольных точках, в пространство коэффициентов. Подстановка (16) делает квадратичную форму положительно определённой, и её значение достигает минимума при

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11})}{(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11}, \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11})}. \quad (19)$$

Решение ищется методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \mathbf{p}^0 &= 0, \\ \mathbf{p}^{l+1} &= \mathbf{p}^l + \alpha^l \mathbf{A}^* \mathbf{F}_{11}, \\ \mathbf{F}_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{p}^{l+1} - \mathbf{F}, \\ \alpha &= -\frac{(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11})}{(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11}, \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{F}_{11})}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь l — номер итерации.

Для уравнения (13) итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\alpha^2(\mathbf{B}\mathbf{q}, \mathbf{B}\mathbf{q}) + 2\alpha(\mathbf{B}\mathbf{q}, \mathbf{F}_{11}) + (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11}) \rightarrow \min, \quad (21)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{F}_{11}. \quad (22)$$

Подстановка (22) делает квадратичную форму положительно определённой:

$$\alpha^2(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}) + 2\alpha(\mathbf{B}\mathbf{F}_{11}, \mathbf{B}\mathbf{F}_{11}) + (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11}) \rightarrow \min,$$

её значение достигает минимума при

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11})}{(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11})}. \quad (23)$$

Решение ищется методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \mathbf{p}^0 &= 0, \\ \mathbf{p}^{l+1} &= \mathbf{p}^l + \alpha^l \mathbf{B}\mathbf{F}_{11}, \\ \mathbf{F}_{11} &= \mathbf{B}\mathbf{p}^{l+1} - \mathbf{F}, \\ \alpha &= -\frac{(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{11})}{(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11})}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь l — номер итерации.

Матрица \mathbf{B} — квадратная самосопряжённая, но не имеющая физического смысла. Однако у матрицы \mathbf{B} можно анализировать спектр для определения разрешимости уравнения (11). Кроме того, матрица \mathbf{B} по размерам меньше матрицы \mathbf{A} в случае, когда в линейной комбинации используются дополнительные решения. После решения уравнения (13) вектор коэффициентов вычисляется с помощью второго из уравнений (13).

6. Ускорение сходимости итераций

Итерационные процессы, представленные в (20) и (24), медленно сходятся, если на границе области деформирования заданы смешанные краевые условия (на части границы температура, а на части границы градиент температуры), а также в некоторых случаях, когда на границе задана только температура.

Ускорить сходимость итераций удаётся с помощью следующей модификации, например, итерационного процесса (24) [15, 16]:

$$\begin{aligned}
\lambda^0 &= 0, & \mathbf{p}^0 &= 0, & \mathbf{r}^0 &= \mathbf{B}\mathbf{F}, \\
\mathbf{F}_{11} &= \mathbf{B}\mathbf{p}^l - \mathbf{F}, \\
\lambda^l &= \frac{(\mathbf{B}^2\mathbf{F}_{11}, \mathbf{B}\mathbf{r}^{l-1})}{(\mathbf{B}\mathbf{r}^{l-1}, \mathbf{B}\mathbf{r}^{l-1})}, \\
\mathbf{r}^l &= \mathbf{B}\mathbf{F}_{11} - \lambda^l\mathbf{r}^{l-1}, \\
\alpha^l &= \frac{(\mathbf{B}\mathbf{r}^l, \mathbf{F}_{11})}{(\mathbf{B}\mathbf{r}^l, \mathbf{B}\mathbf{r}^l)}, \\
\mathbf{p}^{l+1} &= \mathbf{p}^l - \alpha^l\mathbf{r}^l.
\end{aligned} \tag{25}$$

В [17] приведён метод ускорения сходимости итераций при минимизации функционала:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})). \tag{26}$$

Здесь минимизируется функционал:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}). \tag{27}$$

Итерационный процесс (25) является преобразованием предложенного в [17, с. 164] метода ускорения сходимости итераций. Алгоритм (25) ускоряет сходимость итераций, но всё-таки в случае смешанных краевых условий скорость сходимости итераций оставляет желать лучшего.

7. Пример расчёта

В примере расчёта приведено решение стационарной задачи для ограниченной области решения. Набор решений состоял из фундаментальных решений уравнения Дюамеля–Неймана, полюса которых располагались вне области решения вблизи граничного контура, как это показано на рис. 2.

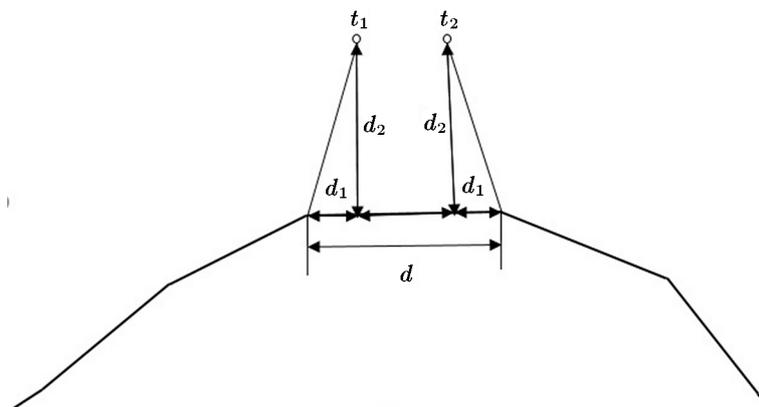


Рис. 2. Расположение полюсов фундаментальных решений над граничным элементом

На рис. 2 показана часть граничного контура (пять элементов). Над каждым граничным элементом располагаются полюса t_1, t_2 двух фундаментальных решений (первая из формул (2)), $d_1 = 0.5d, d_2 = d$, где d — длина граничного элемента.

В примере приведены результаты расчётов потоков тепла в двухсвязной области. На внутреннем граничном контуре задана постоянная температура 1066.4. На левом торце внешнего контура между кружками задана постоянная по длине дуги контура температура 1511.5. На правом торце внешнего контура между точками $p1$ и $p2$ (см. рис. 4) задана интенсивность потока тепла (нормальная производная от температуры, умноженная на коэффициент теплопроводности), график которой по длине дуги контура представлен на рис. 3. Коэффициент теплопроводности равен единице.

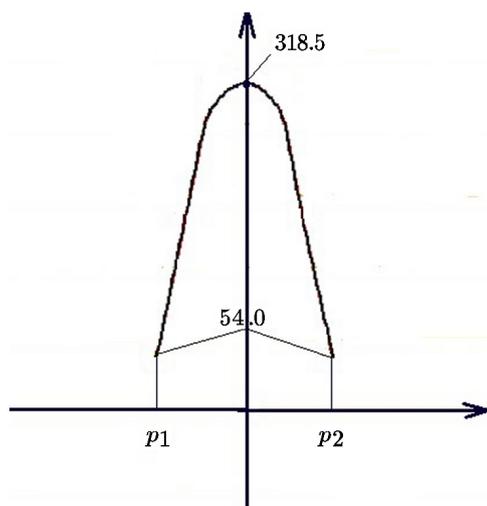


Рис. 3. График интенсивности потока тепла на правом торце внешнего граничного контура

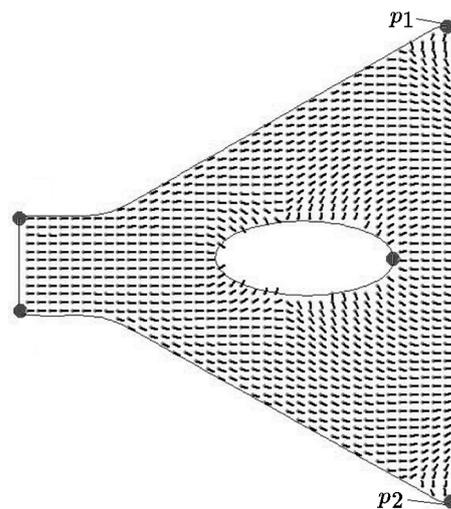


Рис. 4. Направление потока тепла (антиградиент температуры) направлено от точки по штриху

На остальной части внешнего граничного контура задана нормальная производная температуры, равной нулю.

На рис. 5 и рис. 6 представлены изолинии интенсивности потока тепла и температуры в области решения.

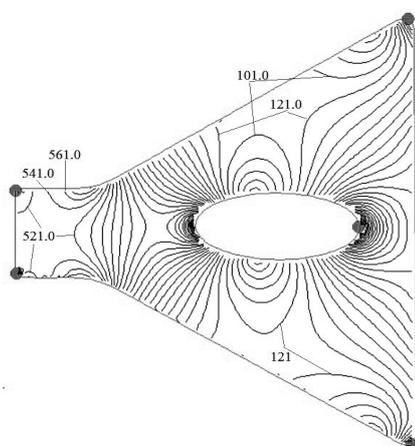


Рис. 5. Изолинии интенсивности потока тепла. Шаг по уровню между изолиниями 20

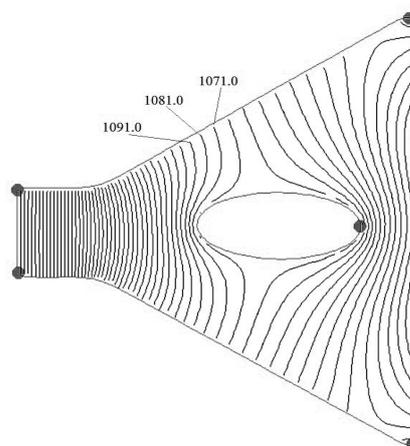


Рис. 6. Температура среды. Шаг по уровню между изолиниями 10

8. Заключение

Предложенный выше алгоритм линейных комбинаций может быть применён для решения граничных задач теории упругости, термоупругости и других граничных задач математической физики и не только математической физики.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность академику РАН А.Н. Коновалову за внимание, проявленное к данной работе, за конструктивное обсуждение как содержания статьи, так и её формы.

Литература

1. **Ясницкий Л.Н.** Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. — Пермь: Изд-во Пермского политехнического института, 1973. — С. 78–83.
2. **Ясницкий Л.Н.** Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1992.
3. **Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н.** Решение трехмерных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Вып. 1, № 5. — С. 41–45.
4. **Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н.** Решение задач линейной термоупругости методом фиктивных канонических областей // Динамика и прочность машин. — Вестник Пермского университета. — 2003. — № 4. — С. 79–90.
5. **Шардаков И.Н.** Метод геометрического погружения в теории упругости / И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов, В.П. Матвеев. — Екатеринбург: УрОРАН, 1999.
6. **Костюченко С.В.** Метод неортогональных рядов для неидеально сопряженных эллиптических задач с разрывными коэффициентами // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5, № 1. — С. 52–64.
7. **Кобылянский Ю.В., Попкова Т.Л., Слепян Г.Я.** О методе неортогональных рядов для численного решения задач математической физики // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 1988. — Т. 28, № 2. — С. 237–246.
8. **Большаков А.Ю., Елтышев В.А.** О решении пространственных задач теории упругости методом Фурье // Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости. — Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1983.
9. **Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А.** Метод функциональных уравнений для приближённого решения некоторых граничных задач // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 1964. — Т. 4, № 4. — С. 683–715.
10. **Алексидзе М.А.** Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — М.: Наука, 1978.
11. **Купрадзе В.Д.** Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
12. **Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.** Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
13. **Машуков В.И., Осин В.А.** Спектральная оценка точности счета в задачах теории упругости // Механика твёрдого тела. — 1990. — Т. 4. — С. 35–40.
14. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
15. **Машуков В.И.** Алгоритм линейных комбинаций для решения граничных задач теории упругости и теплопроводности / Сибирский государственный университет путей сообщения. — Новосибирск, 2016. — Деп. в ВИНТИ 31.03.16, № 55-В2016.

16. **Машуков В.И.** Метод внешнего слоя для решения краевых задач теории упругости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 289–296; Перевод: Mashukov V.I. An Outer Layer Method for Solving Boundary Value Problems of Elasticity Theory // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 3 — P. 237–243.
17. **Хейгеман Л., Янг Д.** Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986.
18. **Кузнецов С.Б.** Алгоритм решения квазилинейных эллиптических уравнений в областях с источниками на внутренних границах. — Новосибирск, 1983. — (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; 476).

*Поступила в редакцию 8 июня 2017 г.,
в окончательном варианте 30 мая 2018 г.*

Литература в транслитерации

1. **Yasnicky L.N.** Ob odnom sposobe resheniya zadach teorii garmonicheskikh funkciy i lineynoy teorii uprugosti // Prochnostnye i gidravlicheskie harakteristiki mashin i konstrukciy. — Perm': Izd-vo Permskogo politekhnicheskogo instituta, 1973. — S. 78–83.
2. **Yasnicky L.N.** Metod fiktivnykh kanonicheskikh oblastey v mekhanike sploshnykh sred. — M.: Nauka, 1992.
3. **Gladkiy S.L., Yasnicky L.N.** Reshenie trekhmernykh zadach teploprovodnosti metodom fiktivnykh kanonicheskikh oblastey // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. — 2011. — Вып. 1, № 5. — S. 41–45.
4. **Gladkiy S.L., Yasnicky L.N.** Reshenie zadach lineynoy termouprugosti metodom fiktivnykh kanonicheskikh oblastey // Dinamika i prochnost' mashin. — Vestnik Permskogo universiteta. — 2003. — № 4. — S. 79–90.
5. **Shardakov I.N.** Metod geometricheskogo pogruzheniya v teorii uprugosti / I.N. Shardakov, N.A. Trufanov, V.P. Matveenko. — Ekaterinburg: UrORAN, 1999.
6. **Kostyuchenko S.B.** Metod neortogonal'nykh ryadov dlya neideal'no sopryazhennykh ellipticheskikh zadach s razryvnymi koefficientami // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2000. — Т. 5, № 1. — S. 52–64.
7. **Kobylyanskiy Yu.V., Popkova T.L., Slepyan G.Ya.** O metode neortogonal'nykh ryadov dlya chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki // Zhur. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1988. — Т. 28, № 2. — S. 237–246.
8. **Bol'shakov A.Yu., Eltyshev V.A.** O reshenii prostranstvennykh zadach teorii uprugosti metodom Fur'e // Sticheskie i dinamicheskie zadachi uprugosti i vyzkouprugosti. — Sverdlovsk: Izd-vo UNC AN SSSR, 1983.
9. **Kupradze V.D., Aleksidze M.A.** Metod funktsional'nykh uravneniy dlya priblizhennogo resheniya nekotorykh granichnykh zadach // Zhur. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1964. — Т. 4, № 4. — С. 683–715.
10. **Aleksidze M.A.** Reshenie granichnykh zadach metodom razlozheniya po neortogonal'nykh funktsiyam. — M.: Nauka, 1978.
11. **Kupradze V.D.** Metody potentsiala v teorii uprugosti. — M.: Fizmatgiz, 1963.
12. **Kupradze V.D., Gegeliya T.G., Basheleyshvili M.O., Burchuladze T.V.** Trekhmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti. — M.: Nauka, 1976.
13. **Mashukov V.I., Osinov V.A.** Spektral'naya ocenka tochnosti scheta v zadachah teorii uprugosti // Mekhanika tverdogo tela. — 1990. — Т. 4. — S. 35–40.
14. **Mihlin S.G.** Variacionnye metody v matematicheskoy fizike. — M.: Nauka, 1970.

15. **Mashukov V.I.** Algoritm lineynyh kombinacij dlya resheniya granichnyh zadach teorii uprugosti i teploprovodnosti / Sibirskiy gosudarstvennyy universitet putey soobshcheniya. — Novosibirsk, 2016. — Dep. v VINITI 31.03.16, № 55-V2016.
16. **Mashukov V.I.** Metod vneshnego sloya dlya resheniya kraevykh zadach teorii uprugosti // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017. — Т. 20, № 3. — S. 289–296; Perevod: Mashukov V.I. An Outer Layer Method for Solving Boundary Value Problems of Elasticity Theory // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 3 — P. 237–243.
17. **Heygeman L., Yang D.** Prikladnye iteracionnye metody. — M.: Mir, 1986.
18. **Kuznecov S.B.** Algoritm resheniya kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s istochnikami na vnutrennih granicah. — Novosibirsk, 1983. — (Preprint / AN SSSR. Sib. otd-nie. VC; 476).