Теплофизика и аэромеханика, 2023, том 30, № 6

УДК 621.311

Построение приближенных аналитических решений для модели переноса тепла в слое льда при СВЧ-облучении

В.А. Карелин, Вл.В. Саломатов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mails: vad2hen@mail.ru, salomatov.vv@mail.ru

В представленной работе рассматривается СВЧ-обработка снежно-ледяной массы, этапами которой являются нагрев и плавление. Построена нелинейная математическая модель двухфазной задачи Стефана для слоистой системы диэлектриков, найдены приближенные аналитические решения, которые позволяют учесть влияние теплофизических и электрофизических свойств слоев, провести параметрический анализ.

Ключевые слова: СВЧ-излучение, электромагнитный нагрев, теплоизлучение, конвекция, диэлектрик, энергозатраты, приближенные аналитические решения.

Введение

Снег и лед могут представлять серьезную проблему для различных отраслей промышленности, особенно для транспортного сектора. Так, например, во время сильных заморозков происходит блокировка дорог и тротуаров. В этих случаях использование СВЧ-излучения помогает быстро очистить дороги и тротуары от льда и снега и предотвратить аварии или падения на скользкой поверхности. Другим случаем, когда СВЧ-излучение может быть полезно, является обработка аэродромов и запускной полосы перед взлетом самолета, что помогает предотвратить задержку рейсов или даже отмену из-за жесткого зимнего климата. Также СВЧ-излучение применяется при обработке замерзших поверхностей, например, на ступнях лодок, гидротехнических сооружений или других конструкций. При сильных морозах снежно-ледяная масса может скапливаться на крышах машин и автобусов, что не только затрудняет движение транспорта, но и создает потенциальную угрозу для окружающих, если эта масса начинает сходить со снегоступов во время движения. Для решения этой и других проблем можно использовать метод СВЧ-обработки, который позволяет удалять нависшую на крыше машины снежно-ледяную массу. Использование СВЧ-излучения для плавления льда и снега — быстрый и эффективный способ устранения проблем, связанных с зимними условиями [1, 2]. Оно применяется в широком спектре областей, где время имеет критическое значение, и представляет собой хороший инструмент для улучшения безопасности и экономии времени и усилий. Важным параметром при использовании СВЧ-технологий являются также энергозатраты.

Для реализации энергоэффективных режимов обработки снежно-ледяной массы необходимо моделирование процессов теплопереноса, которое позволит выявить оптимальные параметры для данного вида обработки с минимальными затратами энергии и ресурсов [3, 4]. В настоящей работе рассматриваются основные принципы моделирования СВЧ-обработки снежно-ледяной массы, а также приводится построение приближенных аналитических решений.

Нахождение аналитических решений для актуальных задач в науке и технике является достаточно сложным процессом. В некоторых случаях приближенные аналитические решения могут существенно упростить параметрический анализ и поиск энергоэффективных режимов, что, в свою очередь, может привести к существенному снижению затрат на исследования и разработку новых устройств. В представленной работе предлагается к рассмотрению задача нахождения приближенных аналитических решений, которые позволят эффективно решать ряд задач в науке и технике.

Модель тепло- и массопереноса при СВЧ-обработке слоя льда

Формула, которую можно использовать для расчета микроволновой мощности на единицу объема вещества имеет вид:

$$q(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon''\left|E(x,y,z,t)\right|^2, \qquad (1)$$

где ω — циклическая частота микроволн, ε_0 — электрическая постоянная, ε'' — мнимая часть диэлектрической проницаемости, E — напряженность электрического поля. Модель переноса тепла строится исходя из положения, что на верхнюю границу слоя диэлектрика (лед) падает СВЧ-излучение.

При построении модели переноса тепла на верхней границе слоя льда предполагается падение СВЧ-излучения. При этом учитывается, что мнимая часть диэлектрической проницаемости льда при температуре –12 °С составляет 0,003 [4].

Формула (1) указывает на минимальные потери мощности СВЧ-излучения во льду. После прохождения через лед микроволновая энергия напрямую действует на прилегающую поверхность (в данном случае на слой воды). Вода обладает гораздо более высоким значением мнимой части диэлектрической проницаемости, что позволяет ей поглощать часть микроволн с их последующим превращением в тепловую энергию. Этот процесс способствует плавлению льда в местах, где слой воды соприкасается со слоем льда. Когда лед на стыке переходит в жидкую форму, вода также поглощает микроволновую энергию в значительных количествах, что способствует усилению таянья льда. На рис. 1 приведена схема рассматриваемой задачи.

В рамках исследования были приняты следующие предположения: микроволновое излучение попадает на слой льда, расположенный вдоль оси x; источник тепла моделируется с использованием закона Бугера; начальные температуры слоев льда и воды остаются неизменными; рассматриваются усредненные по температуре свойства слоев; конвективный теплообмен между водой и внешней поверхностью льда не учитывается. При этом, так как лед изначально находится при отрицательной температуре, следует

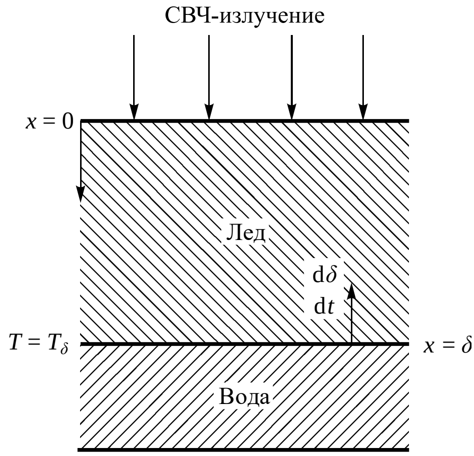

Рис. 1. Схема воздействия СВЧ-излучения на слой льда.

рассмотреть две задачи: нагрева льда до температуры плавления и плавления льда с условием Стефана на границе с водой.

Постановка задачи нагрева и поиск приближенных аналитических решений

Система уравнений, описывающая изучаемую задачу, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{\text{л}}(x,t)}{\partial t} = a_{\text{л}} = \frac{\partial^2 T_{\text{л}}(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<\delta,\\
&\frac{\partial T_{\text{в}}(x,t)}{\partial t} = a_{\text{в}}\frac{\partial^2 T_{\text{в}}(x,t)}{\partial x^2}+\frac{q_{\text{в}}}{c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}}\mathrm{e}^{-\psi\left(x-\delta\right)},\ \delta<x<\infty,\\
&T_{\text{л}}\left(x,0\right)=T_{0\text{л}},\ 0<x<\delta;\ T_{\text{в}}\left(x,0\right)=T_{0\text{в}},\ \delta<x<\infty,\\
&\frac{\partial T_{\text{л}}\left(\delta,\tau\right)}{\partial x}=K_{\lambda}\frac{\partial T_{\text{в}}\left(\delta,\tau\right)}{\partial x},\\
&\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial T(\infty,t)}{\partial x} = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

здесь $\lambda_{\text{в}}$, $\lambda_{\text{л}}$ — теплопроводность воды и льда, $a_{\text{в}}$, $a_{\text{л}}$ — температуропроводность воды и льда, K_{λ} — отношение теплопроводностей, q — объемная мощность, определенная в (1), ψ — коэффициент затухания.

Для нахождения решения перейдем к изображениям через преобразование Лапласа:

$$
\begin{aligned}
&T''_{\text{лL}}\left(x,s\right)=\frac{s}{a_{\text{л}}}T_{\text{лL}}\left(x,s\right)-\frac{T_{0\text{л}}}{a_{\text{л}}},\ 0<x<\delta,\\
&T''_{\text{вL}}\left(x,s\right)=\frac{s}{a_{\text{в}}}T_{\text{вL}}\left(x,s\right)-\frac{q_{\text{в}}}{sc_{\text{в}}\rho_{\text{в}}a_{\text{в}}}\mathrm{e}^{-\psi\left(x-\delta\right)}-\frac{T_{0\text{в}}}{a_{\text{в}}},\ \delta<x<\infty,\\
&T'_{\text{лL}}\left(0,s\right)=T'_{\text{вL}}\left(\infty,s\right)=0,\\
&T'_{\text{лL}}\left(\delta,s\right)=K_{\lambda}T'_{\text{вL}}\left(\delta,s\right),\\
&T_{\text{вL}}\left(\infty,s\right)=\frac{T_{0\text{в}}}{s}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Решение в общем виде уравнений теплопроводности:

$$
\begin{aligned}
&T_{\text{лL}}\left(x,s\right)=A_1\cdot\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}x\right)+B_1\cdot\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}x\right)+\frac{T_{0\text{л}}}{s},\\
&T_{\text{вL}}\left(x,s\right)=A_2\cdot\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{в}}}}x\right)+B_2\cdot\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{в}}}}x\right)+C_2\mathrm{e}^{-\psi\left(x-\delta\right)}+\frac{T_{0\text{в}}}{s}.
\end{aligned}
$$

С помощью граничных условий найдем константы:

$$B_1 = 0,\ A_2 = -B_2,\ A_2 = 0,\ C_2 = \frac{q_{\text{в}}}{s c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - a_{\text{в}} \psi^2\right)},\ A_1 = \frac{K_\lambda \psi q_{\text{в}} \sqrt{a_{\text{л}}}}{s^{3/2} c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - a_{\text{в}} \psi^2\right) \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}\delta\right)}.$$

В результате температурные распределения в изображениях записываются в виде:

$$T_{\text{л}L}(x, s) = \frac{K_\lambda \psi q_{\text{в}} \sqrt{a_{\text{л}}}}{s^{3/2} c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - a_{\text{в}} \psi^2\right) sh\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}\delta\right)} \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}x\right) + \frac{T_{0\text{л}}}{s},$$

$$T_{\text{в}L}(x, s) = \frac{q_{\text{в}}}{s c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - a_{\text{в}} \psi^2\right)} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)} + \frac{T_{0\text{в}}}{s}.$$

В силу высокой интенсивности процесса СВЧ-обработки рассмотрим малые времена (большие значения s) и найдем соответствующую им асимптотику. После взятия обратного преобразования Лапласа получаем:

$$T_{\text{в}}(x, t) = \frac{q_{\text{в}} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)}}{c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} a_{\text{в}} \psi^2} \left(\mathrm{e}^{a_{\text{в}} \psi^2 t} - 1\right) + T_{0\text{в}},$$

$$T_{\text{л}}(x,t) = \frac{K_\lambda \psi q_{\text{в}}}{c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} \frac{1}{6 a_{\text{л}}} (\delta - x) \left(\left[6 a_{\text{л}} t + (\delta - x)^2 \right] \left(1 - \mathrm{Erf}\left[\frac{\delta - x}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}} \right] \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \mathrm{e}^{-(\delta - x)^2 / (4 a_{\text{л}} t)} \sqrt{a_{\text{л}} t} \left(4 a_{\text{л}} t + (\delta - x)^2 \right)}{\sqrt{\pi} (\delta - x)} \right) T_{0\text{л}}.$$

По приведенным температурным распределениям можно определить время этапа прогрева t_0. Оно находится из условия $T_{\text{л}}(\delta, t) = T_{\text{ф.п.}}$, при выполнении которого этап прогрева заканчивается. При этом температурные распределения $T_{\text{л}}(x, t_0)$, $T_{\text{в}}(x, t_0)$ служат начальными условиями для второй задачи — задачи плавления льда. Также следует отметить, что функции $T_{\text{л}}(x, t_0)$, $T_{\text{в}}(x, t_0)$ могут быть аппроксимированы как кусочно-заданные функции, состоящие из константы (непрогретая часть) и квадратичной функции (область вблизи границы раздела фаз) (см. рис. 2).

Постановка задачи плавления и поиск приближенных аналитических решений

Рассмотрим постановку задачи плавления, которая запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T_{\text{л}}(x,t)}{\partial t} = a_{\text{л}} \frac{\partial^2 T_{\text{л}}(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \delta,$$

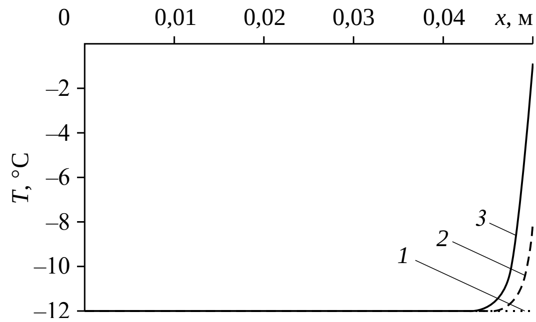

Рис. 2. Характерный вид зависимости температуры льда от координаты в разные моменты времени.

1 — начальное распределение, *2* — две секунды нагрева, *3* — четыре секунды нагрева.

$$\frac{\partial T_{\text{в}}(x,t)}{\partial t} = a_{\text{в}} \frac{\partial^2 T_{\text{в}}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_{\text{в}}}{c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)}, \ \delta < x < \infty,$$
$$T_{\text{л}}(x,0) = T_{\text{л}}(x,t_0), \ 0<x<\delta; \ T_{\text{в}}(x,0) = T_{\text{в}}(x,t_0), \ \delta < x < \infty,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{1}{\rho H}\left(\lambda_{\text{в}} \frac{\partial T_{\text{в}}(\delta,t)}{\partial x} - \lambda_{\text{л}} \frac{\partial T_{\text{л}}(\delta,t)}{\partial x}\right), \tag{4}$$
$$T_{\text{л}}(\delta,s) = T_{\text{в}}(\delta,s),$$
$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial T(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Для нахождения решения перейдем к изображениям через преобразование Лапласа:

$$T''_{\text{лL}}(x,s) = \frac{s}{a_{\text{л}}} T_{\text{лL}}(x,s) - \frac{T_{\text{л}}(x)}{a_{\text{л}}}, \ 0 < x < \delta,$$
$$T''_{\text{вL}}(x,s) = \frac{s}{a_{\text{в}}} T_{\text{вL}}(x,s) - \frac{q_{\text{в}}}{s c_{\text{в}}\rho_{\text{в}} a_{\text{в}}} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)} - \frac{T_{\text{в}}(x)}{a_{в}}, \ \delta < x < \infty,$$
$$T'_{\text{лL}}(0,s) = T'_{\text{вL}}(\infty,s) = 0, \tag{5}$$
$$s\delta = \frac{1}{\rho H}\left(\lambda_{\text{в}} T'_{\text{вL}}(\delta,s) - \lambda_{\text{л}} T'_{\text{лL}}(\delta,s)\right),$$
$$T_{\text{лL}}(\delta,s) = T_{\text{вL}}(\delta,s).$$

Представим $T_{\text{л}}(x)$ и $T_{\text{в}}(x)$ в виде:

$$T_{\text{л}}(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1, & \nu_1 < x < \delta, \\ T_{0\text{л}}, \ 0 < x < \nu_1; \end{cases}$$
$$T_{\text{в}}(x) = \begin{cases} a_2 x^2 + b_2 x + c_2, & \delta < x < \nu_2, \\ T_{0\text{в}}, \ \nu_2 < x < \infty. \end{cases}$$

В общем виде решение уравнений теплопроводности примет вид:

$$T_{\text{лL}}(x,s) = A_1 \cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}} x\right) + B_1 \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}} x\right) + \frac{T_{\text{л}}}{s} + \frac{2a_1 a_{\text{л}}}{s^2},$$

$$T_{\text{вL}}(x,s) = A_2 \cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{в}}}}x\right) + B_2 \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{в}}}}x\right) + C_2 \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)} + \frac{T_{\text{в}}}{s} + \frac{2a_2 a_{\text{в}}}{s^2}.$$

Затем с помощью граничных условий найдем константы и в результате получим решения в изображениях:

$$T_{\text{вL}}(x,s) = \frac{q_{\text{в}}}{s c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - \psi^2 a_{\text{в}}\right)} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)} + \frac{T_{\text{в}}}{s} + \frac{2a_2 a_{\text{в}}}{s^2},$$

$$T_{\text{лL}}(x,s) = \frac{2q_{\text{в}}}{s c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \left(s - a_{\text{в}} \psi^2\right)} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}\delta} \cdot \mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{a_{\text{л}}}}x\right) + \frac{T_{\text{л}}}{s} + \frac{2a_1 a_{\text{л}}}{s^2}.$$

Рассмотрим теперь малые времена (при больших s) и найдем оригиналы:

$$T_{\text{в}}(x,t) = \frac{q_{\text{в}}}{a_{\text{в}} \psi^2 c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} \mathrm{e}^{-\psi(x-\delta)} \left(\mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t} - 1\right) + T_{\text{в}} + 2a_2 a_{\text{в}} t,$$

$$T_{\text{л}}(x,t) = \frac{q_{\text{в}}}{a_{\text{в}} \psi^2 c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} \left(-2\mathrm{Erfc}\left[\frac{\delta - x}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}}\right] + \mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t - \sqrt{\frac{a_{\text{в}}\psi^2}{a_{\text{л}}}}(\delta + x)} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{a_{\text{в}}\psi^2 \delta}{a_{\text{л}}}}} \mathrm{Erfc}\left[\frac{\delta + 2\sqrt{a_{\text{л}} a_{\text{в}} \psi^2} t - x}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{a_{\text{в}}\psi^2}{a_{\text{л}}}}x} \left(-2 + \mathrm{Erfc}\left[\frac{-\delta + 2\sqrt{a_{\text{л}} a_{\text{в}} \psi^2} t + x}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}}\right]\right)\right)\right) + T_{\text{л}} + 2a_1 a_{\text{л}} t.$$

Далее для определения динамики движения новой фазы найдем производные температур по координате на границе движения и подставим их в уравнение для определения динамики движения границы фазового перехода:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{1}{\rho H} \left(\lambda_{\text{в}} \frac{\partial T_{\text{в}}(\delta,t)}{\partial x} - \lambda_{\text{л}} \frac{\partial T_{\text{л}}(\delta,t)}{\partial x} \right),$$

$$\rho H \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\lambda_{\text{в}} q_{\text{в}}}{a_{\text{в}} \psi c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} \mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t} + 2\left(\lambda_{\text{в}} a_2 - \lambda_{\text{л}} a_1\right)\delta + \lambda_{\text{в}} b_2 - \lambda_{\text{л}} b_1 + \frac{\lambda_{\text{в}} q_{\text{в}}}{a_{\text{в}} \psi c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} -$$

$$-\frac{\lambda_{\text{л}} q_{\text{в}}}{\sqrt{a_{\text{в}} a_{\text{л}}} \psi c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} \mathrm{e}^{\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2(\delta - \delta)}} \left(2 - \mathrm{Erfc}\left[\frac{-\delta + 2\sqrt{a_{\text{л}} a_{\text{в}} \psi^2} t + \delta}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}}\right] - \mathrm{Erfc}\left[\frac{\delta + 2\sqrt{a_{\text{л}} a_{\text{в}} \psi^2} t - \delta}{2\sqrt{a_{\text{л}} t}}\right]\right) \mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t}.$$

Решение данного уравнения будет иметь вид:

$$\delta(t) = \mathrm{e}^{Bt/A}\mathrm{const} + \frac{1}{B\left(B - A a_{\text{в}} \psi^2\right)} \left(-B \cdot C + A \cdot C \cdot a_{\text{в}} \psi^2 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{A}\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\sqrt{B} \cdot D \cdot \mathrm{e}^{\frac{Bt}{A}} \mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\sqrt{B}\sqrt{t}}{\sqrt{A}}\right] + BD\mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t}\left(\mathrm{Erfc}\left[\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\right] - E\right)\right),$$

$$A = \rho H,\ B = 2\left(\lambda_{\text{в}} a_2 - \lambda_{\text{л}} a_1\right),\ C = \lambda_{\text{в}} b_2 - \lambda_{\text{л}} b_1 + \frac{\lambda_{\text{в}} q_{\text{в}}}{a_{\text{в}} \psi c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}},\ D = \frac{2\lambda_{\text{л}} q_{\text{в}}}{\sqrt{a_{\text{в}} a_{\text{л}}} \psi c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}},\ E = \frac{\lambda_{\text{в}}\sqrt{a_{\text{л}}}}{2\lambda_{\text{л}}\sqrt{a_{\text{в}}}} + 1.$$

Величину const найдем из начального условия $\delta(0)=\delta_0$ и получим:

$$\delta(t)=\mathrm{e}^{\frac{Bt}{A}}\left(\delta_0+\frac{C}{B}-\frac{D\left(\mathrm{Erfc}\left[\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\right]-E\right)}{B-Aa_{\text{в}}\psi^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{B\left(B-Aa_{\text{в}}\psi^2\right)}-\left(-BC+AC\cdot a_{\text{в}}\psi^2+\sqrt{AB}\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\cdot D\cdot\mathrm{e}^{\frac{Bt}{A}}\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\sqrt{B}\sqrt{t}}{\sqrt{A}}\right]+\right.$$

$$\left.+BD\mathrm{e}^{a_{\text{в}}\psi^2 t}\left(\mathrm{Erfc}\left[\sqrt{a_{\text{в}}\psi^2}\right]-E\right)\right).$$

Таким образом, целью работы являлось нахождение распределений температуры и определение выражения для координаты границы фазового перехода в системе вода – лед. Выражения были получены при малых значениях времени. Для оценки точности полученных решений было проведено сравнение с численными расчетами и экспериментами других исследователей. При моделировании использовалась одномерная геометрия из-за равномерности потока СВЧ-излучения. Высота слоя льда равнялась 0,05 м, начальная температура льда составляла –12 °C, воды — 0 °C. Слой льда находится над слоем воды неограниченной толщины в соответствии с рис. 1.

Результаты

Результаты расчетов для момента времени t = 120 с после начала СВЧ-обработки представлены на рис. 3. Здесь для сравнения приведены распределения температуры, полученные в результате вычислений в настоящей работе и в экспериментальных исследованиях [5]. Характерная граница между льдом и водой в указанный момент времени находится вблизи x = 4,5 см. При этом максимальная разница между данными расчетов и экспериментов достигала 17 %. Микроволны слабо поглощаются льдом и легко проходят сквозь него, вследствие этого граница между твердой и жидкой фазами быстро разогревается из-за высокого значения мнимой части диэлектрической проницаемости воды. Указанное явление способствует быстрому плавлению льда на границе и поддерживается на протяжении всего процесса обработки.

По мере продвижения границы фазового перехода все большая мощность поглощается в области $x < \delta$, что увеличивает интенсивность процесса. Сравнение результатов динамики движения новой фазы представлено на рис. 4. Видно, что

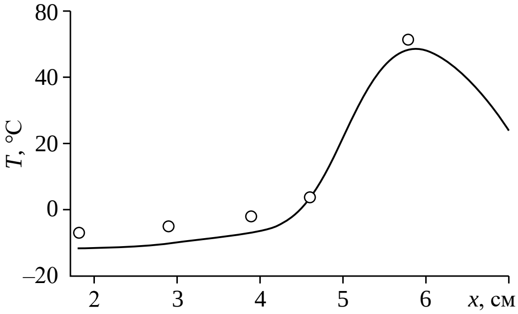

Рис. 3. Распределение температуры по слоям льда и воды в момент времени t = 120 с.
Символы — данные экспериментальной работы [5], линия — результаты вычислений настоящей работы.

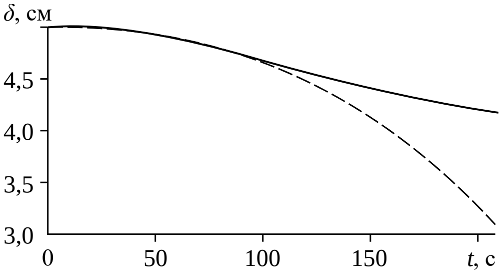

Рис. 4. Динамика движения новой фазы. Штриховая линия — результаты вычислений настоящей работы, сплошная линия — аппроксимационная зависимость, полученная на основе работы [5].

на начальном этапе процесса плавления полученное приближенное аналитическое решение демонстрирует достаточно высокую точность по динамике движения новой фазы. Далее точность падает (время плавления слоя льда на 0,5 см отличается до 15 %). Это связано с двумя факторами. Во-первых, при построении решений использовалось приближение малых времен, что позволило найти аналитическую зависимость, точность которой наиболее высока при малых значениях времен. Во-вторых, авторы работы [5] учитывали возможность формирования на верхней границе льда слоя воды спустя некоторое время после начала процесса, что, в свою очередь, приводит к большему поглощению на верхней граница льда, чем на нижней. Этим можно объяснить большую скорость движения границы вода – лед в приближенном аналитическом решении. Одновременно было обнаружено, что при снижении толщины льда на 40 % максимальная погрешность между приближенным аналитическим решением и численными расчетами снижается до 10 %. Похожего эффекта можно достичь при увеличении мощности источника.

Выводы

В работе рассмотрена СВЧ-обработка слоя льда, находящегося над слоем воды. Построена модель нагрева и таяния слоя, получены приближенные аналитические решения для малых параметров времени. Для оценки точности полученных распределений проведено сравнение с результатами других исследователей. Результаты показали, что настоящие решения могут достаточно качественно описывать распределение температуры и динамику движения границы новой фазы, а полученные формулы позволяют проводить параметрический анализ, который в проведенном исследовании показал, например, что снижение толщины льда на 40 % дает возможность существенно повысить точность расчетов.

Список литературы

1. **Millerd F.** The potential impact of climate change on Great Lakes international shipping // Climatic Change. J. 2011. Vol. 104, No. 3–4. P. 629–652.
2. **Слепцов С.Л., Саввинова Н.А.** Расчетное исследование нестационарного теплового состояния слоя льда с учетом рассеяния излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4. С. 647–654.
3. **Horeis G., Pichler S., Stadler A., Gossler W., Kappe C.O.** Microwave-assisted organic synthesis — back to the roots // 5th Intern. Electronic Conf. on Synthetic Organic Chemistry (ECSOC-5). 2001. [Электронный ресурс] http:www.mdpi.org/ecsoc-5.htm.
4. **Ratanadecho P., Aoki K., Akahori M.** Experimental and numerical study of microwave drying in unsaturated porous material // Intern. Commun Heat Mass Transf. 2001. Vol. 28. P. 605–616.
5. **Ratanadecho P.** Theoretical and experimental investigation of microwave thawing of frozen layer using a microwave oven (effects of layered configurations and layer thickness) // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. Vol. 47, No. 5. P. 937–945.

Статья поступила в редакцию 5 июня 2023 г.,
после доработки — 19 июля 2023 г.,
принята к публикации 17 августа 2023 г.