

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СМЕСЕЙ

Специальная и справочная литература содержит десятки формул для расчета коэффициентов теплопроводности смесей по данным о их компонентном составе. Среди них эмпирические корреляционные зависимости, подобранные для конкретных классов смесей, и теоретические соотношения, полученные при достаточно широких предположениях. Последние по идее их построения должны обладать более широкими аппроксимационными возможностями. Каким из этих формул отдать предпочтение при расчете свойств ранее неисследованной смеси или исследованной в более узком диапазоне изменения ее компонентного состава? Сегодня на этот вопрос нет удовлетворительного ответа. Отсутствуют также руководящие правила, по которым можно было бы, если не отобрать наилучшее расчетное соотношение, то хотя бы сузить множество предлагаемых вариантов.

Цель настоящей работы — выявление общих свойств, которым должны удовлетворять формулы для расчета коэффициентов теплопроводности однородных смесей при широком диапазоне изменения их компонентных составов; конструирование параметрического класса функций для корреляционных зависимостей коэффициентов теплопроводности однородных бинарных и многокомпонентных смесей от их компонентного состава. Теоретические результаты работы подтверждаются экспериментальными данными.

**Двухкомпонентные смеси.** Смесь будем называть однородной, если величина ее коэффициента теплопроводности при любом фиксированном компонентном составе смеси не зависит от способа ее получения: добавляется ли первый компонент ко второму или второй к первому, смешиваются ли две одинаковые двухкомпонентные смеси с разными компонентными составами и т. д. Все дальнейшие результаты относятся только к таким смесям.

Пусть  $\lambda_s$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности двухкомпонентной смеси и ее компонентов, долевую концентрацию которых обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Для последующих рассуждений неважно, определены эти концентрации в виде объемных, массовых или мольных долей. Важно только, что они удовлетворяют равенству  $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ . Искомую зависимость запишем в виде системы

$$(1) \quad \lambda_s = F(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

Для определения общих свойств, которым должны удовлетворять функция  $F$  и ее производные, будем предполагать, что она полностью зависит от перечисленных переменных и является физической зависимостью, для исследования которой можно воспользоваться анализом размерностей [1]. Из этого предположения следует, что функция  $F$  не может включать в себя размерные коэффициенты. Несмотря на очевидность такого условия, оно довольно часто нарушается при нахождении функции  $F$  на основе аппроксимации экспериментальных данных. Примером тому может служить расчетная формула Джорджа — Коутса [2], в показатели экспоненты которой входят две размерные константы.

В дальнейшем будем полагать, что структура соотношения (1) зависит не только от списка переменных, но и от их порядка в списке. В соответствии с этим соглашением запись  $F(\lambda_2, \lambda_1, \varphi_2, \varphi_1)$  означает, что эту функцию получили из исходной  $F(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2)$  путем взаимной перестановки в последней переменных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если при какой-либо перестановке переменных функция остается неизменной, то будем говорить, что эта функция обладает свойством четности относительно данной перестановки, а если перестановка изменяет знак функции, то последнюю будем называть нечетной относительно этой перестановки.

Для установления свойств четности функции  $F$  сделаем очевидное утверждение: искомая зависимость вида (1) не должна зависеть от произвола исследователя в выборе порядка нумерации компонентов смеси. Поэтому при изменении нумерации компонентов равенство (1) должно

сохраняться. А это означает, что функция  $F$  будет обладать свойствами четности относительно одновременной взаимной перестановки ее переменных  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\varphi_1, \varphi_2$ . Другими словами, функция  $F$  должна удовлетворять равенству

$$(2) \quad F(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2) = F(\lambda_2, \lambda_1, \varphi_2, \varphi_1).$$

Поскольку структура функции  $F$  не зависит от соотношения величин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то (1) справедливо и для  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Физически это можно уподобить ситуации, когда результирующая смесь приготавливается из двух частей одного и того же вещества. Для различия этих частей можно считать, что они помечены каким-либо инертным красителем. Для такой смеси величина  $\lambda_\Sigma$ , естественно, не будет зависеть от соотношения смешиваемых компонентов, что эквивалентно выполнению равенства

$$(3) \quad \lambda = F(\lambda, \lambda, \varphi_1, \varphi_2).$$

Помимо перечисленных свойств, функция  $F$  должна удовлетворять следующим очевидным равенствам, которые можно трактовать как предельные свойства этой функции при стремлении  $\varphi_1$  (или  $\varphi_2$ ) к нулю или единице:

$$(4) \quad \lambda_1 = F(\lambda_1, \lambda_2, 1, 0), \quad \lambda_2 = F(\lambda_1, \lambda_2, 0, 1).$$

Изучение свойств производной функции  $F$  начнем с такого рассуждения. Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2$  и функция  $F$  монотонно изменяется при изменении переменной  $\varphi_2$ . Тогда при любом соотношении компонентов рост доли второго компонента приведет к увеличению  $\lambda_\Sigma$ . Если  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то увеличение  $\varphi_2$  ведет к уменьшению  $\lambda_\Sigma$ . В математической символике этот факт можно записать в виде неравенств

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \varphi_2, \varphi_2) \begin{cases} > 0 & \text{при } \lambda_1 < \lambda_2, \\ = 0 & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \\ < 0 & \text{при } \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} F(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, 1 - \varphi_1) \begin{cases} > 0 & \text{при } \lambda_1 < \lambda_2, \\ = 0 & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \\ < 0 & \text{при } \lambda_1 > \lambda_2. \end{cases}$$

Если  $F$  не является монотонной функцией на всем диапазоне изменения  $\varphi_2$  (или  $\varphi_1$ ), то можно утверждать, что (5) всегда справедливо в окрестности точки  $\varphi_2 = 0$  (или  $\varphi_1 = 0$ ).

Для монотонно возрастающих (убывающих) функций из неравенств (5) вытекает, что в структуре производной от  $F$  всегда можно выделить сомножитель, зависящий только от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , знак которого определяется соотношением этих величин согласно (5). Учитывая, что  $\varphi_1$  выражается через  $\varphi_2$  и наоборот, одну из этих переменных всегда можно исключить из вышеприведенных соотношений. Проведя такое исключение и вводя новые функциональные обозначения, соотношение (1) запишем в виде  $\lambda_\Sigma = F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \varphi_2, \varphi_2) \equiv F_1(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_2)$  или  $\lambda_\Sigma = F(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, 1 - \varphi_1) \equiv F_2(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1)$ . Функции  $F_1$  и  $F_2$  должны удовлетворять равенствам  $F_1(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \varphi_1) = F_2(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1)$ ,  $F_1(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_2) = F_2(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \varphi_2)$ . Свойство четности  $F$ , записанное в виде (2), для  $F_1$  и  $F_2$  соответствует равенствам  $F_1(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_2) = F_1(\lambda_2, \lambda_1, 1 - \varphi_2)$ ,  $F_2(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1) = F_2(\lambda_2, \lambda_1, 1 - \varphi_1)$ .

Условие независимости  $\lambda_\Sigma$  от соотношения смешиваемых компонентов при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , определяемое (3), для  $F_1$  и  $F_2$  имеет вид  $\lambda = F_1(\lambda, \lambda, \varphi_2) = F_2(\lambda, \lambda, \varphi_1)$ . Предельные свойства (4) функции  $F$  для  $F_1$  и  $F_2$  определяются из

$$(6) \quad \lambda_1 = F_1(\lambda_1, \lambda_2, 0) = F_2(\lambda_1, \lambda_2, 1), \quad \lambda_2 = F_1(\lambda_1, \lambda_2, 1) = F_2(\lambda_1, \lambda_2, 0).$$

Авторами проверено 26 наиболее часто встречающихся в литературе формул для расчета коэффициентов теплопроводности однородных смесей. Все они удовлетворяют предельным свойствам (4), пять из них удовлетворяют свойству четности (2), и только следующие три из последних — свойству (5):

$$(7) \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda_1^{\varphi_1} + \lambda_2^{\varphi_2},$$

$$\lambda_{\Sigma} = \left[ \lambda_1 \lambda_2 \frac{\varphi_1 \lambda_1 + \varphi_2 \lambda_2}{\varphi_1 \lambda_2 + \varphi_2 \lambda_1} \right]^{1/2}, \quad \lambda_{\Sigma} = [\varphi_1 \lambda_1^r + \varphi_2 \lambda_2^r]^{1/r}$$

( $r$  — коэффициент). Первые две из них предложены Лихтенеккером [3], третья — Вредевелдом [2], она обычно называется формулой обобщенной аддитивности. Какой из этих формул отдать предпочтение при оценке коэффициента теплопроводности новой смеси? Что в них изменить, чтобы на их основе можно было строить новые корреляционные зависимости?

Для ответа на эти вопросы вернемся к соотношению (1) и анализу размерности искомой зависимости. Помимо интегральной формы, эту зависимость в предположении ее дифференцируемости можно искать в дифференциальной форме. Константы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые в явном виде входили в интегральное соотношение (1), в этом случае могут входить только в граничные условия дифференциального уравнения. В само уравнение они тоже могут войти, но только в виде их отношения, соответствующего безразмерной константе. Учитывая все это, запишем дифференциальную форму искомой зависимости как \*

$$(8) \quad \Phi(\partial \lambda_{\Sigma} / \partial \varphi_2, \lambda_{\Sigma}, \varphi_2, \lambda_2 / \lambda_1) = 0, \quad \lambda_{\Sigma}(0) = \lambda_1, \quad \lambda_{\Sigma}(1) = \lambda_2.$$

Переходя в уравнении (8) к безразмерным переменным (их будет три:  $\lambda_{\Sigma} / \lambda_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\lambda_2 / \lambda_1$ ) и разрешая его относительно первой из них, запишем результат в виде дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\lambda_{\Sigma}} \frac{\partial \lambda_{\Sigma}}{\partial \varphi_2} = f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \varphi_2\right), \quad \lambda_{\Sigma}(0) = \lambda_1, \quad \lambda_{\Sigma}(1) = \lambda_2,$$

решая которое с начальным условием  $\lambda_{\Sigma}(0) = \lambda_1$  и используя равенство  $\lambda_{\Sigma}(1) = \lambda_2$  для нормировки функции  $f(\lambda_2 / \lambda_1, \varphi_2)$ , получим

$$(9) \quad \frac{\lambda_{\Sigma}}{\lambda_1} = \exp \left\{ \int_0^{\varphi_2} f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \varphi_2\right) d\varphi_2 \right\}, \quad \int_0^1 f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \varphi_2\right) d\varphi_2 = \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

С целью параметризации функции  $f$  разложим ее в ряд по некоторой системе функций  $\psi_i(\varphi_2)$ , ортогональных на отрезке  $[0, 1]$ , в результате получим

$$(10) \quad f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \varphi_2\right) = \alpha_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(\varphi_2) \right], \quad \alpha_0 = \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \psi_0(\varphi_2) = 1.$$

В общем случае коэффициенты  $\alpha_i$  являются функциями отношения  $\lambda_2 / \lambda_1$  такими, что при подстановке (10) в (9) должно выполняться свойство четности (2). Поскольку мы рассматриваем построение аппроксимирующих зависимостей для конкретных смесей, то в дальнейшем считаем коэффициенты  $\alpha_i$  константами, определяемыми экспериментально.

С учетом (10) приведем искомую зависимость (9) к виду

$$(11) \quad \frac{\lambda_{\Sigma}}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\varphi_2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i I_i(\varphi_2)}, \quad I_i(\varphi_2) = \int_0^{\varphi_2} \psi_i(\varphi) d\varphi.$$

\* Если вместо  $\varphi_2$  взять  $\varphi_1$ , то в качестве граничных условий надо использовать  $\lambda_{\Sigma}(0) = \lambda_2$ ,  $\lambda_{\Sigma}(1) = \lambda_1$  (см. (6)).

Т а б л и ц а 1

Тип смеси и ее компонентный состав	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\varphi_2$	$\alpha_1$	$\delta, \%$
	Вт/(м·К)				
Нормальные органические жидкости: циклогексан — бензол [5]	0,218	0,145	0÷1	0	1,6
Ассоциированные органические жидкости: метиловый спирт — бутиловый спирт [5]	0,200	0,151	0÷1	0	0,9
Водные растворы спиртов: этиловый спирт — вода [6]	0,167	0,603	0÷1	0 0,3	13,5 3,4
Неорганические жидкости с водой: ортофосфорная кислота — вода [7]	0,442	0,603	0÷1	0 -1,07	6,8 2,0
Прямые эмульсии: эмульсол «Укринол-1» в воде [8]	0,160	0,603	0÷0,3	0	1,3
Обратные эмульсии: эмульсия воды в нефти Каратюбинского месторождения [9]	0,603	0,147	0÷0,5	0	1,2

Отсюда ясно, что при  $n = 0$  полученное соотношение полностью совпадает с первой формулой (7). В качестве функций  $\psi_i(\varphi)$  удобно воспользоваться полиномиальными функциями, ортогональными на отрезке  $[0,1]$ . Считая, что  $\psi_0(\varphi) = 1$ , следующие две из них запишем как \*

$$(12) \quad \psi_1(\varphi) = 1 - 2\varphi, \quad \psi_2(\varphi) = 1 - 6\varphi + 6\varphi^2.$$

При необходимости последующие полиномы строятся на основе известных методов ортогонализации [4]. Однако нам не удалось найти экспериментальные данные, для которых с учетом их точности потребовалось бы использовать аппроксимацию (11) при  $n \geq 2$ .

Соответствующие функциям (12) интегралы в (11) можно записать как функции только концентрации  $\varphi_2$ , так и в виде смешанных зависимостей от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые для практических расчетов более удобны:

$$I_1 = \varphi_2 - \varphi_2^2 = \varphi_1\varphi_2, \quad I_2 = \varphi_2 - 3\varphi_2^2 + 2\varphi_2^3 = \varphi_1\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

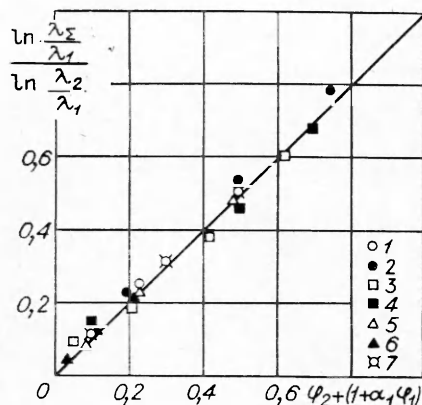
Проверка целесообразности применения полученного класса параметрических зависимостей для построения расчетных формул была проведена на 20 различных смесях. Экспериментальные данные о параметрах смесей заимствовались из различных литературных источников. Наиболее характерные из найденных результатов представлены в табл. 1 и на рисунке (точки 1 — циклогексан — бензол [5], 2 — метиловый спирт — бутиловый спирт [5], 3 — этиловый спирт — вода [6], 4 — глицерин — вода [6], 5 — ортофосфорная кислота — вода [7], 6 — эмульсол «Укринол-1» в воде [8], 7 — эмульсия воды в нефти Каратюбинского месторождения [9]). В табл. 1  $\delta$  — относительная ошибка между экспериментальными данными и построенной аппроксимирующей зависимостью (11).

Определение неизвестных коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  производилось по методу наименьших квадратов. Если находился только один коэффициент  $\alpha_1$ , то он вычислялся по формуле

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad b_1 = \sum_{j=1}^k y^{(j)} I_1(\varphi_2^{(j)}),$$

$$a_{11} = \sum_{j=1}^k I_1^2(\varphi_2^{(j)}), \quad y^{(j)} = \frac{\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1}}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \varphi_2^{(j)}.$$

\* Функции  $\psi_i(\varphi)$  здесь можно не нормировать, так как они умножаются на известные коэффициенты  $\alpha_i$ .



Здесь индекс  $j$  определяет порядковый номер экспериментальной точки, характеризуемой координатами  $\lambda_{\Sigma}^{(j)}$  и  $\varphi_2^{(j)}$ . В случае определения двух коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  они вычисляются по формулам

$$\alpha_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{12} b_1}{\Delta},$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad b_2 = \sum_{j=1}^k y^{(j)} I_2(\varphi_2^{(j)}),$$

$$a_{12} = \sum_{j=1}^k I_1(\varphi_2^{(j)}) I_2(\varphi_2^{(j)}),$$

$$a_{22} = \sum_{j=1}^k I_2^2(\varphi_2^{(j)}).$$

Анализ результатов вычислений показывает, что использование только одного члена ряда в показателе степени правой части (11) (формула Лихтенеккера) позволяет получить удовлетворительные по точности результаты только для смесей, у которых слабо различаются коэффициенты теплопроводности исходных компонентов, а также для прямых и обратных эмульсий. Обращает на себя внимание также факт непостоянства знака коэффициента  $\alpha_1$  для различных смесей, что отвечает введению поправки разного знака в формулу Лихтенеккера.

**Многокомпонентные смеси.** Процедуру построения аппроксимирующих зависимостей для коэффициентов теплопроводности многокомпонентных однородных смесей рассмотрим на примере трехкомпонентной смеси с концентрациями компонентов  $\varphi_{13}$ ,  $\varphi_{23}$ ,  $\varphi_{33}$  и соответствующими коэффициентами теплопроводности  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Вторая цифра двойного индекса показывает количество компонентов рассматриваемой смеси. Если компоненты  $\varphi_{13}$  и  $\varphi_{23}$  (в общем случае любые два) мысленно объединить в один, то смесь можно рассматривать как двухкомпонентную с концентрациями компонентов  $(\varphi_{13} + \varphi_{23})$ ,  $\varphi_{33}$  и отвечающими коэффициентами теплопроводностей  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_3$ . Коэффициент  $\lambda_1^*$  рассчитаем по формуле (11) при условии, что

$$\lambda_1^* = \lambda_{\Sigma}, \quad \lambda_1 = \lambda_1, \quad \lambda_2 = \lambda_2, \quad \varphi_1 = \varphi_{13}/(\varphi_{13} + \varphi_{23}), \quad \varphi_2 = \varphi_{23}/(\varphi_{13} + \varphi_{23}).$$

Искомый результат получим также по формуле (11), полагая в ней

$$\lambda_1 = \lambda_1^*, \quad \lambda_2 = \lambda_3, \quad \varphi_1 = \varphi_{13} + \varphi_{23}, \quad \varphi_2 = \varphi_3.$$

В формульном виде результат приведенной процедуры построения аппроксимирующей зависимости для трехкомпонентной однородной смеси можно записать в виде

$$(13) \quad \frac{\lambda_{\Sigma}}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\eta_1(1-\eta_2)} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\eta_2}, \quad \eta_1 = \frac{\varphi_{23}}{\varphi_{13} + \varphi_{23}} +$$

$$+ \frac{\varphi_{13}\varphi_{23}}{(\varphi_{13} + \varphi_{23})^2} \left( \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\varphi_{13} - \varphi_{23}}{\varphi_{13} + \varphi_{23}} \right),$$

$$\eta_2 = \varphi_{33} + (\varphi_{13} + \varphi_{23})\varphi_{33}[\beta_1 + \beta_2(\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{33})].$$

Коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  определяются из аппроксимации коэффициентов теплопроводности бинарных смесей из компонентов с коэффициентами теплопроводности  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_1^*$ ,  $\lambda_2$  соответственно.

В качестве примера рассчитана аппроксимирующая зависимость коэффициента теплопроводности тройной смеси: изопропиловый спирт — н-бутиловый спирт — вода. Расчеты проводились по данным [10]. Концентрации исходных компонентов в смеси изменялись соответственно

Т а б л и ц а 2

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\delta, \%$
0	0	0	0	4,6
0	0	-0,093	0	2,3

в пределах  $(0 \div 0,46)$ ,  $(0 \div 0,43)$ ,  $(0 \div 0,64)$ , а коэффициенты теплопроводности исходных компонентов равны  $\lambda_1 = 0,140$ ,  $\lambda_2 = 0,153$ ,  $\lambda_3 = 0,613$ . В табл. 2 приведены расчетные значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  по формуле (13) и соответствующие им значения максимальной ошибки аппроксимации  $\delta$ .

Случай, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , отвечает аппроксимации промежуточных бинарных компонентов по формуле Лихтенеккера (7).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хантли Г. Анализ размерностей.— М.: Мир, 1970.
2. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
3. Lichteneker K. Zur Wider standsberechnung mischkristallfreie Legierungen // Phys. Z.— 1909.— Bd 10, N 25; 1929.— N 22.
4. Кори Г., Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1968.
5. Мухамедзанов Г. Х., Усманов А. Г. Теплопроводность органических жидкостей.— Л.: Химия, 1971.
6. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов.— Л.: Энергия, 1974.
7. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций.— М.: Мир, 1968.
8. Чередниченко Г. И., Фройштетер Г. Б., Ступак П. М. Физико-химические теплофизические свойства смазочных материалов.— Л.: Химия, 1986.
9. Кучеров В. Г. Теплофизические свойства водонефтяных эмульсий и методика их расчета для условий сбора и подготовки нефти: Дис. канд. техн. наук.— М., 1987.
10. Расторгуев Ю. Л., Ганиев Ю. А. Теплопроводность жидких растворов // ИФЖ.— 1968.— Т. 14, № 4.

г. Москва

Поступила 9/1 1990 г.

УДК 539.3 : 534.1

А. А. Ляпин, А. Н. Румянцев, М. Г. Селезнев

### ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассматривается задача о возбуждении установившихся гармонических колебаний в упругом двухслойном полупространстве со сферической полостью жестким массивным штампом, действующим на плоскую поверхность. Деформация среды предполагается осесимметричной. Решение краевой задачи разбивается на два этапа. На первом исследуется задача о возбуждении установившихся гармонических колебаний в двухслойном упругом полупространстве с заглубленной сферической полостью жестким круглым невесомым штампом с плоским основанием. Краевая задача с учетом условий излучения сводится к системе интегрофункциональных уравнений, изучаемой методами приближенной факторизации матриц-функций и асимптотическими методами. В предположении, что амплитуда действующей на штамп нагрузки постоянна, находятся закон распределения контактных напряжений и амплитудно-частотные характеристики точек подошвы штампа. На втором этапе учитывается влияние массы штампа, для чего рассматривается уравнение его движения как жесткого массивного тела при воздействии на него заданной внешней нагрузки и реакции упругого сложного основания, которая в заданном частотном диапазоне определяется на первом этапе.

Приводятся результаты исследования основных закономерностей поведения амплитудно-частотных характеристик в зависимости от массы штампа, расположения полости в среде при различных соотношениях жесткостей слоя и полупространства.